

面内加振を受けるケーブルの面外分岐応答

Out-of-plane Response of Cables through Bifurcation under Inplane Forcing

高橋和雄*・白石隆俊**・麻生稔彦***・小西保則****

Kazuo TAKAHASHI, Takatoshi SHIRAISHI, Toshihiko ASO and Yasunori KONISHI

Out-of-plane response of a cable through bifurcation under in-plane sinusoidally time-varying load is analyzed. The nonlinear equations of motion of a cable in three dimensions are solved by a Galerkin method. Nonlinear in-plane responses and the corresponding out-of-plane vibrations are obtained for various sag-to-span ratios. The frequency range where out-of-plane response exists varies with the change of the sag-to-span ratio and its width is broad in the particular sag-to-span ratio. The unstable regions are wide when the mode of the out-of-plane vibration is similar to that of the in-plane vibration and are much affected by damping of the cable.

1. まえがき

ケーブルの力学的特徴は、変形性状に関して幾何学的非線形性を示すことである。このため、動的挙動は独特かつ複雑なものとなる。非線形振動問題では解の唯一性が成立しないために、周期的変動荷重が作用する場合の応答は複数個存在することが可能である。非線形振動の応答には、付随型の応答に加えて、分岐型の応答が含まれる。このうち、付随型の応答は、時間応答解析法¹⁾および調和バランス法^{2), 3)}によってかなり明確になっているが、特定の振動数領域でのみ存在する分岐型の応答は、まだ十分明確にされていない。初期条件の設定の困難さおよび計算時間の膨大などから、分岐型の応答は時間応答解析では得にくく、非線形振動論に基づく解法を用いる必要がある。

分岐型の代表例として、面内加振による面外振動の連成現象がある。この問題は、ケーブルの動力学的特徴の一つとしてよく知られている。これを非線形振動論より見れば、ケーブルの面内非線形応答による非線形項を介して生ずる面外非線形分岐応答、すなわち分岐型の応答とみなすことができる。あるいは、面外の非線形項を無視すれば、分岐点のみを求める面外係数励振振動問題(パラメーター励振、動的安定性)による不安定振動とみなすことができる。

面内加振を受けるケーブルの面外分岐応答に関する研究は、山口ら^{4), 5)}によって最初に調べられた。すなわち、文献4)において、ケーブルを面内・面外とも1自由度系と仮定した解析をしている。これにより、面外不安定領域は弦の場合と異なって、主不安定領域が存在することおよび安定を失った後に面内・面外の連成回転運動が存在することを明らかにしている。また振動実験⁵⁾によって、面外不安定領域はケーブルの

* 工博	長崎大学助教授	工学部土木工学科	〒852	長崎市文教町1-14
**	長崎大学大学院生	工学部土木工学科	〒852	長崎市文教町1-14
*** 工修	九州大学大学院生	工学部土木工学科	〒812	福岡市東区箱崎6-10
**** 工博	長崎大学教授	工学部土木工学科	〒852	長崎市文教町1-14

サグ比、および傾斜角の影響を受けることが明らかにしている。一方、著者らはケーブルを多自由度系として取扱って、ケーブルの面外不安定領域は単純共振が結合共振よりも広く重要であること、さらに面外と面内の固有振動形が似ているとき、面外振動の発生領域が広いことを指摘した^{6),7)}。しかし、数値計算量が膨大で、しかも応答曲線が非線形連成現象によって複雑となるために、パラメーター解析が不可能であった。また、面外の非線形項を無視しているために、分岐後の応答を明らかにするに至っていない。

以上のような観点から、著者らは、非線形振動論を用いてケーブルを面内・面外とも1自由度系近似として取り扱いを簡単にして、面外非線形分岐応答解析を行うものである。これによって、面外振動の分岐点と分岐後の応答がケーブルの各種パラメーターのもとに明らかにされる。ケーブルの面内非線形振動は振幅が大きくなると、サグ比によっては1自由度系で表現することは無理がある^{1),2)}。したがって、本論の各線形の固有振動に注目した研究では、分岐応答解析の精度が低下する場合があるので、本論文の取り扱いは定性的といえる。なお、著者らは先に減衰力のない場合の結果⁸⁾を発表しているが、減衰力を無視すると分岐領域が定まらないことが判明している。そこで、本研究では減衰力を考慮した解析を新たに行い、文献8)の結果とともに報告するものである。

2. 運動方程式

図-1に示すような完全可撓性、伸長性を仮定した周期的変動荷重を受けるケーブルの三次元非線形運動方程式は、次式で与えられる⁹⁾。

$$L_1(u, v, w) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ (C_0^2 \frac{1}{x_e'} + C_1^2 x_e'^2) \frac{\partial u}{\partial s_e} + C_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e}) \frac{\partial u}{\partial s_e} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} (x_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e}) - \frac{p_x \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (1)$$

$$L_2(u, v, w) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ (C_0^2 \frac{1}{x_e'} + C_1^2 x_e'^2) \frac{\partial v}{\partial s_e} + C_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e}) \frac{\partial v}{\partial s_e} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} (y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e}) - \frac{p_y \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (2)$$

$$L_3(u, v, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} (C_0^2 \frac{1}{x_e'} \frac{\partial w}{\partial s_e}) - C_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e}) \frac{\partial w}{\partial s_e} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \frac{\partial w}{\partial s_e} - \frac{p_z \cos \Omega t}{\rho_0} = 0 \quad (3)$$

ここに、 u, v : ケーブルの面内水平および鉛直変位、 w : ケーブルの面外変位、 t : 時間、 x_e, y_e : 初期形状、 s_e : ケーブルの初期形状に沿う曲線座標、 $C_0 = \sqrt{H_e / \rho_0}$: 横波伝播速度、 H_e : 初期水平張力、 ρ_0 : 単位長さ当たりの質量、 $C_1 = \sqrt{ES / \rho_0}$: 縦波伝播速度、 E : ヤング率、 S : 断面積、 p_x, p_y, p_z : 荷重強度、 Ω : 荷重の円振動数、 x_e' 、 y_e' : 初期形状の s_e による常微分。また、図-1において、 ℓ : 支点間水平距離、 f : ケーブルサグ、 θ : 支点間傾斜角。

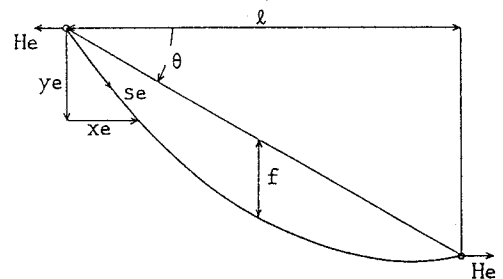


図-1 ケーブルの一般図

3. 解法

式(1)、(2)および(3)の解を直接求めることは不可能であるから、Galerkin法を用いて一般座標に関する多自由度系の運動方程式に変換する解法を採用する^{1),2)}。式(1)、(2)および(3)の解を次式のような変数分離形で仮定する。

$$u = \ell \sum P_i(t) U_i(s_e), \quad v = \ell \sum P_i(t) V_i(s_e), \quad w = \ell \sum Q_i(t) W_i(s_e) \quad (4)$$

ここに、 P_i, Q_i ：面内、面外の一般座標(時間関数)、

$$U_i(s_e) = \sum P_{xi}^m \sin \frac{m \pi s_e}{\ell^*} \quad : \quad \text{面内線形振動の第} i \text{次固有振動形、}$$

$$V_i(s_e) = \sum P_{yi}^m \sin \frac{m \pi s_e}{\ell^*} \quad : \quad \text{面内線形振動の第} i \text{次固有振動形、}$$

$$W_i(s_e) = \sum P_{zi}^m \sin \frac{m \pi s_e}{\ell^*} \quad : \quad \text{面外線形振動の第} i \text{次固有振動形、}$$

ℓ^* ：初期ケーブル長、 $P_{xi}^m, P_{yi}^m, P_{zi}^m$ ：線形振動の固有ベクトル。

式(4)を式(1),(2)および(3)に代入してGalerkin法を適用すると、 P_i および Q_i に関する次の連立非線形常微分方程式が得られる^{1),2)}。

$$m_n^i \ddot{P}_n + k_n^i P_n + k^2 \sum \sum k_{je}^{in} P_j P_e + \frac{1}{2} k^2 \sum \sum k_{qp}^{in} Q_q Q_p + \frac{1}{2} k^2 \sum \sum \sum k_{iem}^{in} P_j P_e P_m + \frac{1}{2} k^2 \sum \sum \sum k_{jqr}^{in} P_j Q_q Q_r = 8 \gamma^* f_n^i \cos \omega \tau \quad (5)$$

$$m_n^o \ddot{Q}_n + k_n^o Q_n + k^2 \sum \sum k_{pe}^{on} Q_p P_e + \frac{1}{2} k^2 \sum \sum \sum k_{pem}^{on} Q_p P_e P_m + \frac{1}{2} k^2 \sum \sum \sum k_{pqr}^{on} Q_p Q_q Q_r = 8 \gamma^* f_n^o \cos \omega \tau \quad (6)$$

ここに、 $n=1,2,\dots, k=c_1/c_0$ ：ケーブルの縦波一横波伝播速度比、 $\gamma^* = \rho_0 g \ell / 8 H_e$ ：ケーブルの初期形状を放物線で近似した場合のサグ比、 g ：重力加速度、 $m_n^i, k_n^i, k_{je}^{in}, k_{qp}^{in}, \dots, m_n^o, \dots, f_n^o$ ：Galerkin法による積分項²⁾、suffix i は面内を、suffix o は面外を表す。上式において、 P_i, Q_i はケーブルの支点間水平距離 ℓ で無次元化され、時間については対応する弦の1次固有円振動数 ω_1 の逆数で無次元化($\tau = \omega_1 t$)されている。また、 ω は Ω を ω_1 で無次元化した加振円振動数($\omega = \Omega / \omega_1$)である。

面内加振による面内振動に、どのような条件で面外振動が連成してくるかを調べるために、面内、面外の任意の自由度をそれぞれ1個(P, Q)採用し、面内加振のみを考慮して、各自由度に線形減衰力を付け加える。この場合に、式(5),(6)は次式のように変形される。

$$\ddot{P} + 2h_1 \sqrt{a_1} \dot{P} + a_1 P + b_1 P P + c_1 Q Q + d_1 P P P + e_1 P Q Q = p \cos \omega \tau \quad (7)$$

$$\ddot{Q} + 2h_0 \sqrt{a_2} \dot{Q} + a_2 Q + b_2 P Q + c_2 P P Q + d_2 Q Q Q = 0 \quad (8)$$

ここに、 $a_1, b_1, \dots, c_2, d_2$ ：式(5),(6)をそれぞれ m_1^i, m_1^o で割った係数、 h_1, h_0 ：面内および面外振動の減衰定数、 $p = 8 \gamma^* f_1^i / m_1^i$ 。

式(8)の右辺は零であるので、 $Q=0$ は式(8)の付随解である。この場合には、ケーブルには面外振動が生じない。 $Q=0$ の条件のもとに、式(7)から面内加振による面内付随応答が得られる。しかし、式(8)の係数に P が含まれるために、式(8)は微分方程式の係数項が加振される、いわゆる係数励振振動型の運動方程式となっている。このため、特定の振動数領域で面外振動が分岐することになる($Q \neq 0$)。これより、式(7),(8)の連成振動が生じる。

式(7)に減衰項が含まれること、および式(8)の分岐解には、加振振動数 $\omega = 2\omega_0$ (ω_0 ：面外無次元固有振動数)付近に生じる無次元周期 $2T (=4\pi/\omega_0)$ をもつ主不安定領域および $\omega = \omega_0$ 付近に生じる周期 T をもつ副不安定領域が重要であることから、式(7)および(8)の解を次のように仮定することができる。

$$P = \frac{c_0}{2} + c_1 \cos \omega \tau + s_1 \sin \omega \tau \quad (9)$$

$$Q = \frac{\bar{c}_0}{2} + \bar{c}_{1/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + \bar{s}_{1/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + \bar{c}_1 \cos \omega \tau + \bar{s}_1 \sin \omega \tau \quad (10)$$

ここに、 c_0, c_1, s_1 ：付随型の振幅成分、 $\bar{c}_0, \bar{c}_{1/2}, \bar{s}_{1/2}, \bar{c}_1, \bar{s}_1$ ：分岐型の振幅成分 ($\bar{c}_{1/2}, \bar{s}_{1/2}$ ：主不安定領域、 $\bar{c}_1, \bar{s}_1$ ：副不安定領域)。なお、文献4)の面内・面外連成振動解析では、上式において c_1 と $\bar{s}_1$ のみを採用した場合に相当する。

式(9)、(10)を式(7)、(8)に代入して、調和バランス法を適用することによって、8個の連立非線形代数方程式が得られる。これをNewton-Raphson法によって数値解析すれば、必要な解を得ることができる。

数値解析にあたっては、まず分岐成分($\bar{c}_0 \sim \bar{s}_1$)を零とおいて、付随成分(c_0, c_1, s_1)のみを求める。次いで、加振振動数 $\omega = 2\omega_0$ 付近で主不安定領域の分岐成分($\bar{c}_{1/2}, \bar{s}_{1/2}$)および $\omega = \omega_0$ 付近で副不安定領域の分岐成分($\bar{c}_1, \bar{s}_1$)に零以外の適当な初期値を代入して数値解析することにより、分岐成分と分岐後の付随成分(c_0, c_1, s_1)を求めることができる。 $\omega = 2\omega_0$ および ω_0 付近を除いては分岐解は存在しないので、このような処理で十分である。なお、不安定領域の解析にあたっては、静的応答($\omega = 0.0$ のとき)がスパン長の1/1000になるように荷重の強度を設定している。応答振幅の大小によって、非線形項の効き方および不安定領域の幅が異なるために、静的な場合と同じ振幅となるようにした。また、振幅の定義として、次のような合成振幅を用いる。すなわち、 $\sqrt{c_1^2 + s_1^2}$ (付随応答)、 $\sqrt{\bar{c}_{1/2}^2 + \bar{s}_{1/2}^2}$ (主不安定領域の分岐応答)、 $\sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{s}_1^2}$ (副不安定領域の分岐応答)。ただし、減衰力のないときは、 $c_1, \bar{c}_{1/2}, \bar{s}_{1/2}, \bar{c}_1, \bar{s}_1$ がそれぞれ単独に得られる。

4. 面外分岐応答の基本的性質

ケーブルの面外分岐応答は、面内・面外固有振動特性および面内の非線形振動特性によって定まる。振動中のケーブルの剛性は、振動中に生じる変動軸力のために、初期状態の剛性とは異なる。いま、ケーブルの振幅が小さいときには、面外の固有振動数は初期状態のそれと変化しないので、面外分岐応答は次の振動数の付近において生じる。

$\omega = 2\omega_0$ 。(主不安定領域)

$\omega = \omega_0$ 。(副不安定領域)

(11)

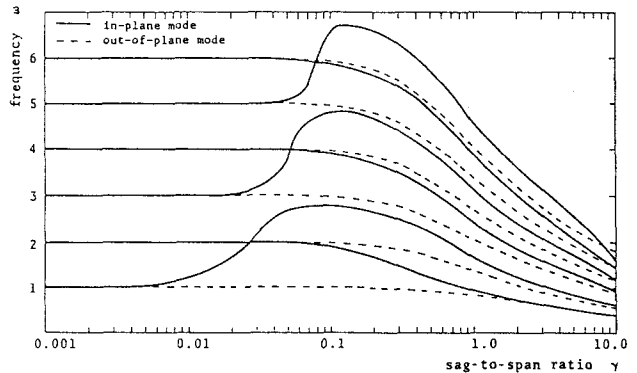


図-2 水平ケーブルの固有振動曲線($k=30, \theta=0^\circ$)

ケーブルの場合、面内・面外固有振動特性がサグ比 γ 、傾斜角 θ 、および伝播速度比 k によって著しく異なるために⁹⁾、ケーブルの面外分岐応答はこれらのパラメーターの影響を著しく受けることが予想される。

図-2は、水平ケーブル(伝播速度比 $k=30$)のサグ比 γ と無次元固有振動数 ω との関係である⁹⁾。図中の実線が面内の固有振動曲線を、破線が面外の固有振動曲線を示す。文献9)に示されているように、振動次数が奇数次の場合の面内対称振動については、特定のサグ比で一段階高次の固有振動に遷移する。これにともなって、固有振動曲線もサグ比の影響を著しく受ける。一方、面外振動および偶数次の面内逆対称振動は遷移現象が起こらず、固有振動曲線もサグ比の影響を強く受けない。面外の第1次振動に注目すると、面外の固有振動数 ω_0 は1.0付近なので、 $\omega = 2.0$ 付近で主不安定領域、 $\omega = 1.0$ 付近で副不安定領域の面外分岐応答が生じる。これに対して、面内付随応答の共振点 $\omega = \omega_1$ (ω_1 ：面内無次元固有振動数)はサグ比の変化によって1.0～3.0の範囲で生じる。これより、 $\omega_1 = 2.0$ 付近のサグ比をもつケーブルでは、面内付随応答の共振点近傍で主不安定領域の面外分岐応答が生じる。また、面外3次振動 ω_0 は3.0付近に生じるので、 $\omega = 6.0, 3.0$ 付近で主および副不安定領域が生じる。したがって、面内付随応答の共振点が $\omega = 3.0$ 付近となるサグ比では、面内付随応答の共振点近傍で、面外3次振動の副不安定領域の分岐応答が得られることになる。

ケーブルの面外分岐応答の係数項の大きさは、式(8)の左辺4,5項に示すように、面内応答によって定められる。面内振動の共振点近傍では面内付随応答の振幅が大きいため、面外の運動方程式に含まれる係数項も大きくなる。したがって、面外分岐応答は、これらの面内付随応答の共振点近傍で優勢となることが予想される。しかも、ケーブルの面内非線形応答は、サグ比によって著しく異なる^{1), 2)}ので、面外分岐応答は面内非線形応答特性(非線形項の大きさ、および硬化・軟化バネ特性)および共振点近傍で効いてくる面内振動の減衰力の影響を受けることになる。

面内と面外の固有振動特性とともに、面内から面外への励振する力の大きさは、式(8)の係数 b_2, c_2 の大きさにも依存する。面内、面外とも1次振動について、Pの線形項($b_2 PQ$)の係数 b_2 の大きさとサグ比との関係を求めると、図-3のとおりである。 b_2 の大きさはサグ比 γ によって変化する。すなわち、 $\gamma < 1/8$ の扁平ケーブルでは、弦に近い場合($\gamma=0.001$)よりも大きく、 $\gamma=0.03$ 付近で最大となる。このようなサグ比では、係数励振力が大きくなるので、広い不安定領域をもつことが予想される。

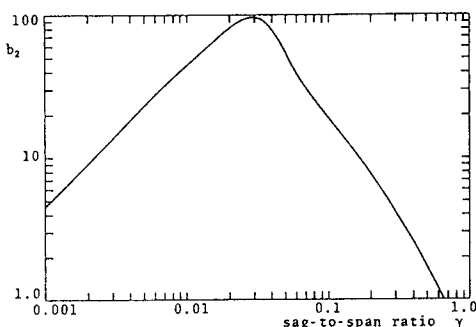


図-3 係数励振項の係数 b_2 とサグ比との関係 ($k=30, \theta=0^\circ$)

5. 数値結果

(1) 減衰力を無視した場合

4. で述べた考察をもとに、水平ケーブルの面内・面外とも1次振動についてケーブルの面内付随応答と面外分岐応答を明らかにする。まず、面内固有振動 $\omega_i=2.0$ と面外固有振動 $\omega_o=2.0$ が一致する $\gamma=0.026$ 付近のサグ比をもつケーブルに注目する。すなわち、 $2\omega_o > \omega_i$ である $\gamma=0.014$, $2\omega_o = \omega_i$ である $\gamma=0.026$ および $2\omega_o < \omega_i$ である $\gamma=0.04$ をもつ3種類のケーブルを対象とする。対称1次振動のみを加振したときのケーブル中央点の面内付随応答および面外分岐応答および分岐後の面内応答は図-4, 5, 6に示すとおりである。前述のように、各サグ比の静的応答($\omega=0.0$ のときの振幅)がスパンの1/1000になるように荷重強度を設定してある。図中の肉太の実線、破線で示されている応答曲線が付随型の面内対称振動の主調和応答(c_1)である。実線が外力と同位相の応答を、また破線が逆位相の応答をそれぞれ示すものである。これに対して、 $\omega=2.0, 1.0$ 付近で主および副不安定領域の面外分岐応答($\bar{c}_{1/2}, \bar{s}_{1/2}$), ($\bar{c}_1, \bar{s}_1$)が生じている。なお、 $\omega=1.0$ 付近の副不安定領域は狭いため、一本の曲線でプロットしてある。分岐が生じると、ケーブルには面内、面外連成振動が生じる。これらの図より明かなように、主不安定領域の面外分岐応答はサグ比によって、逆位相もしくは同位相の面内付随応答から分岐する。特に、図-5の $2\omega_o$ が ω_i に接近する $\gamma=$

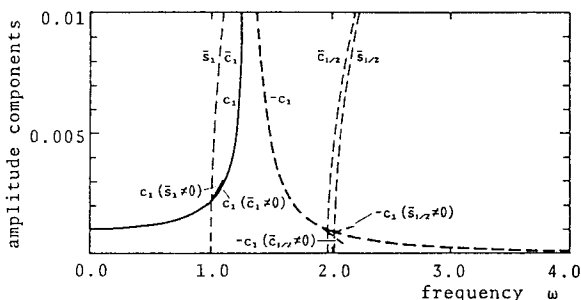


図-4 $\gamma=0.014$ の水平ケーブルの分岐応答(1st, 1st)

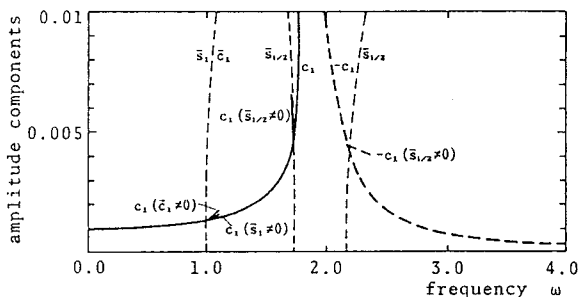


図-5 $\gamma=0.026$ の水平ケーブルの分岐応答(1st, 1st)

0.026のケーブルでは、 $\bar{s}_{1/2}$ の分岐点が同位相と逆位相の面内付随応答曲線上から別個に存在する。 $\gamma=0.026$ 付近のサグ比をもつケーブルの応答は弱い軟化バネ特性を示すので、同位相の応答曲線は鉛直接線をもつ。鉛直接線の位置から振幅のジャンプ現象が生じ、別の安定な振幅に移っていく¹⁰⁾。この鉛直接線より上側の不安定な応答曲線から得られる分岐応答は存在しない。したがって、面内付随応答の振幅の安定性を考慮して、面外分岐応答解析を行わなければならない。共振点をはさんで分岐応答が生じる場合には、 $\bar{s}_{1/2}$ と $\bar{c}_{1/2}$ で囲まれる面外分岐応答は、存在しない場合もある。

式(7)のように、ケーブルの面内非線形項には、2次と3次の非線形項が同時に含まれる。これらのうち、軟化バネ特性を示す2次の非線形項は振幅が小さい領域で効き、3次の非線形項は振幅が大きい領域で効いてくる。したがって、図-4,5のケーブルでは、振幅が0.01より大きくなると、硬化バネ特性を示し、逆位相の応答も鉛直接線をもつ。しかし、本理論の適用範囲を越えるので、ここでは議論の対象から除いてある。

以上のような考察をもとに、面外分岐応答によって囲まれる面外不安定領域を以下に明らかにする。静的応答がスパンの1/1000となるような荷重強度のもとに生じる水平ケーブルの面外第1次振動の主および副不安定領域とサグ比の関係を示せば、図-7,8,9に示すとおりである。

主不安定領域の面外不安定領域は、前述の共振点近傍の面内付随応答、およびその応答の安定性の影響を受けるので、図-7の加振振動数を上昇させた場合(ω が増大)と図-8の減少させた場合(ω が減少)に分けて示してある。図中の記号④は、応答曲線上の鉛直接線を持つ点と、面外分岐点と一致するサグ比とそのときの振動数を示す。これより小さいサグ比に対しては不安定領域は存在しない。これらの図から明かなように、ケーブルの不安定領域は、サグ比が小さく弦に近い場合に狭い。しかし、ケーブルでは特定のサグ比の領域で不安定領域が広がる。水平ケーブルの面外1次振動の不安定領域では、面内の共振点 $\omega_1=2.0$ 付近に生じる主不安定領域が、 $\omega_1=1.0$ 付近に生じる副不安定領域よりもその幅が広い。

図-6に示した $\gamma=0.04$ をもつケーブル中央点の副((a),(b)の点)および主不安定領域((c),(d)の点)の境界線の分岐後の面内、面外連成振動のリサージュ図を図-10に示す。面内と面外振動の位相によって、ケーブルの面内、面外振動の空間波形は異なる。

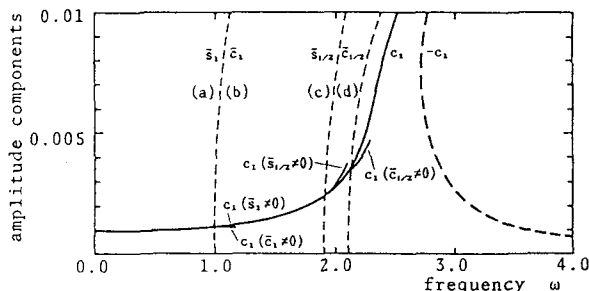


図-6 $\gamma=0.04$ の水平ケーブルの分岐応答(1st,1st)

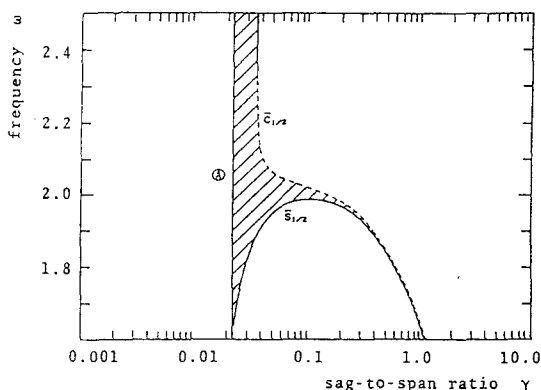


図-7 水平ケーブルの主不安定領域
(1st,1st, $\theta=0^\circ$, 加振振動数上昇時)

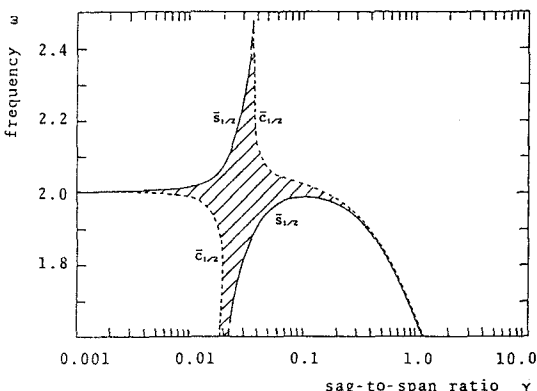


図-8 水平ケーブルの主不安定領域
(1st,1st, $\theta=0^\circ$, 加振振動数減少時)

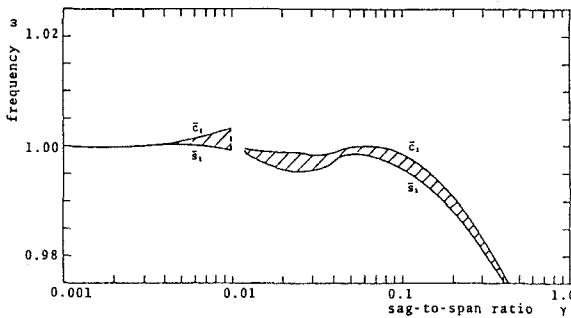


図-9 水平ケーブルの副不安定領域(1st,1st, $\theta=0^\circ$)

(a)の回転運動は、文献4)の解析において現われる解である。

図-11は、傾斜ケーブル($\theta=30^\circ$)の面内・面外とも第1次振動の加振振動数減少時の主不安定領域である。この固有振動の組合せでは、主不安定領域が副不安定領域より広い。図中の鉛直接線の意味は、鉛直接線によって面外分岐応答が存在しなくなる限界を示す。傾斜ケーブルでは、水平ケーブルと固有振動特性³⁾および非線形振動特性²⁾が異なるために、不安定領域の現われ方に相違がある。不安定領域の幅は、水平ケーブル(図-7)よりも狭い結果となっている。

(2)減衰力を考慮した場合

面内付随応答および面外分岐応答に及ぼす減衰力の効果を把握するために、代表的なサグ比をもつケーブルについて考察する。図-12および13は、水平ケーブル(伝播速度比 $k=30$)のサグ比 $\gamma=0.026, 0.04$ に対する面内対称1次振動の付随応答および面外対称1次振動の主不安定領域の分岐応答である。減衰定数 h_1, h_0 の大きさは、実際のケーブルの値ではなく、減衰力の効果が振幅比 $A=0.01$ 以下で効くように調節している。なお、 $\omega=1.0$ 付近に生じる分岐領域の狭い副不安定領域は、減衰力が存在すると安定化するために、議論の対象から除いている。図中において、 $c_1, -c_1$ の2本の実線、破線からなる応答曲線が非減衰系の面内付随応答を、また、 $A=\sqrt{c_1^2+s_1^2}$ が減衰系の面内応答を示す。図のように、減衰力を無視した場合に定まらなかった面内付随応答の共振振幅が有限の大きさとなっている。また、面内付随応答は、共振点近傍で減衰力

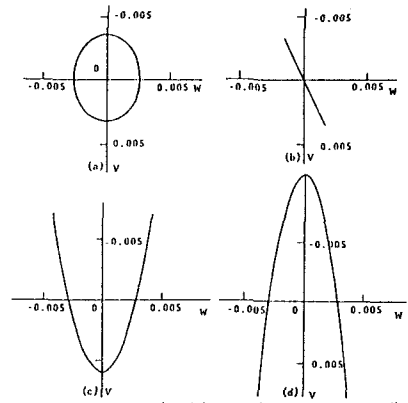


図-10 $\gamma=0.04$ の水平ケーブルのリサージュ図

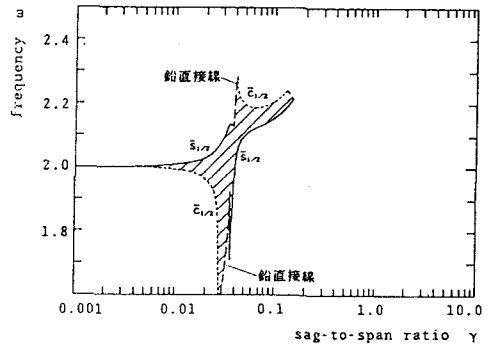


図-11 傾斜ケーブルの主不安定領域

(1st,1st, $\theta=30^\circ$, 加振振動数上昇時)

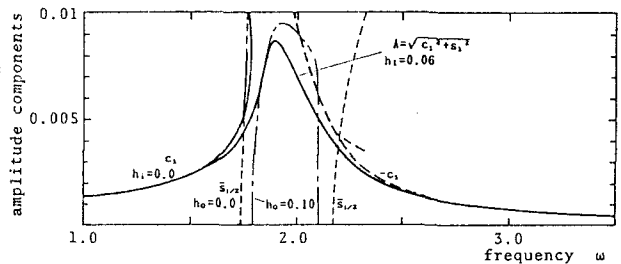


図-12 $\gamma=0.026$ の水平ケーブルの分岐応答(1st,1st)

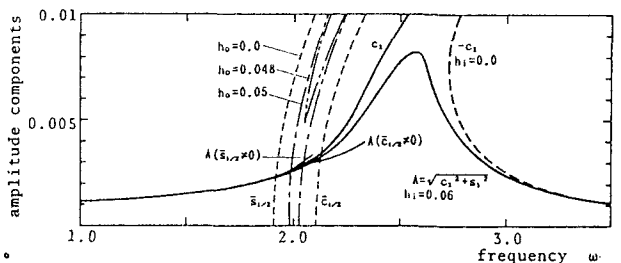


図-13 $\gamma=0.04$ の水平ケーブルの分岐応答(1st,1st)

の影響を著しく受ける。一方、 $\omega=2.0$ 付近の $\bar{c}_{1/2}$ 、 $\bar{s}_{1/2}$ の記号をもつ破線で表された曲線は、面外振動の主不安定領域の分岐応答である。図-12の $\bar{s}_{1/2}$ で求められる2本の分岐応答曲線は、減衰力が存在すると、上側が閉じて1本の曲線となる。つまり、このタイプの面外分岐応答については、減衰力が振幅の大きい領域で効く。したがって、振幅が小さい分岐点近傍の挙動には減衰力の影響が効かないことが予想される。これに対して、図-13の $\omega=2.0$ 付近の $\bar{s}_{1/2}$ 、 $\bar{c}_{1/2}$ で囲まれた主不安定領域は、減衰力の増大とともに、その幅が狭くなり、分岐応答曲線の下側が閉じる。このタイプの分岐応答は、減衰力の影響を著しく受けることが予想される。

図-14は、水平ケーブル($\gamma=0.1$)の面内対称1次振動の付随応答と面外3次振動の組合せで得られる広い方の副不安定領域の面外分岐応答である。本ケースは、水平ケーブルのうち、最も非線形性が強い場合である²⁾。減衰力が存在すると、面内付随応答は、C、Dで表される2つの鉛直接線をもつ。この2つの鉛直接線で囲まれた領域の振幅は不安定で、実現し得ない¹⁰⁾。したがって、この鉛直接線によって囲まれた面内付随応答より分岐する面外分岐応答は存在しない。また、減衰力がない場合には、 $\omega=3.2$ 付近の同位相の面内付随応答から生じる面外分岐応答($\bar{s}_1$)は、同位相の面外応答の上限が定まらないので、これより高い振動数領域側で不安定で、その上限は定まらないことになる。しかし、減衰力を考慮すると、面内応答が有限な大きさととなる。つまり、その上限が振幅が同位相から逆位相へジャンプするC点で抑えられるために、上限が定まり、不安定領域は有限な領域となる。

面外分岐応答の生ずる不安定領域を検討するために、面外振動の減衰力を無視して、面内の共振点近傍の応答に影響を及ぼす面内の減衰力のみを考慮した解析を行う。水平ケーブル($k=30$)の面内1次、面外3次振動の副不安定領域とサグ比 γ との関係を示せば、図-15,16に示すとおりである。図-15が加振振動数を上昇させた場合に、図-16が減少させた場合に対応する。上述の考察から明らかなように、図-15において減衰力を無視した場合、不安定領域の上限は定まらないが、減衰力を考慮した場合、有限な領域となる。図-16の加振振動数を減少させた場合には、減衰力の影響は小さい。文献2)に示したように、ケーブルの非線形項は、サグ比 $\gamma=0.1$ 付近をもつ水平ケーブル($k=30$ の場合)で最も大きい。面外不安定領域は面内の応答曲線の

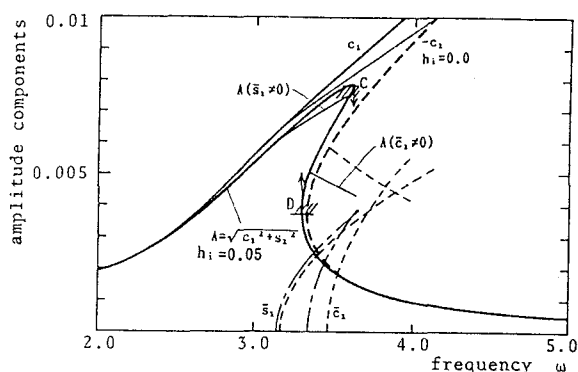


図-14 $\gamma=0.10$ の水平ケーブルの分岐応答(1st,3rd)

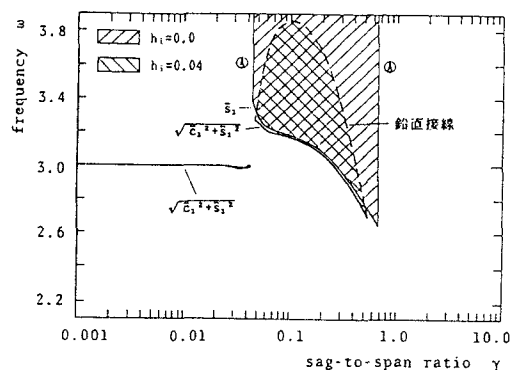


図-15 水平ケーブルの副不安定領域

(1st,3rd, $\theta=0^\circ$, 加振振動数上昇時)

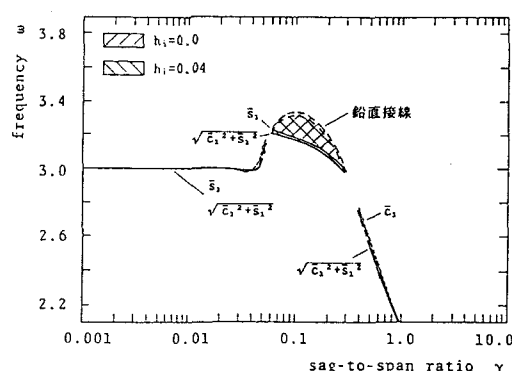


図-16 水平ケーブルの副不安定領域

(1st,3rd, $\theta=0^\circ$, 加振振動数減少時)

傾きが大きいほど広いので、ケーブルに現れる面外不安定領域は、この $\gamma=0.1$ 付近のサグ比をもつケーブルにおいて最も広いことが予想される。本論で取り扱った範囲では、不安定領域は式(11)に示したような $\omega=2\omega_0$ 付近の主不安定領域および $\omega=\omega_0$ 付近の副不安定領域の2種類のみを対象としている。これらのうち、どちらが広いかは、面内と面外の自由度の組合せによって異なる。4. の面外分岐応答の基本的性質で述べたように、面内応答の共振点近傍で、面外不安定領域が存在するとき、その不安定領域が広い。水平ケーブルの面外1次振動の不安定領域では $\omega=2\omega_0=2.0$ 付近、面外3次振動の不安定領域では $\omega=\omega_0=3.0$ 付近で広くなる。

6. まとめ

本研究は、面内加振を受けるケーブルの面外分岐応答解析を行い、ケーブルの面外分岐応答特性をサグ比をパラメーターとして明らかにするとともに、これらに及ぼす減衰力の影響を検討したものである。得られた結果をまとめると、

(1) ケーブルの面外分岐領域は、サグ比および支点間傾斜角に依存し、特定のサグ比でその幅が広くなる。

また、面外不安定領域は面内付随応答の非線形振動特性の影響を受ける。

(2) 面内の減衰力を考慮すると、面内の共振点の振幅が定まるために、減衰力を無視したときに定まらなかった面外不安定領域の上限が確定する。また、面外の減衰力は、不安定領域を狭くする効果をもつ。

以上によって、1自由度近似の定性的なアプローチであるが、面内加振のもとに生じるケーブルの面内・面外連成振動の発生領域を、ケーブルの特性パラメーターであるサグ比と傾斜角のもとに示すことができた。最後に、本研究の数値解析にあたっては、長崎大学情報処理センターの電子計算機 FACOM M-180 II ADを使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 山口・宮田・伊藤：正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析，土木学会論文報告集，第308号，pp.37-45，1981.
- 2) 高橋・藤本・村中・田川：調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析，土木学会論文報告集，第338号，pp.59-68，1983.
- 3) Takahashi, K. and Konishi, Y.: Non-linear Vibrations of Cables in Three Dimensions, Part I: Nonlinear Free Vibrations, Journal of Sound and Vibration, Vol.118, No.1, pp.69-84, 1987.
- 4) 山口・宮田・伊藤：ケーブル系の非線形動的応答における一挙動，第24回構造工学シンポジウム論文集，pp.55-61，1978.
- 5) 山口・清水・伊藤：ケーブルの非線形動的応答に関する実験的研究，土木学会第36回年次学術講演会講演概要集，第1部，pp.371-372，1981.
- 6) 高橋・田川・佐藤：ケーブルの面外不安定振動，土木学会論文集，第350号/I-2，pp.355-358，1984.
- 7) Takahashi, K. and Konishi, Y.: Non-linear Vibrations of Cables in Three Dimensions, Part II: Out-of-plane Vibrations under In-plane Sinusoidally Time-varying Load, Journal of Sound and Vibration, Vol.118, No.1, pp.85-97, 1987.
- 8) 高橋・麻生・小坪・小西：ケーブルの面外分岐応答解析，構造工学における数値解析シンポジウム論文集，第10巻，pp.425-430，1985.
- 9) 山口・伊藤：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文集，第286号，pp.29-36，1979.
- 10) 片山・宮田・国井：構造物の振動解析，技報堂出版，1979.

(1988年10月12日受理)