

Nigam-Jennings法の 非線形動的応答解析への拡張

NIGAM-JENNINGS' METHOD EXTENDED TO NON-LINEAR DYNAMIC ANALYSIS

松井邦人* 松島 学** 本田満彦*** 井出周治***

By Kunihiro MATSUI, Manabu MATSUSHIMA, Mitsuhiko HONDA and Shuji IDE

Accurate and efficient algorithm for non-linear dynamic analysis is developed based on Nigam-Jennings' method. The algorithm is derived from Duhamel integration and gives a relationship between displacement and velocity at time $t_n + \Delta t$ and those at time t_n . Hence there is no problem of concern on convergence, stability and accuracy on contrary to other direct integration schemes.

1. はじめに

動的応答解析に関する重要な問題の一つは、効率的でかつ精度良い計算手法を開発することである。従来、直接積分法として、中央差分、Houbolt法、Wilson θ 法、Newmark β 法等が用いられてきた。これらの手法の問題点は、アルゴリズムの収束性、安定性と精度である。しかし Duhamel 積分を用いると、このような問題を生じない。弾性応答解析を行うための効率的で信頼できる手法として、Duhamel 積分を漸化式に置き換える方法が開発されている。例えば、NigamとJennings¹⁾は時刻 $t_n + \Delta t$ における変位と速度と、 t_n における変位と速度の関係を誘導している。安藤²⁾、DempseyとIrvine³⁾及びBeckとDowling⁴⁾は時刻 $t_n + \Delta t$ 、 $t_n - \Delta t$ において変位の関係式を誘導している。また、BeckとDowlingは文献4)の結論で、彼等の式はFFTのアルゴリズムより計算回数が少ない点で効果的であると述べている。

非線形応答解析では、水田と平井^{5), 6)}は付加質量、付加外力というかたちで非線形問題を処理し、あたかも弾性モデルを解くのと同様に、非線形問題を解く方法を誘導している。しかし線形弾性問題として解くため、右辺に加えられる付加質量あるいは付加外力の項に、時間刻み Δt だけの遅れが生じている。Cheng⁷⁾は負勾配を持つBilinearモデルについて中央差分法、Houbolt法及び Newmark β 法の収束性と安定

* Ph.D. 東京電機大学教授 理工学部建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

** 工修 東電設計株式会社 技術開発本部耐震技術部 (〒100 千代田区内幸町1-3-1)

*** 東京電機大学大学院 理工学研究科建設工学専攻 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

性について述べている。

本研究では非線形問題を区分的に線形なモデルとして捉え、Nigam-Jennings法を適用している。本方法は線形区分の数が多くなりすぎると必ずしも適切であるとはいえないが、比較的簡単なモデルには非常に有効な方法である。

ここでは1自由度系が Bilinear モデルで表せるものと考え、塑性剛性が(1)正の場合、(2)ゼロの場合、(3)負の場合について解析解を示し、地震波 (El Centro 1940 NS) を入力したときの復元力を示すことにより、解析法の正しさを検証している。

2. 1自由度系弾塑性モデル

1自由度系非線形モデルとして、図-1,a,b,cに示すような塑性剛性が正、ゼロ、負の3ケースの Bilinear モデルを考えることにする。多くの弾塑性モデルは区分的に直線で表されているのでそれ等の3種類のモデルの解法を求めることにより、十分に対応できる。

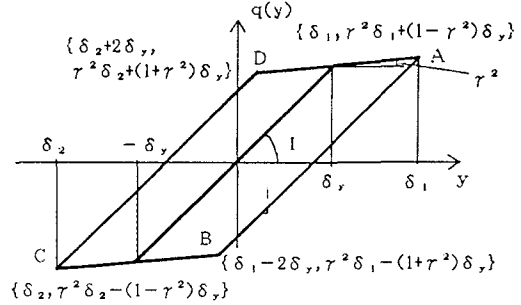


図-1,a 硬化型モデル

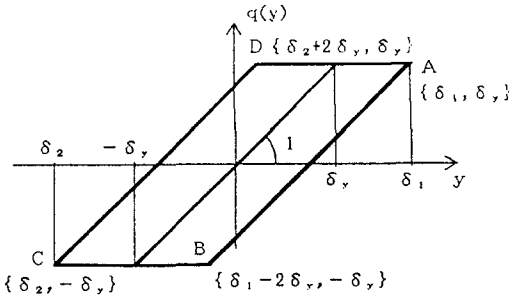


図-1,b 理想型モデル

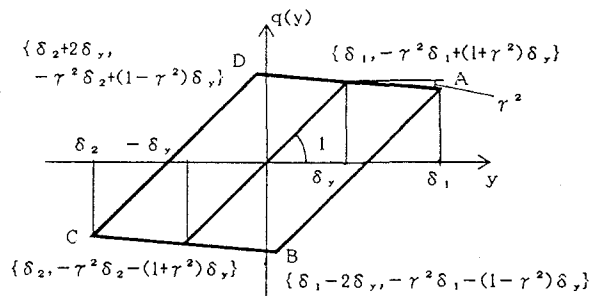


図-1,c 劣化型モデル

これ等の1自由度系モデルは一般に

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 q(y) = -\ddot{y}_g(t) \quad (1)$$

と書くことができる。hは系の減衰定数、 ω は初期剛性時の系の円振動数、 δ_y は降伏変位及び、 δ_1, δ_2 はそれぞれ正と負の最大変位である。また $q(y)$ は非線形項であり、図-1,a,b,cの復元力特性により異なる。それぞれのモデルに対する運動方程式と一般解を以下に示す。

3. 塑性硬化モデル

図-1,aの様なモデルの復元力特性を考慮すると運動方程式は次のように表される。

A-B上では

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_g(t) + \omega^2(1-\tau^2)(\delta_1 - \delta_y) \quad , \quad \dot{y} \leq 0 \quad (2a)$$

C-D上では

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_g(t) + \omega^2(1-\tau^2)(\delta_2 + \delta_y) \quad , \quad \dot{y} \geq 0 \quad (2b)$$

B-C上では

$$\ddot{y} + 2h\omega \dot{y} + \gamma^2 \omega^2 y = -\ddot{y}_0(t) + \omega^2(1 - \gamma^2) \delta_y, \quad \dot{y} \leq 0 \quad (2c)$$

D-A上では

$$\ddot{y} + 2h\omega \dot{y} + \gamma^2 \omega^2 y = -\ddot{y}_0(t) - \omega^2(1 - \gamma^2) \delta_y, \quad \dot{y} \geq 0 \quad (2d)$$

式(2a)～(2d)の式は一般に表示すると

$$\ddot{y} + 2h\omega \dot{y} + \beta^2 \omega^2 y = f_1(t) \quad (3)$$

となる。但し式(2a,b)では $\beta^2=1$ 、式(2c,d)では $\beta^2=\gamma^2$ である。今初期条件として一般的に

$$y(t_n) = y_n, \quad \dot{y}(t_n) = \dot{y}_n \quad (4)$$

と表すことにする。式(3)を式(4)の条件で解くと

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega'(t-t_n)} \{ \omega' \cos \omega'(t-t_n) + h\omega \sin \omega'(t-t_n) \} \dot{y}_n + \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega'(t-t_n)} \sin \omega'(t-t_n) y_n \\ & + \frac{1}{\omega'} \int_{t_n}^t f_1(\tau') e^{-h\omega'(t-\tau')} \sin \omega'(t-\tau') d\tau' \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)を t で微分し整理すると

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & - \left(\frac{h^2 \omega^2}{\omega'} + \omega' \right) e^{-h\omega'(t-t_n)} \sin \omega'(t-t_n) \dot{y}_n \\ & + e^{-h\omega'(t-t_n)} \left\{ - \frac{h\omega}{\omega'} \sin \omega'(t-t_n) + \cos \omega'(t-t_n) \right\} y_n \\ & + \frac{1}{\omega'} \int_{t_n}^t f_1(\tau') e^{-h\omega'(t-\tau')} \{ -h\omega' \sin \omega'(t-t_n) + \omega' \cos \omega'(t-\tau') \} d\tau' \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{但し } \omega' = \omega \sqrt{\beta^2 - h^2}$$

式(5),(6)において、 $t=t_{n+1}=t_n+\Delta t$ と置き整理すると

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ \dot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$a_{11} = \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega\Delta t} (\omega' \cos \omega' \Delta t + h\omega \sin \omega' \Delta t) \quad (8a)$$

$$a_{12} = \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega\Delta t} \sin \omega' \Delta t \quad (8b)$$

$$a_{21} = - \left(\frac{h^2 \omega^2}{\omega'} + \omega' \right) e^{-h\omega\Delta t} \sin \omega' \Delta t \quad (8c)$$

$$a_{22} = e^{-h\omega\Delta t} \left(- \frac{h\omega}{\omega'} \sin \omega' \Delta t + \cos \omega' \Delta t \right) \quad (8d)$$

$$b_1 = \frac{1}{\omega'} \int_0^{\Delta t} f_1(t_n + \tau) e^{-h\omega'(\Delta t - \tau)} \sin \omega'(\Delta t - \tau) d\tau \quad (9a)$$

$$b_2 = \frac{1}{\omega'} \int_0^{\Delta t} f_1(t_n + \tau) e^{-h\omega'(\Delta t - \tau)} \{-h\omega' \sin \omega'(\Delta t - \tau) + \omega' \cos \omega'(\Delta t - \tau)\} d\tau \quad (9b)$$

式(9a,b)において Δt が十分小さい場合、台形積分を用いても十分に良い精度が得られる。 $f_1(t_n + \tau)$ が定数、線形関数、sine関数あるいはcosine関数であれば厳密に積分可能である。しばしば地震波は折れ線で表される。今、 $\ddot{y}_0(t_n + \tau)$ を図-2に示すような線形の関数

$$\ddot{y}_0(t_n + \tau) = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) \ddot{y}_{0n} + \frac{\tau}{\Delta t} \ddot{y}_{0n+1} \quad (10)$$

で表されるものとする。但し、 $\ddot{y}_{0n} = \ddot{y}_0(t_n)$ 、 $\ddot{y}_{0n+1} = \ddot{y}_0(t_n + \Delta t)$ 。式(2a)~(2d)において $\ddot{y}_0(t)$ を式(10)で表せるとすると式(9a,b)より b_1, b_2 は次の様に求まる。

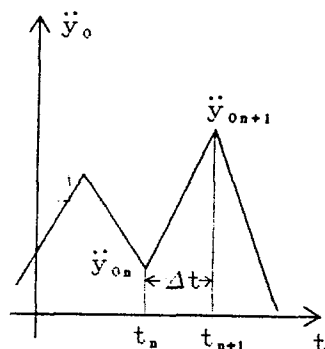


図-2 折れ線で表された入力加速度

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_{0n} \\ \ddot{y}_{0n+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

係数 $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ は、図-1aの復元力特性でA-B, C-D上では $\omega' = \omega \sqrt{1-h^2}$ 、B-C, D-A上では $\omega' = \omega \sqrt{\gamma^2 - h^2}$ 、として次の様になる。

$$c_{11} = -\frac{1}{\omega'} e^{-h\omega'\Delta t} \left\{ \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_4}{\Delta t}\right) \sin \omega'\Delta t - \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{\Delta t}\right) \cos \omega'\Delta t \right\} \quad (12a)$$

$$c_{12} = -\frac{1}{\omega'\Delta t} e^{-h\omega'\Delta t} (\lambda_4 \sin \omega'\Delta t - \lambda_2 \cos \omega'\Delta t) \quad (12b)$$

$$c_{21} = \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega'\Delta t} \left\{ \left(\lambda_3 - \frac{\lambda_4}{\Delta t}\right) (h\omega' \sin \omega'\Delta t - \omega' \cos \omega'\Delta t) - \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{\Delta t}\right) (h\omega' \cos \omega'\Delta t + \omega' \sin \omega'\Delta t) \right\} \quad (12c)$$

$$c_{22} = \frac{1}{\omega'\Delta t} e^{-h\omega'\Delta t} \left\{ \lambda_4 (h\omega' \sin \omega'\Delta t - \omega' \cos \omega'\Delta t) - \lambda_2 (h\omega' \cos \omega'\Delta t + \omega' \sin \omega'\Delta t) \right\} \quad (12d)$$

但し

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^{\Delta t} e^{h\omega'\tau} \sin \omega'\tau d\tau \\ &= \frac{1}{h^2 \omega'^2 + \omega'^2} \{ e^{h\omega'\Delta t} (h\omega' \sin \omega'\Delta t - \omega' \cos \omega'\Delta t) + \omega' \} \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \int_0^{\Delta t} \tau e^{h\omega\Delta t} \sin\omega'\tau d\tau \\
&= \frac{\Delta t}{h^2\omega^2+\omega'^2} e^{h\omega\Delta t} (h\omega\sin\omega'\Delta t - \omega'\cos\omega'\Delta t) \\
&\quad - \frac{1}{(h^2\omega^2+\omega'^2)^2} [e^{h\omega\Delta t} \{ (h^2\omega^2 - \omega'^2) \sin\omega'\Delta t - 2h\omega\omega'\cos\omega'\Delta t \} + 2h\omega\omega'] \quad (13b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \int_0^{\Delta t} \tau e^{h\omega\Delta t} \cos\omega'\tau d\tau \\
&= \frac{1}{h^2\omega^2+\omega'^2} \{ e^{h\omega\Delta t} (h\omega\sin\omega'\Delta t - \omega'\cos\omega'\Delta t) + \omega' \} \quad (13c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= \int_0^{\Delta t} \tau e^{h\omega\Delta t} \cos\omega'\tau d\tau \\
&= \frac{\Delta t}{h^2\omega^2+\omega'^2} e^{h\omega\Delta t} (h\omega\cos\omega'\Delta t + \omega'\sin\omega'\Delta t) \\
&\quad - \frac{1}{(h^2\omega^2+\omega'^2)^2} [e^{h\omega\Delta t} \{ (h^2\omega^2 - \omega'^2) \cos\omega'\Delta t + 2h\omega\omega'\sin\omega'\Delta t \} - (h^2\omega^2 - \omega'^2)] \quad (13d)
\end{aligned}$$

d_1, d_2 は図-1aの線分A-B, C-D, B-C, D-Aで異なり次の様になる。

A-B上では

$$d_1 = \frac{\omega^2}{\omega'} (1-\gamma^2) (\delta_1 - \delta_y) e^{-h\omega\Delta t} (\lambda_3 \sin\omega'\Delta t - \lambda_1 \cos\omega'\Delta t) \quad (14a)$$

$$d_2 = -\frac{\omega^2}{\omega'} (1-\gamma^2) (\delta_1 - \delta_y) e^{-h\omega\Delta t} \{ (\lambda_3 h\omega - \lambda_1 \omega') \sin\omega'\Delta t - (\lambda_3 \omega' + \lambda_1 h\omega) \cos\omega'\Delta t \} \quad (14b)$$

C-D上では

$$d_1 = \frac{\omega^2}{\omega'} (1-\gamma^2) (\delta_2 + \delta_y) e^{-h\omega\Delta t} (\lambda_3 \sin\omega'\Delta t - \lambda_1 \cos\omega'\Delta t) \quad (14c)$$

$$d_2 = -\frac{\omega^2}{\omega'} (1-\gamma^2) (\delta_2 + \delta_y) e^{-h\omega\Delta t} \{ (\lambda_3 h\omega - \lambda_1 \omega') \sin\omega'\Delta t - (\lambda_3 \omega' + \lambda_1 h\omega) \cos\omega'\Delta t \} \quad (14d)$$

B-C上では

$$d_1 = \frac{\omega^2}{\omega'} (1-\gamma^2) \delta_y e^{-h\omega\Delta t} (\lambda_3 \sin\omega'\Delta t - \lambda_1 \cos\omega'\Delta t) \quad (14e)$$

$$d_2 = -\frac{\omega^2}{\omega'} (1-\gamma^2) \delta_y e^{-h\omega\Delta t} \{ (\lambda_3 h\omega - \lambda_1 \omega') \sin\omega'\Delta t - (\lambda_3 \omega' + \lambda_1 h\omega) \cos\omega'\Delta t \} \quad (14f)$$

D-A上では

$$d_1 = -\frac{\omega^2}{\omega'} (1-\gamma^2) \delta_y e^{-h\omega\Delta t} (\lambda_3 \sin \omega' \Delta t - \lambda_1 \cos \omega' \Delta t) \quad (14g)$$

$$d_2 = \frac{\omega^2}{\omega'} (1-\gamma^2) \delta_y e^{-h\omega\Delta t} \{ (\lambda_3 h\omega - \lambda_1 \omega') \sin \omega' \Delta t - (\lambda_3 \omega' + \lambda_1 h\omega) \cos \omega' \Delta t \} \quad (14h)$$

4. 理想型モデル

図-1bの様なモデルの復元力特性を考慮すると、運動方程式は次の様に書くことができる。

A-B上では

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_a(t) + \omega^2 (\delta_1 - \delta_y) \quad (15a)$$

C-D上では

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_a(t) + \omega^2 (\delta_2 + \delta_y) \quad (15b)$$

B-C上では

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} = -\ddot{y}_a(t) + \omega^2 \delta_y \quad (15c)$$

D-A上では

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} = -\ddot{y}_a(t) - \omega^2 \delta_y \quad (15d)$$

式(15a,b)は式(2a,b)と全く同じであり、その一般解は3. に与えられている。ここでは、図-1,bのB-C, D-A部分の一般解を誘導する、式(15c,d)は

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} = f_2(t) \quad (16)$$

と書くことができる。この式を式(4)の条件で解くと

$$y(t) = y_n + \frac{1}{2h\omega} \{1 - e^{-2h\omega(t-t_n)}\} \dot{y}_n + \frac{1}{2h\omega} \int_{t_n}^t f_2(\tau') \{1 - e^{-2h\omega(t-\tau')}\} d\tau' \quad (17)$$

式(17)をtで微分して

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_n e^{-2h\omega(t-t_n)} + \int_{t_n}^t f_2(\tau') e^{-2h\omega(t-\tau')} d\tau' \quad (18)$$

式(17),(18)において、 $t=t_{n+1}=t_n+\Delta t$ 、また $\tau'=t_n+\tau$ と置いて整理すると。

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ \dot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

但し

$$a_{11}=1 \quad (20a)$$

$$a_{12} = \frac{1}{2h\omega} (1 - e^{-2h\omega\Delta t}) \quad (20b)$$

$$a_{21} = 0 \quad (20c)$$

$$a_{22} = e^{-2h\omega\Delta t} \quad (20d)$$

$$b_1 = \frac{1}{2h\omega} \int_0^{\Delta t} f_2(t_n + \tau) \{1 - e^{-2h\omega(\Delta t - \tau)}\} d\tau \quad (21a)$$

$$b_2 = \int_0^{\Delta t} f_2(t_n + \tau) e^{-2h\omega(\Delta t - \tau)} d\tau \quad (21b)$$

$f_2(t_n + \tau)$ が式(14)で表される場合、式(21a,b)は

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_{0n} \\ \ddot{y}_{0n+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

但し

$$c_{11} = \frac{1}{8h^3\omega^3\Delta t} (1 - e^{-2h\omega\Delta t}) - \frac{1}{4h^2\omega^2} e^{-2h\omega\Delta t} - \frac{\Delta t}{4h\omega} \quad (23a)$$

$$c_{12} = -\frac{1}{8h^3\omega^3\Delta t} (1 - e^{-2h\omega\Delta t}) + \frac{1}{4h^2\omega^2} - \frac{\Delta t}{4h\omega} \quad (23b)$$

$$c_{21} = -\frac{1}{4h^3\omega^3\Delta t} (1 - e^{-2h\omega\Delta t}) + \frac{1}{2h^2\omega} e^{-2h\omega\Delta t} \quad (23c)$$

$$c_{22} = -\frac{1}{4h^3\omega^3\Delta t} (1 - e^{-2h\omega\Delta t}) - \frac{1}{2h^2\omega} \quad (23d)$$

d_1, d_2 は、図-1bのB-C上では

$$d_1 = -\frac{1}{4h^2\omega^2} (1 - e^{-2h\omega\Delta t}) + \frac{\omega\Delta t}{2h} \delta_y \quad (24a)$$

$$d_2 = \frac{\omega}{2h} \delta_y (1 - e^{-2h\omega\Delta t}) \quad (24b)$$

また、D-A上では

$$d_1 = \frac{1}{4h^2\omega^2} (1 - e^{-2h\omega\Delta t}) - \frac{\omega\Delta t}{2h} \delta_y \quad (24c)$$

$$d_2 = -\frac{\omega}{2h} \delta_y (1 - e^{-2h\omega\Delta t}) \quad (24d)$$

このモデルを用いて動的解析を行う場合、図-1bの復元力特性のA-B, C-Dの部分については図-1aのモデルと同様に計算できる。そしてB-C, D-A部分ではここに示した式を用いて計算することになる。

5. 劣化型モデル

図-1cに示すように、塑性領域の剛性が負勾配を持つ場合の解析を行う。この様な復元力特性を持つ系の運動方程式は次の様に書くことができる。

$$\text{A-B上では} \quad \ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0(t) + \omega^2(1+\gamma^2)(\delta_1 - \delta_y) \quad (25a)$$

$$\text{C-D上では} \quad \ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0(t) + \omega^2(1+\gamma^2)(\delta_2 + \delta_y) \quad (25b)$$

$$\text{B-C上では} \quad \ddot{y} + 2h\omega\dot{y} - \gamma^2 \omega^2 y = -\ddot{y}_0(t) + \omega^2(1+\gamma^2)\delta_y \quad (25c)$$

$$\text{D-A上では} \quad \ddot{y} + 2h\omega\dot{y} - \gamma^2 \omega^2 y = -\ddot{y}_0(t) - \omega^2(1+\gamma^2)\delta_y \quad (25d)$$

式(25a,b)は、式(2a,b)と全く同じであり、その一般解は3. 節に与えられているので、ここでは省略する。式(25c,d)は負勾配に対応する運動方程式であり

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} - \gamma^2 \omega^2 y = f_3(t) \quad (26)$$

と書くことができる。この式を式(4)の条件で解くと

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega'(t-t_n)} \{ \omega' \cosh \omega'(t-t_n) + h\omega \sinh \omega'(t-t_n) \} y_n + \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega'(t-t_n)} \sinh \omega'(t-t_n) \dot{y}_n \\ & + \frac{1}{\omega'} \int_{t_n}^t f_3(\tau') e^{-h\omega'(t-\tau')} \sinh \omega'(t-\tau') d\tau' \end{aligned} \quad (27)$$

上式を t で微分して整理すると

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & - \left(\frac{h^2 \omega^2}{\omega'} + \omega' \right) e^{-h\omega'(t-t_n)} \sinh \omega'(t-t_n) y_n \\ & + e^{-h\omega'(t-t_n)} \left\{ - \frac{h\omega}{\omega'} \sinh \omega'(t-t_n) + \cosh \omega'(t-t_n) \right\} \dot{y}_n \\ & + \frac{1}{\omega'} \int_{t_n}^t f_3(\tau') e^{-h\omega'(t-\tau')} \{ -h\omega' \sinh \omega'(t-\tau') + \omega' \cosh \omega'(t-\tau') \} d\tau' \end{aligned} \quad (28)$$

式(27),(28)において、 $t=t_{n+1}=t_n+\Delta t$ 、また $\tau'=t_n+\tau$ と置き整理すると

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ \dot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

ここで $\omega' = \omega \sqrt{\gamma^2 + h^2}$ として

$$a_{11} = \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega\Delta t} (\omega' \cosh \omega' \Delta t + h\omega \sinh \omega' \Delta t) \quad (30a)$$

$$a_{12} = \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega\Delta t} \sinh\omega'\Delta t \quad (30b)$$

$$a_{21} = - \left(\frac{h^2\omega^2}{\omega'} + \omega' \right) e^{-h\omega\Delta t} \sinh\omega'\Delta t \quad (30c)$$

$$a_{22} = e^{-h\omega\Delta t} \left(-\frac{h\omega}{\omega'} \sinh\omega'\Delta t + \cosh\omega'\Delta t \right) \quad (30d)$$

$$b_1 = \frac{1}{\omega'} \int_0^{\Delta t} f_3(t_n + \tau) e^{-h\omega(\Delta t - \tau)} \sinh\omega'(\Delta t - \tau) d\tau \quad (31a)$$

$$b_2 = \frac{1}{\omega'} \int_0^{\Delta t} f_3(t_n + \tau) e^{-h\omega(\Delta t - \tau)} \{ -h\omega' \sinh\omega'(\Delta t - \tau) + \omega' \cosh\omega'(\Delta t - \tau) \} d\tau \quad (31b)$$

$f_3(t_n + \tau)$ が式(14)で表される場合、式(31a, b)は

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_{0n} \\ \dot{y}_{0n} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

但し

$$c_{11} = -\frac{1}{\omega'} e^{-h\omega\Delta t} \left\{ \left(\lambda'_3 - \frac{\lambda'_4}{\Delta t} \right) \sinh\omega'\Delta t - \left(\lambda'_1 - \frac{\lambda'_2}{\Delta t} \right) \cosh\omega'\Delta t \right\} \quad (33a)$$

$$c_{12} = -\frac{1}{\omega'\Delta t} e^{-h\omega\Delta t} (\lambda'_4 \sinh\omega'\Delta t - \lambda'_2 \cosh\omega'\Delta t) \quad (33b)$$

$$\begin{aligned} c_{21} = \frac{1}{\omega'} e^{-h\omega\Delta t} & \left\{ \left(\lambda'_3 - \frac{\lambda'_4}{\Delta t} \right) (h\omega \sinh\omega'\Delta t - \omega' \cosh\omega'\Delta t) \right. \\ & \left. - \left(\lambda'_1 - \frac{\lambda'_2}{\Delta t} \right) (h\omega \cosh\omega'\Delta t + \omega' \sinh\omega'\Delta t) \right\} \end{aligned} \quad (33c)$$

$$c_{22} = \frac{1}{\omega'\Delta t} e^{-h\omega\Delta t} \{ \lambda'_4 (h\omega \sinh\omega'\Delta t - \omega' \cosh\omega'\Delta t) - \lambda'_2 (h\omega \cosh\omega'\Delta t + \omega' \sinh\omega'\Delta t) \} \quad (33d)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \int_0^{\Delta t} e^{h\omega\Delta t} \sin\omega'\tau d\tau \\ &= \frac{1}{h^2\omega^2 - \omega'^2} \{ e^{h\omega\Delta t} (h\omega \sinh\omega'\Delta t - \omega' \cosh\omega'\Delta t) + \omega' \} \end{aligned} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_2 &= \int_0^{\Delta t} \tau e^{h\omega\Delta t} \sin\omega'\tau d\tau \\ &= \frac{\Delta t}{h^2\omega^2 - \omega'^2} e^{h\omega\Delta t} (h\omega \sinh\omega'\Delta t - \omega' \cosh\omega'\Delta t) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(h^2\omega^2-\omega'^2)^2} [e^{h\omega\Delta t} \{ (h^2\omega^2+\omega'^2) \sinh\omega'\Delta t - 2h\omega\omega' \cosh\omega'\Delta t \} + 2h\omega\omega'] \quad (34b)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_3 &= \int_0^{\Delta t} e^{h\omega\Delta t} \cos\omega'\tau d\tau \\ &= \frac{1}{h^2\omega^2-\omega'^2} \{ e^{h\omega\Delta t} (h\omega \cosh\omega'\Delta t - \omega' \sinh\omega'\Delta t) + h\omega \} \end{aligned} \quad (34c)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_4 &= \int_0^{\Delta t} \tau e^{h\omega\Delta t} \cos\omega'\tau d\tau \\ &= \frac{\Delta t}{h^2\omega^2-\omega'^2} e^{h\omega\Delta t} (h\omega \sinh\omega'\Delta t - \omega' \cosh\omega'\Delta t) \\ &\quad - \frac{1}{(h^2\omega^2-\omega'^2)^2} [e^{h\omega\Delta t} \{ (h^2\omega^2+\omega'^2) \sinh\omega'\Delta t - 2h\omega\omega' \cosh\omega'\Delta t \} + (h^2\omega^2-\omega'^2)] \end{aligned} \quad (34d)$$

また、 d_1, d_2 のB-C上では

$$d_1 = \frac{\omega^2}{\omega'} (1+\gamma^2) \delta_y e^{-h\omega\Delta t} (\lambda'_3 \sinh\omega'\Delta t - \lambda'_1 \cosh\omega'\Delta t) \quad (35a)$$

$$d_2 = -\frac{\omega^2}{\omega'} (1+\gamma^2) \delta_y e^{-h\omega\Delta t} \{ (\lambda'_3 h\omega - \lambda'_1 \omega') \sinh\omega'\Delta t - (\lambda'_3 \omega' + \lambda'_1 h\omega) \cosh\omega'\Delta t \} \quad (35b)$$

D-A 上では

$$d_1 = -\frac{\omega^2}{\omega'} (1+\gamma^2) \delta_y e^{-h\omega\Delta t} (\lambda'_3 \sinh\omega'\Delta t - \lambda'_1 \cosh\omega'\Delta t) \quad (35c)$$

$$d_2 = \frac{\omega^2}{\omega'} (1+\gamma^2) \delta_y e^{-h\omega\Delta t} \{ (\lambda'_3 h\omega - \lambda'_1 \omega') \sinh\omega'\Delta t - (\lambda'_3 \omega' + \lambda'_1 h\omega) \cosh\omega'\Delta t \} \quad (35d)$$

6. 計算例

前記した3種類のモデルを用いて、全てのモデルで $T=1.0$ 秒($\omega=6.28$ rad/s)、減衰定数 $h=0.05$ 、降伏変位 $\delta_y=0.05$ mとして動的応答解析を行った。また、硬化型及び劣化型モデルでは $\gamma^2=0.1$ を使用した。一方、入力波はEl Centro波(El Centor 1940 NS Imperial Valley Earthquake)の $\Delta t=0.02$ secのものを最初から15秒使用した。計算結果から復元力と変位の関係を図-3.a,b,cに示した。これ等は、図-1.a,b,cに示した復

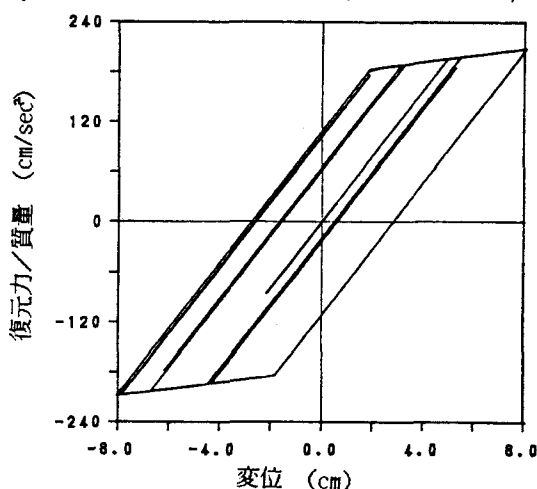


図-3.a 硬化型モデルの復元力の変動

元力特性を的確に表している。

本方法は、弾性応答の厳密解を漸化式に書き換え、Bilinearモデルで表される非線形問題に拡張したものである。外力項が折れ線、あるいは三角関数で表される限り正確に応答計算をすることができる。時間刻み Δt を大きくし過ぎると、計算結果から正しい情報を見落とすことはあっても、アルゴリズムの収束性、不安定の心配をすることがない。

本方法を非線形問題に適用する上で唯一誤差が生じる可能性があるのは、図-1,a,b,cの復元力特性が折れ曲がるA,B,C,D点に対応する値を精度よく見つけるかどうかである。本例題では、これ等の点を通るするとき、時間刻み Δt の1/50の値を用いて計算した。また、別法として次のようにしてA,B,C,Dを通る時間を近似的に求めることができる。

A,C点では速度が0であるから

$$\dot{y}(t_n + \Delta t) = \dot{y}(t_n) + \Delta t_1 \ddot{y}(t_n) = 0 \quad (36)$$

$$\therefore \Delta t_1 = -\frac{\dot{y}(t_n)}{\ddot{y}(t_n)} \quad (37)$$

B,D点では、B点あるいはD点での変位を $\tilde{y}$ とすると

$$y(t_n + \Delta t_1) = y(t_n) + \Delta t_1 \dot{y}(t_n) = \tilde{y} \quad (38)$$

$$\therefore \Delta t_1 = -\frac{(\tilde{y} - y(t_n))}{\dot{y}(t_n)} \quad (39)$$

この様に、 Δt を $\Delta t_1, \Delta t - \Delta t_1$ に分割し計算を行うことも可能である。

7. 結論

本研究では、Nigam-Jennings法のアルゴリズムを非線形問題に拡張し、例題を用いてそのアルゴリズムの正しさを検証した。文献に示したDuhamel積分を基本とする他のアルゴリズムも同様に、非線形問題への拡張が可能である。

本方法は、任意の関数が陽に与えられていても、外力項の積分は近似的になり、厳密解を与えることはできない。しかし、時間刻み Δt を十分に小さくすることで、近似的ではあるが精度よく積分が可能である。

その他、弾塑性モデル、Cloughモデル、Takedaモデル、Degraded Trilinearモデル、Slipモデル等はい

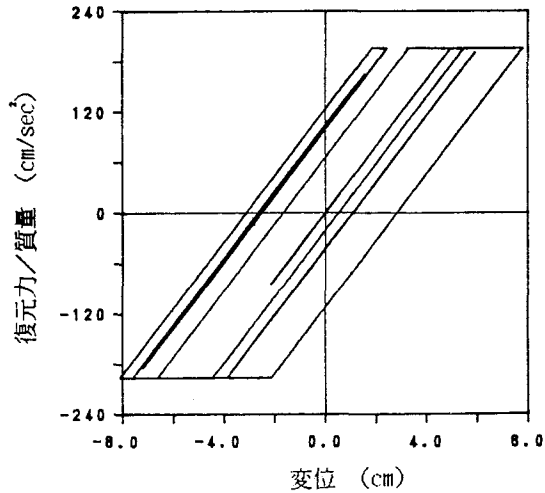


図-3,b 理想型モデルの復元力の変動

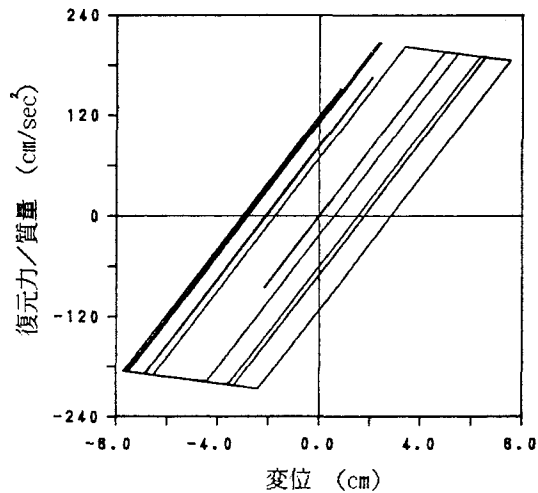


図-3,c 劣化型モデルの復元力の変動

ずれも折れ線で表されており、本論文の解を適用することが可能である。

また、本方法とNewmark β 法の比較を硬化型のBilinearモデルを用いて文献(8)で行っている。時間刻み Δt が小さいとき計算効率の上で有利であることを確認している。このことは文献(4)が効率的であるとのべていることの裏付けにもなっている。

最後に、本方法は比較的自由度が小さい非線形多自由度系応答解析にも容易に利用できることは、文献(9)にも示した。

謝辞

防衛大学校 大野友則講師と石川信隆教授には、Newmark β 法とNigam-Jennings法の比較をしそれ等の優劣につき御議論頂いたことで深く感謝致します。

参考文献

- 1)Nigam, N.C. and Jennings P.C : Calculation of response spectra from strong-motion earthquake records, Bull. Seis. Society Am., 59, pp.909-922, 1969.
- 2)安藤範平 : 直接積分法による応答計算法とその精度について、日本建築学会論文集、第248号、昭和51年10月、pp.13-19.
- 3)Dempsey, K.M. and Irvine H.M. : A Note on the Numerical Evaluation of Duhamel's Integral, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.6, pp.511-515, 1978.
- 4)Beck, J.L. and Dowling, M.J. : Quick Algorithm for Computing Either Displacement, Velocity or Acceleration of an Oscillator, Earthquake Engineering and Structural Dynamics , Vol. 16, pp.243-253, 1988.
- 5)水田洋司、平井一男 : 付加外力を用いて効率化した一非線形応答解析法、土木学会論文報告集、第287号、pp1-9,1979年7月.
- 6)水田洋司、平井一男 : 固有値解析を用いた一弾塑性応答解析、土木学会論文報告集、第331号、1983年3月、pp.181-184.
- 7)Cheng, M : Convergence and stability of step-by-step integration for model with negative-siffnees, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.16, pp.227-244, 1988.
- 8)大野友則、石川信隆、松井邦人 : Nigam-Jennings法による弾塑性地震応答解析、第13回関東支部技術発表会講演概要集、昭和61年3月、pp22-23.
- 9)本田満彦、松井邦人、佐々木利規 : 調和外力を受ける剛体の浮き上がりを伴う動的挙動について、第43回年次学述講演会講演概要集 I、昭和63年10月、pp.1066-1067

(1988年10月12日受付)