

初期応力を受ける円筒パネルの振動特性

VIBRATION CHARACTERISTICS OF CYLINDRICAL PANELS UNDER INITIAL STRESS

三上 隆* 芳村 仁**

By Takashi MIKAMI and Jin YOSHIMURA

Vibration characteristics of cylindrical panels are studied on the basis of the shell theory. The two types of initial stress are considered: a pure compression and a pure bending. The equations of motion of the panel are solved by the use of collocation method. The natural frequencies and the mode shapes of vibration are calculated numerically, and the effects of initial stress on the dynamic properties are investigated.

1. まえがき

構造物あるいは構造要素の剛性、固有振動数は、初期応力に大きな影響を受けることはよく知られている。たとえば静的な軸方向圧縮荷重を受ける直梁の曲げ固有振動数は、荷重の増加とともに減少し、荷重が座屈荷重に等しくなったとき零となる。また、周期的な荷重が作用する場合には、荷重の振幅が静的座屈荷重より低くても、荷重の周期と曲げ固有振動数の間にある特別な関係が成立すれば、激しい曲げ振動が誘起されることがあることはよく知られている。特に最近では、構造物の大型化や軽量化にともなって、薄肉な構造要素が使用される傾向にあり、また構造物に対する荷重条件も次第に厳しくなる一方にあるため、構造物の安定性を検討する基礎として、初期応力の作用する構造物の振動特性すなわち固有振動数や固有モードの変化を把握しておく必要がある。

初期応力を考慮した構造要素の振動特性に関する研究としては、梁についてはRobertsの研究¹⁾、板についてはHerrmannら²⁾、Roufaeilら³⁾の研究など数多くなされている。しかし、円筒パネルに対しては、解析手法に重きを置いたものが大部分^{4)~7)}であり、初期応力の影響を考慮した研究は極めて少ないのが現状である¹³⁾。

このような観点から、本論文では、直線辺が単純支持された円筒パネルがその周方向に一様圧縮もしくは純曲げを受ける場合を対象とし、初期応力が固有振動特性にいかに関与するかを論じる。なお解析手法には直交多項式の零点を選点とする選点法⁸⁾を採用し、数値計算では曲線桁橋腹板を円筒パネルと見なし、既往の実績調査⁹⁾に基づいた代表的諸元に対して解析を行い、初期応力の影響を明らかにする。

* 工博 北海道大学助手 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

** 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

2. 解析モデルと基礎方程式

図-1に示すように、弧に沿った長さ a 、高さ b 、一様厚さ h 、曲率半径 R の等方等質な円筒パネルが、その周（円周）方向に次式で表される初期応力 σ_y の作用を受ける場合を考える。

$$\sigma_y = \sigma_0(1 - \theta x/b) \quad \dots\dots(1)$$

ここで、 θ は初期応力の形状を表すパラメータであり、 $\theta = 0$ は一様圧縮、 $\theta = 2$ は純曲げの状態である。

殻理論には、せん断変形および回転慣性を考慮した修正理論¹⁰⁾を用いるものとする。なお修正理論を採用するのは、基礎方程式中に現れる位置に関する微分の階数が古典理論のそれに比べて低いため、後述する選点法において、仮定した変位（試行）関数を数回微分することによって生じる数値的誤差の介入が避けられるなどの利点があるためである。さて、 U 、 V および W をそれぞれ中央面内における x 、 y および z 方向の変位、 Φ_x と Φ_y をそれぞれ (x, z) および (y, z) 平面の回転角を表すとすれば、任意の点における変位は次式となる。

$$U_x = U(x, y, t) + z\Phi_x(x, y, t) \quad \dots\dots(2.a)$$

$$U_y = V(x, y, t) + z\Phi_y(x, y, t) \quad \dots\dots(2.b)$$

$$U_z = W(x, y, t) \quad \dots\dots(2.c)$$

合応力成分を N_x 、 N_y 、 N_{xy} 、 N_{yx} 、 Q_x 、 Q_y 、合モーメント成分を M_x 、 M_y 、 M_{xy} 、 M_{yx} とすれば、これらと変位成分(U 、 V 、 W 、 Φ_x 、 Φ_y)の関係は次式で与えられる。

$$N_x = K(U_{,x} + \nu V_{,y} + W/R + eR\Phi_{x,x}) \quad \dots\dots(3.a)$$

$$N_y = K\{(1+e)(V_{,y} + W/R) + \nu U_{,x} - eR\Phi_{y,y}\} \quad \dots\dots(3.b)$$

$$N_{xy} = Gh(V_{,x} + U_{,y} + eR\Phi_{y,x}) \quad \dots\dots(3.c)$$

$$N_{yx} = Gh\{V_{,x} + (1+e)U_{,y} - eR\Phi_{x,y}\} \quad \dots\dots(3.d)$$

$$Q_x = \kappa Gh(\Phi_x + W_{,x}) \quad \dots\dots(3.e)$$

$$Q_y = \kappa Gh(1+e)(W_{,y} - V/R + \Phi_y) \quad \dots\dots(3.f)$$

$$M_x = D(\Phi_{x,x} + \nu \Phi_{y,y} + U_{,x}/R) \quad \dots\dots(3.g)$$

$$M_y = D(\Phi_{y,y} + \nu \Phi_{x,x} - V_{,y}/R - W/R^2) \quad \dots\dots(3.h)$$

$$M_{xy} = (Gh^3/12)(\Phi_{y,x} + \Phi_{x,y} + V_{,x}/R) \quad \dots\dots(3.i)$$

$$M_{yx} = (Gh^3/12)(\Phi_{y,x} + \Phi_{x,y} - U_{,x}/R) \quad \dots\dots(3.j)$$

ここに、コンマに続く下添字は偏微分を表し、 $K = Eh/(1 - \nu^2)$ 、 $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ 、 $e = h^2/12R^2$ 、 E = 弾性係数、 ν = ポアソン比、 G = せん断弾性係数、および κ = せん断補正係数である。

さて、初期応力を受ける円筒パネルの基礎微分方程式は、ひずみエネルギー、運動エネルギーおよび初期応力による仕事を用いて、Hamiltonの原理より次のように得られる。

$$N_{x,x} + N_{yx,y} - \sigma_y h(U_{,yy} + eR\Phi_{x,yy}) = \rho h(U_{,tt} + eR\Phi_{x,tt}) \quad \dots\dots(4.a)$$

$$\begin{aligned} N_{y,y} + N_{xy,x} + Q_y/R - \sigma_y h(V_{,yy} - V/R^2 + 2W_{,y}/R + eR\Phi_{y,yy} - e\Phi_{y,y}/R) \\ = \rho h(V_{,tt} + eR\Phi_{y,tt}) \end{aligned} \quad \dots\dots(4.b)$$

$$\begin{aligned} Q_{x,x} + Q_{y,y} - N_y/R - \sigma_y h(W_{,yy} - W/R^2 - 2V_{,y}/R - 2eR\Phi_{y,y}) \\ = \rho hW_{,tt} \end{aligned} \quad \dots\dots(4.c)$$

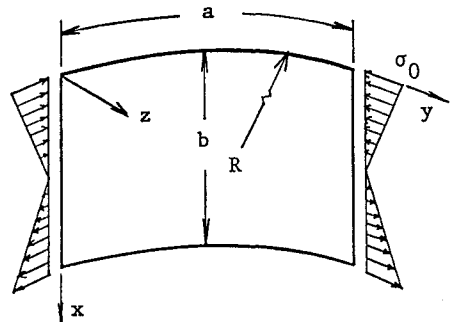


図-1 解析モデル

$$M_{x,x} + M_{y,x} - Q_x - (\sigma_y h^3 / 12) (\Phi_{x,yy} + U_{yy} / R) \\ = (\rho h^3 / 12) (\Phi_{x,tt} + U_{tt} / R) \quad \dots\dots\dots(4.d)$$

$$M_{y,y} + M_{x,y} - Q_y - (\sigma_y h^3 / 12) (\Phi_{y,yy} - \Phi_y / R^2 + V_{yy} / R - V / R^3 + 2W_y / R^2) \\ = (\rho h^3 / 12) (\Phi_{y,tt} + V_{tt} / R) \quad \dots\dots\dots(4.e)$$

なお、上式で σ_y に関する項を無視すれば、文献10)で与えられた方程式となる。

円筒パネルは、 y 方向半波数 m および円振動数 ω の調和振動するものと仮定すれば、 $y=0$ と $y=a$ で単純支持の条件 ($W=U=\Phi_x=N_y=M_y=0$) をみたす解は次のように表される。

$$U = h \sum_m u(\xi) \sin m\pi y / a \, e^{i\omega t}, \quad V = h \sum_m v(\xi) \cos m\pi y / a \, e^{i\omega t} \\ W = h \sum_m w(\xi) \sin m\pi y / a \, e^{i\omega t}, \quad \Phi_x = \sum_m \phi_x(\xi) \sin m\pi y / a \, e^{i\omega t} \\ \Phi_y = \sum_m \phi_y(\xi) \cos m\pi y / a \, e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(5.a \sim e)$$

ここに、 i は虚数単位、 ξ ($=x/b$) は $0 \leq \xi \leq 1$ で定義される x 方向の無次元化座標である。

基礎微分方程式(4)に、式(3)、(5)を代入すれば、変位 u, v, w, ϕ_x および ϕ_y で表された次の2階5元連立常微分方程式が得られる。

$$[C]\{X''\} + [D]\{X'\} + [E]\{X\} + k[F]\{X\} + \Omega^2[G]\{X\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $(\quad)' = d(\quad)/d\xi$ 、 $\{X\}^T = (u, v, w, \phi_x, \phi_y)$ 、 $[C]$ 、 $[D]$ 、 $[E]$ 、 $[F]$ および $[G]$ は 5×5 次のマトリックス (具体的内容は付録を参照)、 k および Ω^2 はそれぞれ次式で表される座屈応力および固有円振動数パラメータである。

$$k = 12 (1 - \nu^2) \sigma_0 / E \pi^2 h^2, \quad \Omega^2 = \rho (1 - \nu^2) \omega^2 b^2 / E \quad \dots\dots\dots(7.a, b)$$

$x=0$ ($\xi=0$) と $x=b$ ($\xi=1$) における境界条件は次の場合を考える。

a) 固定条件

$$u = v = w = \phi_x = \phi_y = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

b) 単純支持

$$u = w = \phi_x = N_{xy} = M_{xy} = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

式(9)の N_{xy} と M_{xy} を変位成分で表せば、次のようになる。

$$N_{xy}; u' + (\nu b / R) w - (\nu m \pi b / a) v + (h / 12R) \phi'_x = 0 \quad \dots\dots\dots(10.a)$$

$$M_{xy}; \phi'_y + (m \pi b / a) \phi_x + (h / R) v' = 0 \quad \dots\dots\dots(10.b)$$

3. 解 法

式(1)で与えられる初期応力を受けるパネルの基礎式(6)は、一様圧縮の場合を除いて変数係数の微分方程式となるため、その厳密解を得ることはしばしば困難となる。したがって、ここでは近似解法として、少ない自由度数で高精度な解が得られる M 次 shifted Legendre多項式 $P_m^*(\xi)$ の零点を選点とする選点法を採用する。この解法による固有値問題の定式化の詳細は文献8)に譲るが、その概略は次のようである。

式(5)に現れる関数(u, v, w, ϕ_x, ϕ_y)の近似関数の各々には、変数 ξ の端点 ($\xi_0=0, \xi_{M+1}=1$) および多項式 $P_m^*(\xi)=0$ の零点 ξ_i ($i=1 \sim M$) から成る $M+2$ 個の点における関数値で表されるLagrange多項式を用いる。近似関数に含まれる $5(M+2)$ 個の未知量に対する条件式は、 $5M$ 個は微分方程式の残差条件より、残り10個は境界条件より得られ、考察している問題は代数方程式系の固有値問題に変換される。

以下に、上述の過程をマトリックス表現する。

a) 基礎微分方程式の残差条件 (5M個の条件)

$$[\alpha_c]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} + k[\gamma_c]\{\delta_c\} + \Omega^2[\rho_c]\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここで、添字 c と e はそれぞれ、選点および端点に関するマトリックス、ベクトルを表し、 $[\alpha_c]$ 、 $[\gamma_c]$ お

および $[\rho_0]$ は $5M \times 5M$ 次の行列, $[\alpha_0]$ は $5M \times 10$ 次の行列である。さらに, $5M$ 次のベクトル $\{\delta_0\}$ および 10 次のベクトル $\{\delta_0\}$ は次のような内容のものである。

$$\{\delta_0\}^T = (u(\xi_1), \dots, u(\xi_M), v(\xi_1), \dots, v(\xi_M), w(\xi_1), \dots, w(\xi_M), \phi_x(\xi_1), \dots, \phi_x(\xi_M), \phi_y(\xi_1), \dots, \phi_y(\xi_M)) \dots\dots\dots(12.a)$$

$$\{\delta_0\}^T = (u(\xi_0), u(\xi_{M+1}), v(\xi_0), v(\xi_{M+1}), w(\xi_0), w(\xi_{M+1}), \phi_x(\xi_0), \phi_x(\xi_{M+1}), \phi_y(\xi_0), \phi_y(\xi_{M+1})) \dots\dots\dots(12.b)$$

b) 境界条件式 (10個の条件)

$$[\beta_0]\{\delta_0\} + [\beta_0]\{\delta_0\} = \{0\} \dots\dots\dots(13)$$

ここに, $[\beta_0]$ は $10 \times 5M$ 次, $[\beta_0]$ は 10×10 次の行列である。

c) 固有振動数方程式

式(11), (13)より $\{\delta_0\}$ を消去すれば, 選点における関数値を成分とするベクトル $\{\delta_0\}$ を固有ベクトルとする次の固有値問題が得られる。

$$([\alpha] + k[\gamma_0] + \Omega^2[\rho_0])\{\delta_0\} = \{0\} \dots\dots\dots(14)$$

ここで, $[\alpha]$ は $5M \times 5M$ 次の行列で次式で与えられる。

$$[\alpha] = [\alpha_0] - [\alpha_0][\beta_0]^{-1}[\beta_0] \dots\dots\dots(15)$$

初期応力の変化による振動解析の変化を求めるには, まず固有振動数パラメータ Ω^2 を零とした式(14)により座屈解析を行い, 座屈応力 σ_{cr} を求める。次に, 任意の初期応力 σ_0 と座屈応力 σ_{cr} との比 $\lambda = \sigma_0 / \sigma_{cr}$ を用いて, 一連の初期応力に対して固有値解析を次式によって行えばよい。

$$([\alpha] + \lambda \cdot \sigma_{cr}[\gamma_0])\{\delta_0\} + \Omega^2[\rho_0]\{\delta_0\} = \{0\} \dots\dots\dots(16)$$

4. 数値解析例

以下の数値計算では, ボアソン比 $\nu = 0.3$, せん断補正係数 $\kappa = \pi^2 / 12$ とし, 選点数 M には $M=12$ を用いる。

(1) 本手法の精度

本手法の数値解析精度の検証を目的に以下に, 初期応力が作用しない場合の固有振動解析 (式(14)で $k=0$) および座屈解析 (式(14)で $\Omega^2=0$) を実施し, 古典殻理論による結果との比較で示す。周知のとおり, 古典殻および修正殻理論に基づく解 (Ω^2, k) は, 幅厚比 b/h に依存する。そこで, どの程度の b/h であれば両理論による解が一致するかを確認する意味で, 種々の b/h に対する結果を併せて示す。解析モデルは縦横比 $a/b=1$, 四辺単純支持である。

表-1は固有振動数 Ω_{mn} の値を示し, y 方向半波数 m と x 方向モード次数 n の種類の組合せに対して, 古典殻理論に基

表-1 円筒パネルの固有振動数 Ω_{mn} (四辺単純支持)

m, n	Present	F.S.M. ⁵⁾	S.S.M. ⁷⁾
1, 1	0.2690	0.2708	0.2691
2, 1	0.2863	0.2871	0.2870
1, 2	0.4809	0.4855	0.4817
2, 2	0.4972	0.5027	0.4992
3, 1	0.5404	0.5438	0.5438

表-2 固有振動数 Ω_{mn} に及ぼす b/h の影響 (四辺単純支持)

m, n	Theory	$b/h=100$	$b/h=200$	$b/h=300$
1, 1	I.S.T.	0.2534	0.2488	0.2480
	C.S.T.	0.2534	0.2488	0.2480
2, 2	I.S.T.	0.3365	0.2736	0.2603
	C.S.T.	0.3367	0.2736	0.2603

I.S.T.=Improved Shell Theory
C.S.T.=Classical Shell Theory

づく有限帯板法(F.S.M.)⁵⁾およびスプライン帯板法(S.S.M.)⁷⁾の結果と比較したものである。

諸元は、 $a=b=1$ 、 $h=0.0191$ 、 $R=1.91$ である。表より明らかなように、 $b/h=52$ の比較的せん断変形の影響の現れやすい諸元のため、本計算値は他の場合よりやや低めの値を示しているが、満足すべき結果を与えている。

表-2は、厚さ h のみを変化させ、 b/h の固有振動数に与える影響を調べたもので、 $h/b \geq 100$ であれば、修正および古典殻理論とも大きな差が生じていない。

表-3は純曲げを受ける円筒パネルの座屈係数 k_{cr} の値を示し、種々の曲率パラメータ a^2/Rh について、解 (k) が b/h に依存しないように簡略化された古典殻理論に基づくGalerkin解¹¹⁾と比較したものである。これをみると、本手法によっても十分良好な結果が得られ、 $h/b \geq 200$ であれば一定値となる。

(2) 初期応力の作用する円筒パネルの振動特性

円筒パネルの諸元は、曲線桁橋の実績調査⁹⁾を参考にし、縦横比 $a/b=1$ 、幅厚比 $b/h=200$ とし、曲率パラメータ $a^2/Rh=0$ (平板)、10、20の場合を解析の対象とする。なお曲線辺の境界条件は、単純支持もしくは固定とした。

計算結果を一樣圧縮($\theta=0$)については図-2に、純曲げ($\theta=2$)については図-3に示す。各図は $\sigma_\theta/\sigma_{cr}-\Omega_{mn}/\Omega_\theta$ 曲線を示したもので、縦軸 $\sigma_\theta/\sigma_{cr}$ は各場合の座屈応力によって基準化した作用初期応力の大きさ、横軸 $\Omega_{mn}/\Omega_\theta$ は各場合の初期応力が作用しない場合の最小固有振動数で基準化した固有振動数の大きさを表す(表-4に基準化に用いた Ω_θ および座屈係数 k_{cr} の値を示す)。また図中の (m, n) は、 $(y$ 方向の半波数、 x 方向のモード次数)を示す。なお、各図において $\Omega_{mn}/\Omega_\theta=0$ で $\sigma_\theta/\sigma_{cr}=1$ を与える (m, n) は座屈波形に相当する。これは動的安定解析により、座屈応力を求めたことに同等であり、Divergence形の座屈応力であることを示している¹²⁾。

図-2および図-3から初期応力を受ける縦横比 $a/b=1$ の円筒パネルの固有振動数特性は、次のように要約される。

- ① $\sigma_\theta/\sigma_{cr}-\Omega_{mn}/\Omega_\theta$ 特性に及ぼす曲線辺の支持条件の違いによる影響はわずかである。
- ② 一般に固有振動数は、初期圧縮応力の増加にともなってパネルの剛性の低下が大きくなるために減少

表-3 純曲げを受ける円筒パネルの座屈係数 k_{cr} (四辺単純支持)

a^2/Rh	Present			Ref. 11)
	$b/h=100$	$b/h=200$	$b/h=300$	
10.48	26.35	26.40	26.41	26.42
20.97	29.01	29.05	29.06	29.06
31.45	33.39	33.40	33.40	33.40
41.93	36.50	36.60	36.61	36.62
52.41	38.05	38.13	38.14	38.15

表-4 基準化に用いた Ω_θ および k_{cr} の値

(a) Ω_θ の値

a^2/Rh	Simply supported	Clamped
0	0.0285	0.0418
10	0.0371	0.0491
20	0.0555	0.0664

(b) k_{cr} の値

a^2/Rh	$\theta=0$		$\theta=2$	
	Simply supported	Clamped	Simply supported	Clamped
0	3.999	7.686	25.512	39.626
10	6.359	7.908	26.323	40.766
20	6.696	8.570	28.736	44.169

する。ただし減少量の度合は、座屈波形を与える振動波形(m, n)に依存し、 $\theta = 0$, $a^2/Rh = 0$ の単純支持の場合には(1, 1)型、他の場合は(2, 1)型で最も著しい。また振動波形(m, n)が(3, 1), (4, 1)型などのように $m > n$ の場合も著しく、逆に(1, 3), (1, 4)型のように $m < n$ の場合には無視しうる程度である。

③純曲げが作用するときは、わずかであるが固有振動数が増加する場合もある。このときの振動波形は(2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3)型のように $m = n$ もしくは $m - n = \pm 1$ を満たす場合である。固有振動数が増加するという特性は、一様圧縮応力の基では見られないもので、純曲げを受ける平板($a^2/Rh = 0$)および円筒パネルに現れる固有の特性と思われる。

④曲率パラメータ a^2/Rh の固有振動数に与える影響は大きく、固定された振動波形(m, n)に対しては a^2/Rh が大きくなるにつれて固有振動数は減少する。これは、 a^2/Rh が大きくなるにつれ、面内変形が卓越するためであろう。

図-4に、純曲げが作用するときの円筒パネルの典型的な固有モードとして、固定、曲率パラメータ $a^2/Rh = 10$ および振動波形(m, n) = (2, 1)の場合の結果を示す。図は $y = a/2$ に於ける x 方向の w の分布を示したが、 $\sigma_\theta / \sigma_{cr}$ が増大するにつれて、圧縮力側では振幅が増大し、引張力側では振幅が減少している。

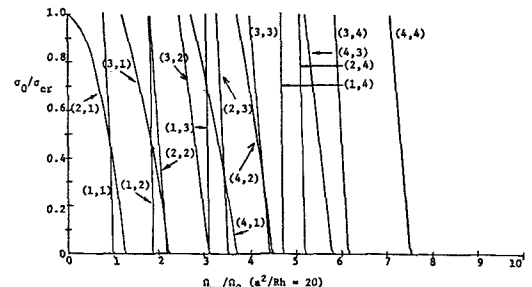
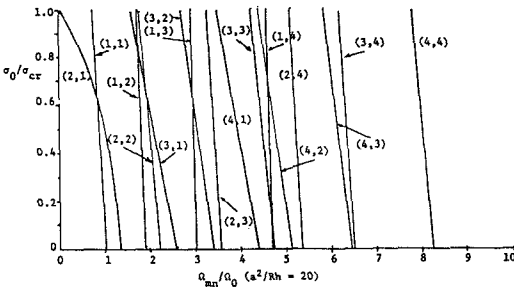
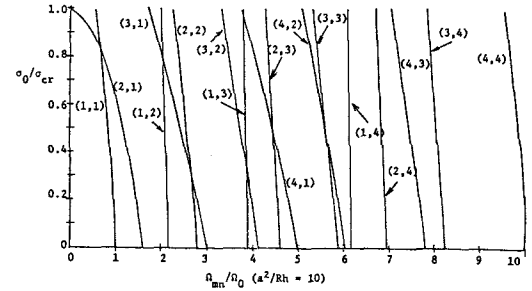
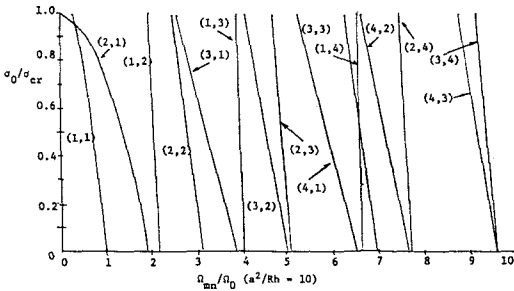
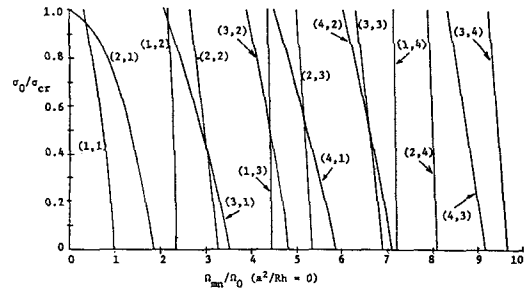
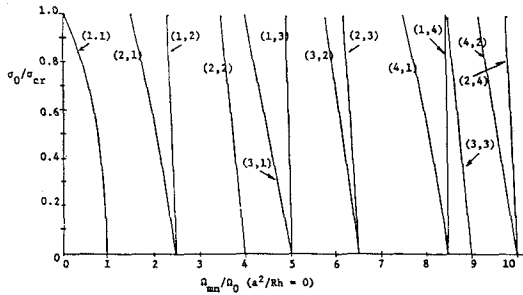


図-2-(a) 固有振動数に及ぼす初期応力の影響
単純支持, $\theta = 0$ (一様圧縮)

図-2-(b) 固有振動数に及ぼす初期応力の影響
固定, $\theta = 0$ (一様圧縮)

5. 結 論

本論文は、一様圧縮力あるいは純曲げの初期応力が作用する円筒パネル（縦横比=1）の自由振動問題を、選点法の適用により解析したものである。その結果、固有振動数特性として次のことが明らかとなった。

(1) 一般に固有振動数は、初期応力の増加とともに減少する。減少する程度は、振動波形（ $m=y$ 方向波数, $n=x$ 方向モード次数）に依存し、座屈波形に相当する（ m, n ）型および m が n よりも相当大きい振動波形で著しい。

(2) 純曲げが作用する場合には、わずかであるが振動数が増加する場合もある。このときの振動波形は $m=n$ および $m-n=\pm 1$ のときである。

(3) 曲率パラメータ a^2/Rh の振動数に与える影響は大きく、 a^2/Rh が大きくなるにつれて減少する。

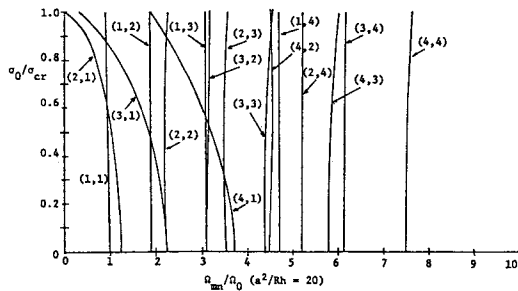
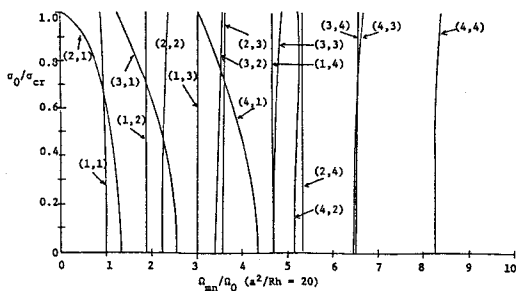
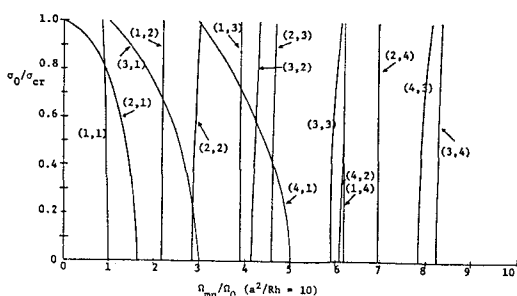
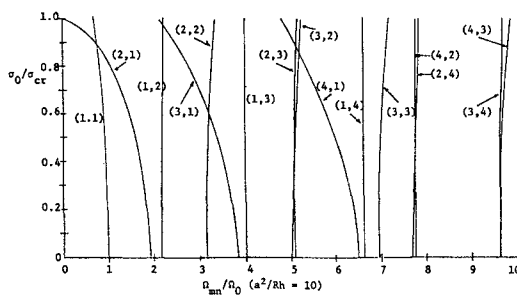
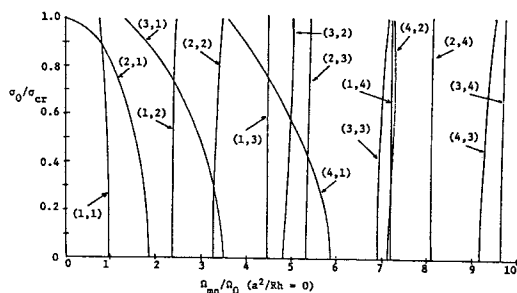
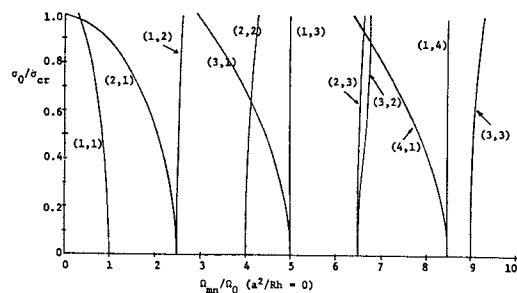


図-3-(a) 固有振動数に及ぼす初期応力の影響
単純支持, $\theta=2$ (純曲げ)

図-3-(b) 固有振動数に及ぼす初期応力の影響
固定, $\theta=2$ (純曲げ)

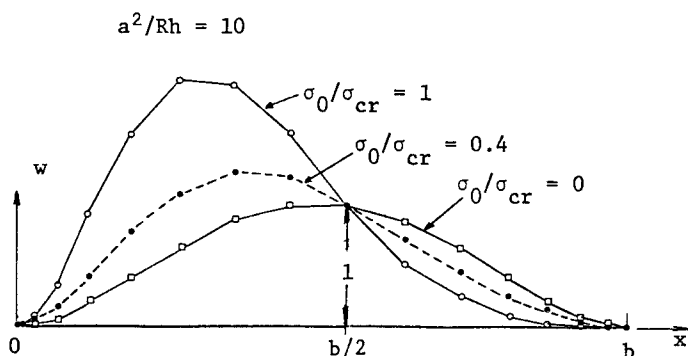


図-4 振動波形 $[(m, n)=(2, 1), \text{純曲げ}]$

付 録

マトリックス[C],[D],[E],[F]および[G]の非零要素は次のようなものである。

$$\begin{aligned} C(1, 1)=C(4, 4)=1, \quad C(1, 4)=\beta/12\gamma^2, \quad C(2, 2)=C(5, 5)=\nu_1, \quad C(2, 5)=\nu_1\beta/12\gamma^2, \\ C(3, 3)=\kappa\nu_1, \quad C(4, 1)=\beta/\gamma^2, \quad C(5, 2)=\nu_1\beta/\gamma^2 \end{aligned}$$

.....(A-1)

$$\begin{aligned} D(2, 1)=D(5, 4)=p\nu_2, \quad D(1, 2)=D(4, 5)=-p\nu_2, \quad D(1, 3)=-D(3, 1)=\nu\beta/\gamma, \\ D(3, 4)=\kappa\nu_1\gamma, \quad D(4, 3)=-12\kappa\nu_1\gamma \end{aligned}$$

.....(A-2)

$$\begin{aligned} E(1, 1)=-\nu_1p^2q, \quad E(1, 4)=\nu_1p^2\beta/12\gamma^2, \quad E(2, 2)=-q(p^2+\kappa\nu_1\beta^2/\gamma^2), \\ E(2, 3)=E(3, 2)=q(1+\kappa\nu_1)p\beta/\gamma, \quad E(2, 5)=p^2\beta/12\gamma^2+\kappa\nu_1q\beta, \\ E(3, 3)=-q(\beta^2/\gamma^2+\kappa\nu_1p^2), \quad E(3, 5)=-p\beta^2/12\gamma^3-\kappa\nu_1pq\gamma, \quad E(4, 1)=\nu_1p^2\beta/\gamma^2, \\ E(4, 4)=-\nu_1(p^2+12\kappa\gamma^2), \quad E(5, 2)=p^2\beta/\gamma^2+12\kappa\nu_1q\beta, \\ E(5, 3)=-p\beta^2/\gamma^3-12\kappa\nu_1pq\gamma, \quad E(5, 5)=-p^2-12\kappa\nu_1q\gamma^2 \end{aligned}$$

.....(A-3)

$$\begin{aligned} F(1, 1)=F(4, 4)=p^2\pi^2f(\xi)/12\gamma^2, \quad F(1, 4)=\beta F(1, 1)/12\gamma^2, \\ F(2, 2)=F(3, 3)=F(5, 5)=\pi^2(p^2+\beta^2/\gamma^2)f(\xi)/12\gamma^2, \\ F(2, 3)=F(3, 2)=-p\pi^2\beta f(\xi)/6\gamma^3, \quad F(2, 5)=\beta F(2, 2)/12\gamma^2, \quad F(3, 5)=\beta F(2, 3)/12\gamma^2, \\ F(4, 1)=\beta F(1, 1)/\gamma^2, \quad F(5, 2)=\beta F(2, 2)/\gamma^2, \quad F(5, 3)=12F(3, 5) \end{aligned}$$

.....(A-4)

$$\begin{aligned} G(1, 1)=G(2, 2)=G(3, 3)=G(4, 4)=G(5, 5)=1, \quad G(1, 4)=G(2, 5)=\beta/12\gamma^2, \\ G(4, 1)=G(5, 2)=\beta/\gamma^2 \end{aligned}$$

.....(A-5)

式(A-1)~(A-5)において, $\nu_1=(1-\nu)/2$, $\nu_2=(1+\nu)/2$, $p=m\pi\alpha$, $q=1+\beta^2/12\gamma^4$, $\alpha=b/a$, $\beta=b^2/Rh$, $\gamma=b/h$ および $f(\xi)=1-\theta\xi$ である。

参考文献

- 1) Roberts, T.M: Natural frequencies of thin-walled bars of open cross section, Proc. of ASCE, Vol. 113, No. 10, pp. 1584-1593, 1987.
- 2) Herrmann, G. and Armenakas, A.E.: Vibration and stability of plates under initial stress, Proc. of ASCE, Vol. 86, No. EM3, pp. 65-93, 1960.
- 3) Roufaeil, O.L. and Dawe, D.J.: Rayleigh-Ritz vibration analysis of rectangular Mindlin plates subjected to membrane stresses, J. Sound Vib., Vol. 85, pp. 263-275, 1982.
- 4) Tsui, Y.W.: Natural vibrations of cylindrical panels, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. EM6, pp. 1425-1445, 1968.
- 5) Cheung, Y.K. and Cheung, M.S.: Vibration analysis of cylindrical panels, J. Sound Vib., Vol. 22, pp. 59-73, 1972.
- 6) Peng-Cheng, S. and Jian-Guo, W.: Vibration analysis of flat shells by using B-spline functions, Comput. Struct., Vol. 25, pp. 1-10, 1987.
- 7) Mizusawa, T.: Application of spline strip method to analyse vibration of open cylindrical shells, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 26, pp. 663-676, 1988.
- 8) 三上 隆・芳村 仁: 選点法による回転殻の応力波伝播問題の解析, 土木学会論文集, 第374号/I-6, pp. 319-328, 1986.
三上 隆・芳村 仁: 液体に接する円筒殻の振動, 構造工学論文集, Vol. 34A, pp. 785-796, 1988.
- 9) 中井 博・松村駿一郎・吉川 紀・北田俊行・大南亮一: 曲線桁橋腹板の実績調査, 橋梁と基礎, Vol. 15, No. 4, pp. 38-43, 1981-5.
- 10) Magrab, E.B.: Vibrations of Elastic Structural Members, Sijhoff & Noordhoff, 1979.
- 11) Abdel-Sayed, G.: Curved webs under combined shear and normal stresses, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. ST3, pp. 511-525, 1973.
- 12) Bolotin, V.V.: Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, 1963.
- 13) Dawe, D.J. and Morris, I.R.: Vibration of curved plate assemblies subjected to membrane stresses, J. Sound Vib., Vol. 81, pp. 229-237, 1982.

(1988年10月16日受付)