

Vレグラーメン橋の固有振動解析と その精度の検討について

Natural Vibration Analysis of Rigid-Frame Bridges with V-Shaped Legs
and Its Accuracy Investigation

林 川 俊 郎*

By Toshiro HAYASHIKAWA

Three different mass matrix methods for determining dynamic characteristics (natural frequencies and mode shapes) of in-plane vibrating rigid-frame bridges with V-shaped legs are presented. One method is the exact method based on the general solutions of the differential equations of motion for both axial and flexural vibrations, and it is called the continuous mass method. The other two matrix methods are the lumped and consistent mass methods based on the approximate finite element approach. The mathematical relationship between the exact and approximate methods is discussed. The numerical results computed by the lumped, consistent, and continuous mass methods are given in tabular form, and the accuracy of the eigenvalues obtained by these mass matrix methods is investigated.

1. まえがき

近年、構造物が大型化あるいは複合形式化されるにつれて、その振動性状はますます複雑になってきている。特に、構造物が非対称でかつ質量の中心点が大きく偏心しているような場合には、固有値の接近が見られる。さらに、動的応答解析に用いる手法によっては、動的応答値にかなりの差異を生ずることが言われている¹⁾。従来より、構造物の動的応答解析には簡便なSRSS(Square-Root-of-Sum-of-Squares)法がよく使用されてきたが、構造物の特徴によっては、その動的応答を過大あるいは過小に評価してしまう場合がある。一般的に、構造物の動的応答は構造物に作用する外力のもつ性質と構造物自身の振動性状、すなわち、固有振動数、固有振動モード、減衰定数等によって決定される。特に、後者の固有振動数および固有振動モードを低次から高次の固有振動まで精度よく計算することは、構造物の動的設計および動的応答の評価を行う上で、重要な課題であると言える。

構造物の固有振動解析は大きく分けて、運動方程式の一般解を用いて動的な剛性マトリックスを誘導し、固有値を求める厳密解法(連続質量法、continuous mass method)と、構造物の質量を多質点系に離散化し、有限要素法等を用いる近似解法(集中質量法と整合質量法、lumped and consistent mass methods)との2通りがある。前者の最終的な振動数方程式は、固有値を含む種々の関数より構成された超越方程式となり、後者は一般的な固有値問題に帰着される。筆者は、すでに多径間連続桁の固有値を上記の異なる3種類の質量マトリックス法により数値計算し、その振動性状と精度について研究してきた^{2),3)}。しかしながら、有限要素法による振動解析が一般的に普及し、さらに、電子計算機の急進的な発展により数値計算が容易になった今日においても、構造物の要素分割数とその固有値の精度について数値解析的かつ数学的立場から明確に検討した論文は意外と少なかったように思われる。

*工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

そこで、本研究は図-1に示すように、北海道日高山脈で現在建設中のVレグラーメン橋を数値計算例として取り上げ、集中質量法、整合質量法および連続質量法により数値計算し、求められた固有値の精度について詳しく検討する。また、必要な精度を満たす固有振動モード次数と近似解法の要素分割数との関係について調査し、要素分割数の妥当性とその算定方法について提案がなされる。最後に、連続質量法で用いる動的な剛性マトリックスの各要素を固有値に関してTaylor展開し、集中質量法および整合質量法におけるそれぞれの静的剛性マトリックスおよび質量マトリックスとの比較から、異なる3種類の質量マトリックス法の数学的な特徴と位置関係について明らかにする。

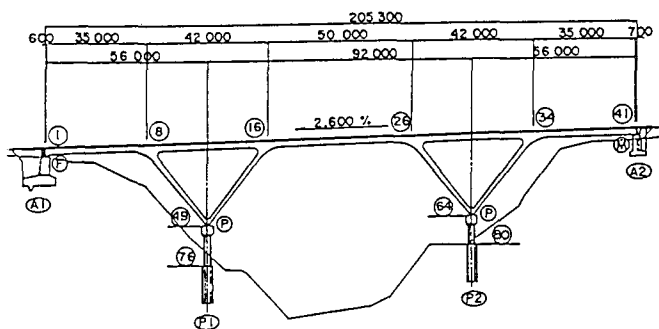


図-1 Vレグラーメン橋

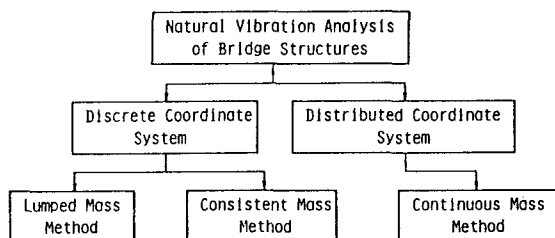


図-2 固有振動解析

2. 固有振動解析

Vレグラーメン橋は軸変形および曲げ変形を受ける骨組部材より構成されている。すなわち、図-1に示す骨組部材は軸力、せん断力および曲げモーメントを受ける。したがって、本研究ではVレグラーメン橋を平面骨組構造物として取り扱い、固有振動解析には一般的な変位法（有限要素法）を適用することにする。

骨組構造物の固有振動解析は、その構造物のモデル化によって、離散座標系（discrete coordinate system）と分布座標系（distributed coordinate system）による解に分類することができる^{3), 4)}。さらに、前者には部材要素の片側半分の質量と質量モーメントを両節点に等しく置換する集中質量法と軸変形には1次式および曲げ変形には3次式の変位関数を用いて部材要素の質量を分配する整合質量法による2通りの方法がある。後者には骨組構造物の質量、剛性等の力学的特性を連続的な分布量として取り扱う連続質量法がある。この解析方法はトラス部材（軸要素）あるいは桁部材（曲げ要素）の自由振動の基礎微分方程式の一般解を必要とするが、正確な固有値（厳密解）を求めることができる。ここに述べた骨組構造物の固有振動解析の概念的な分類が図-2に示されている。一般的に、離散座標系による解は近似解を、分布座標系による解は厳密解を与える^{3), 5)}。

2-1. 離散座標系による解

ここでは、図-3に示すような一定断面を有する骨組部材要素について考える。軸変形には1次のベキ級数、曲げ変形には3次のベキ級数で部材要素内の変位関数を仮定すると、さらに、両変形の連成がないものとするれば、各部材要素の剛性方程式は次のように求められる^{6), 7)}。

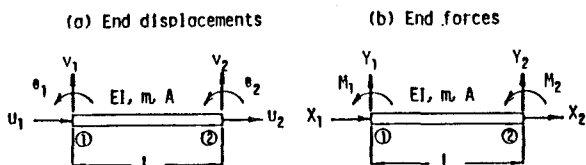


図-3 骨組部材要素

$$F_a = K_{as} U_a, \quad F_f = K_{fs} U_f \quad (1a \cdot b)$$

ここに、

$$F_a = \{X_1, X_2\}^T, \quad F_f = \{Y_1, M_1, Y_2, M_2\}^T \quad (2)$$

$$U_a = \{u_1, u_2\}^T, \quad U_f = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}^T \quad (3)$$

$$K_{as} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_{fs} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Symmetric} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4a \cdot b)$$

ここで、Eは弾性係数、Aは断面積、Iは断面二次モーメント、Lは部材長である。また、添字 aは部材要素の軸変形を、添字 fは部材要素の曲げ変形を意味している。

部材要素の片側半分の質量と質量モーメントを両節点に集中させることにより、非対角項成分が零となる集中質量マトリックスは次のように与えられる³⁾。

$$M_{a1} = \frac{mL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{f1} = \frac{mL}{24} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix} \quad (5a \cdot b)$$

ここで、mは単位長さあたりの質量である。さらに、前述の式(4a)、(4b)の静的剛性マトリックス K_{as} と K_{fs} を誘導した同じ変位関数を用いると、以下のような

$$M_{a2} = \frac{mL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_{f2} = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 56 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{Symmetric} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6a \cdot b)$$

整合質量マトリックスが求められる³⁾。式(4)、(5)、(6)の各部材要素の剛性マトリックスおよび質量マトリックスは重ね合せの原理を適用すると、最終的に離散座標系における骨組構造物の振動数方程式は次のような固有値問題に帰着される。

$$\det |K - \omega^2 M| = 0 \quad (7)$$

ここで、KとMはそれぞれ境界条件より拘束節点処理された構造物全体の剛性マトリックスと質量マトリックスである。また、 ω は固有円振動数である。式(7)の固有値問題は数学的にも非常に重要な問題であり、繰返し法、代数的方法、相似変換に基づく方法等の数多くの解析方法がある^{6)・9)}。本研究では、Householder法による北海道大学大型計算機センターの数値計算副プログラム・ライブラリMSL(DEIGABとDEIGRS)を用いて解いた。

2-2. 分布座標系による解

図-3において、部材要素の動的伸縮（軸変形）は縦振動となって現われ、その自由振動の運動方程式は次のように与えられる。

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8)$$

上式の一般解より節点力と節点変位との間に、次のような関係式が得られる³⁾。

$$F_a = K_{aa} U_a \quad (9a)$$

ここに、

$$K_{\alpha\alpha} = EA\alpha \begin{bmatrix} \cot \alpha L & -\operatorname{cosec} \alpha L \\ -\operatorname{cosec} \alpha L & \cot \alpha L \end{bmatrix}, \quad \alpha = \sqrt{m\omega^2/EI} \quad (9b)$$

さらに、部材要素の鉛直たわみに伴う曲げ振動の基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

式(10)の一般解を用いて、曲げ振動に伴う節点力と節点変位との関係を求めると、次のようなマトリックス関係式が得られる³⁾。

$$F_f = K_{fe} U_f \quad (11a)$$

ここに、

$$K_{fe} = \frac{EI\beta}{1-cC} \begin{bmatrix} \beta^2(sC+cS) & \beta sS & -\beta^2(s+S) & \beta(C-c) \\ & sC-cS & \beta(c-C) & S-s \\ & & \beta^2(sC+cS) & -\beta sS \\ \text{Symmetric} & & & sC-cS \end{bmatrix}$$

$$c = \cos \beta L, \quad s = \sin \beta L, \quad C = \cosh \beta L, \quad S = \sinh \beta L, \quad \beta = \sqrt[4]{m\omega^4/EI} \quad (11b)$$

式(9b)と(11b)の動的な剛性マトリックス $K_{\alpha\alpha}$ と K_{fe} はそれぞれ固有円振動数 ω (固有値)を含んでいるので、ここでは固有剛性マトリックス²⁾と呼ぶことにする。両者の固有剛性マトリックスは、静的問題の場合の剛性マトリックスと全く同様にして、座標変換および重ね合せの原理を用いることが可能である。

一般的に、分布座標系における骨組構造物の振動数方程式は

$$\det |K(\omega)| = 0 \quad (12)$$

と表される。ここで、 $K(\omega)$ は境界条件より拘束節点処理された構造物全体の固有剛性マトリックスである。式(12)は固有円振動数 ω を含んだ超越方程式となるが、Regula-Falsi法¹⁰⁾により容易に解を求めることができる。

3. 数値計算結果

3-1. 数値計算例

数値計算例として、北海道の日高山脈の急峻な渓谷に架設されるシビチャリ1号橋の断面諸元を用いる。本橋は鉄筋コンクリート橋脚の上に、V型の鋼製橋脚を有する5径間連続ラーメン橋である。また、本橋はA1からA2にかけて2.600%の縦断勾配があり、非対称構造物である。なお、本橋の境界条件は図-1に示すように橋軸方向に対して、A1はヒンジ支承、A2は可動支承、P1とP2は固定支持である。さらに、数値計算に必要な断面諸元は以下の通りである。弾性係数 $E = 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2$ (206,000 MN/m²)、断面積 $A = 0.100 \sim 2.500 \text{ m}^2$ 、断面二次モーメント $I = 0.018 \sim 0.568 \text{ m}^4$ 、単位長さあたりの重量 $w = 1.267 \sim 5.700 \text{ t/m}$ (12,500—55,900 N/m)。

3-2. 固有円振動数

図-4には、集中質量法および整合質量法により求められた固有振動モードが1次から10次まで示されている。ここで、5径間連続Vレグラーメン橋の要素分割数は $N = 80$ である。このVレグラーメン橋は図-1に示すように2.600%の縦断勾配があり、構造形式が非対称であるため、特異な固有振動モードが現われている。基本固有1次振動モードは、中央支間において大きな振幅を生じ、あたかもV型橋脚を剛支点にしたような5径間連続桁の挙動を示している。9次固有振動モードではV型橋脚のみが局部的に振動しているが、他の固有振動モードは補剛桁とV型橋脚とが一体となり連成振動していることがわかる。

集中質量法および
整合質量法により
求められた両者の
固有振動モードを
比較すると、それ
程、大きな差がな
いことが理解でき
る。

集中質量法、整
合質量法および連
続質量法により計
算された1次から
20次までの固有円
振動数が表-1に
示されている。要
素分割数は $N=80$
である。ここで、
連続質量法により
求められた固有円
振動数は厳密解で

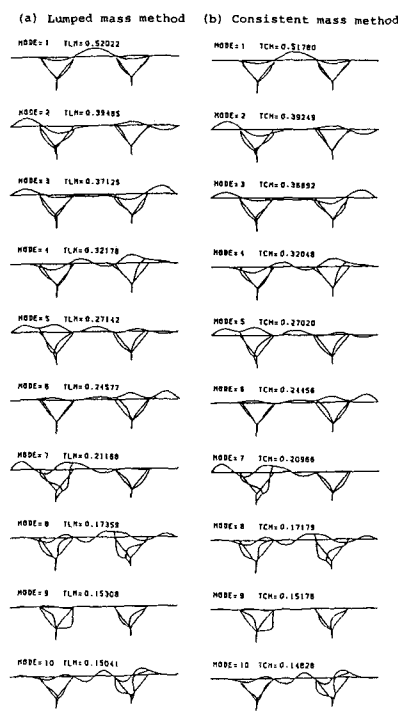


図-4 固有振動モード

ある。一方、離散座標系による解、つまり、集中質量法
および整合質量法により求められた固有円振動数は近似
解である。一般的に、集中質量法による固有円振動数は
厳密解よりも小さい値を、整合質量法による固有円振動
数は厳密解よりも大きい値を与える。

次に、集中質量法および整合質量法により数値計算さ
れた固有値の精度について考えてみよう。図-5は同一
断面諸元のVレグラーメン橋について、集中質量法と
整合質量法により計算した固有円振動数 ω と連続質量法
による厳密解 ω^* との比を各固有振動モードに対して示
したものである。図中の N は要素分割数である。一般的
に、要素分割数 N が増加するにつれて、集中質量法およ
び整合質量法による解が徐々に厳密解に近づいて行くこ
とがわかる。また、同じ要素分割数 N では、整合質量法
による解析結果は集中質量法による結果と比較して、か
なり良い精度で固有円振動数を計算していることが確認
できる。さらに、集中質量法により求められた固有円振
動数は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は
厳密解に対して上界値を与えることがわかる。

以上のことから、Vレグラーメン橋のような骨組構
造物の固有振動解析には、集中質量法を用いるよりも、
整合質量法を用いることを本研究で推奨したい。また、

表-1 計算された固有円振動数

Mode order	Lumped mass method	Consistent mass method	Continuous mass method
1	12.0779	12.1343	12.1280
2	15.9130	16.0086	16.0000
3	16.9244	17.0312	17.0220
4	19.5263	19.6058	19.5950
5	23.1490	23.2537	23.2406
6	25.5647	25.6921	25.6773
7	29.6828	29.9651	29.9478
8	36.1952	36.5749	36.5529
9	41.0448	41.3972	41.3728
10	41.7743	42.3727	42.3452
11	45.6868	46.1153	46.0867
12	46.1368	46.5411	46.5132
13	48.4642	48.9259	48.8953
14	61.8550	63.0179	62.9664
15	63.0435	64.5331	64.4789
16	68.3102	69.7503	69.6821
17	69.2541	70.4185	70.3531
18	80.5942	82.7604	82.6762
19	88.1759	90.7033	90.6014
20	91.8246	95.2146	95.1020

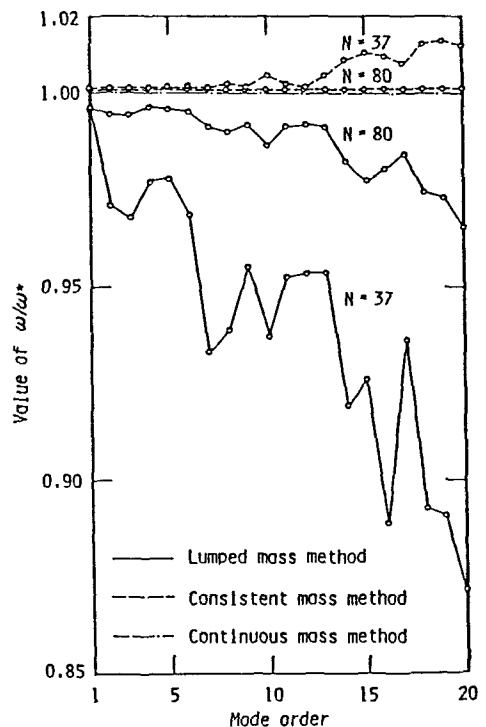


図-5 固有円振動数の精度比較

数値計算する上で要素分割数と精度との関係について言及するならば、もし整合質量法により0.1%以内の良好な精度で固有値を計算するためには

$$(\text{構造物全体の要素分割数}) = (1 \text{ 節点の自由度}) \times (\text{必要な固有振動モード次数}) \quad (13)$$

という算定式が有効であろう。ここで、確認のために図-5で示した数値計算結果を参考にして、要素分割数 $N=37$ を用いた整合質量法による解はほぼ0.1%以内の精度で、約12次の固有振動モードまで計算されていることがわかる。さらに、要素分割数 $N=80$ を用いた場合の計算結果はほぼ20次の固有振動モードまで0.1%以内の精度で固有値が求められていることが確認できる。一方、集中質量法を使用した場合の固有値の精度はほとんど低次の固有振動モードしか期待できないとすることができる。

3-3. 固有剛性マトリックスの級数展開

式(9b)および式(11b)における固有剛性マトリックス K_{as} と K_{fs} をそれぞれTaylor展開することにより、整合質量マトリックス M_{as} と M_{fs} との数学的な関係について調べてみよう。一つの例として、固有剛性マトリックス K_{as} と K_{fs} の1行1列の要素を取り出して、固有円振動数 ω に関してべき級数展開すると

$$k_{as,11} = EA \alpha \cot \alpha L = \frac{EA}{L} - \frac{mL}{3} \cdot \omega^2 - \frac{m^3 L^3}{45EA} \cdot \omega^4 - \dots \quad (14)$$

$$\begin{aligned} k_{fs,11} &= \frac{EI \beta^3 (sC + cS)}{1 - cC} = \frac{EI \beta^3 (\sin \beta L \cosh \beta L + \cos \beta L \sinh \beta L)}{1 - \cos \beta L \cosh \beta L} \\ &= \frac{12EI}{L^3} - \frac{13mL}{35} \cdot \omega^2 - \frac{59m^3 L^5}{161,700EI} \cdot \omega^4 - \dots \end{aligned} \quad (15)$$

である。式(14)と式(15)の右辺第一項は、それぞれ式(4a)および式(4b)の静的剛性マトリックス K_{as} と K_{fs} の1行1列の要素と一致している。さらに、式(14)と式(15)の右辺第二項は、それぞれ式(6a)および式(6b)の整合質量マトリックス M_{as} と M_{fs} の1行1列の要素と完全に一致していることがわかる。固有剛性マトリックスの他の要素に対しても、同様の結果が得られる。したがって、式(9b)および式(11b)における固有剛性マトリックス K_{as} と K_{fs} は固有円振動数 ω に関するべき級数展開により、一般的に次式のようにマトリックス表示できる。

$$K_{as} = K_a - M_{a1} \cdot \omega^2 - M_{a2} \cdot \omega^4 - \dots \quad (16)$$

$$K_{fs} = K_f - M_{f1} \cdot \omega^2 - M_{f2} \cdot \omega^4 - \dots \quad (17)$$

ここで、式(16)の右辺第一項の係数マトリックス K_a と1次の質量マトリックス M_{a1} は式(4a)の軸変形の静的剛性マトリックス K_{as} と式(6b)の整合質量マトリックス M_{as} とそれぞれ一致する。さらに、式(17)の右辺第一項の係数マトリックス K_f と1次の質量マトリックス M_{f1} は式(4b)の曲げ変形の静的剛性マトリックス K_{fs} と式(6b)の整合質量マトリックス M_{fs} とそれぞれ完全に一致している。したがって、以上の考察からして整合質量法は固有剛性マトリックスを固有円振動数 ω に関してべき級数展開した場合の ω^4 以上の高次の項（あるいは2次以上の質量マトリックス M_{a2} および M_{f2} ）を無視した連続質量法と一致する。つまり、整合質量法は固有剛性マトリックスの ω^4 以上の高次項の影響を無視した連続質量法の一種の近似解法と結論づけられる。さらに、式(5)と式(6)の質量マトリックスを比較することにより、集中質量法は整合質量マトリックスの質量の連成項（非対角項）を無視した整合質量法の簡易解法といえることができる。このような異なる3種類の質量マトリックス法の精度に関する位置関係は図-5に示した数値計算結果からも容易に確認できる。

4. あとがき

本研究はVレグラーメン橋の固有振動解析による固有値の精度について、集中質量法、整合質量法および連続質量法の異なる3種類の質量マトリックス法により数値計算し、さらに、数学的立場から3者の

位置関係について考察したものである。得られた結果および今後の研究課題についてまとめると次のようになる。

- (1) 一般的に、集中質量法により求められた固有円振動数は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与える。
- (2) Vレグラーメン橋の要素分割数が増えるにつれて、近似解法による解は徐々に厳密解に近づく傾向にある。また、同じ要素分割数では、固有円振動数の値は集中質量法を用いるよりも整合質量法を用いた方がかなり良い精度で計算されることが確認された。
- (3) 非常に数少ない数値計算例ではあるが、多径間連続桁³⁾およびここで示したVレグラーメン橋のような平面骨組構造物の数値計算結果から、要素分割数と必要な精度の固有振動モード次数との関係式が本研究で提案された。離散座標系による解の中で、整合質量法による解がかなり精度が良いことから、式(13)で提案した算定式は今後の骨組構造物の固有値計算をする上で役立つであろう。
- (4) 固有剛性マトリックスを固有円振動数 ω に関してTaylor展開することにより、整合質量法は高次の質量マトリックスを無視した連続質量法の特別な場合であることが明らかにされた。さらに、集中質量法は整合質量マトリックスの質量連成項を無視した整合質量法の簡易計算法といえることができる。
- (5) 曲げねじり(そり変形)の影響を考慮した曲線格子桁橋、あるいは3次元的な立体骨組構造物等における固有値とその精度については今後の研究課題であろう。また、動的応答解析における集中質量法、整合質量法および連続質量法による差異についても今後検討する必要がある。さらに、実在橋の現場振動測定との対応も今後の重要な検討課題となるであろう。

本研究のVレグラーメン橋の断面諸元および数値計算にあたって、渡辺昇教授(北海道大学)、金子孝吉教授(専修大学北海道短期大学)、吉田紘一氏(北海道開発局)、松井義孝氏(中央コンサルタント)の御協力を得たことに深く感謝いたします。なお、膨大なる数値計算には北海道大学大型計算機センターのHITAC M-682とS-810システムを利用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Wilson, E.L., Der Kiureghian, A. and Bayo, E.P.: A Replacement for the SRSS Method in Seismic Analysis, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 9, pp. 187-194, 1981.
- 2) Hayashikawa, T. and Watanabe, N.: Dynamic Behavior of Continuous Beams with Moving Loads, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. EM1, pp. 229-246, 1981.
- 3) Hayashikawa, T. and Watanabe, N.: Free Vibration Analysis of Continuous Beams, Journal of Engineering Mechanics, Proc. of ASCE, Vol. 111, No. 5, pp. 639-652, 1985.
- 4) Clough, R.W. and Penzien, J.: Dynamics of Structures, McGraw-Hill Book Co., 1975.
- 5) Hurty, W.C. and Rubinstein, M.F.: Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1964.
- 6) 鷲津久一郎、宮本博、山田嘉昭、山本善之、川井忠彦共編：有限要素法ハンドブック、培風館、1981.
- 7) Przemieniecki, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Co., 1968.
- 8) Paz, M.: Structural Dynamics, Theory and Computation, Van Nostrand Reinhold Company, 1980.
- 9) Crandall, S.H.: Engineering Analysis, McGraw-Hill Book Co., 1956.
- 10) Wendroff, B.: Theoretical Numerical Analysis, Academic Press, 1966.

(1989年10月12日受付)