

摂動法による非比例減衰系の動的モード解析

PERTURBATION TECHNIQUE FOR MODAL DYNAMIC ANALYSIS
OF MODERATELY NONPROPORTIONALLY-DAMPED SYSTEMSベニート M. パチェコ¹⁾、金 熙憲²⁾、藤野 陽三³⁾、伊藤 学⁴⁾
by Benito M. PACHECO, Heeduck KIM, Yozo FUJINO and Manabu ITO

A general second-order perturbation technique which is based on eigensolutions of the counterpart proportionally-damped system is applied to approximate the complex eigenvectors and complex eigenvalues of moderately nonproportionally damped systems without direct solving of quadratic eigenvalue problem. The primary advantage of this approach is to drastically reduce computational time for obtaining the eigensolutions of the nonproportionally-damped system. For two-degree-of-freedom (2DOF) systems, explicit closed-form equations of eigensolutions are obtained through the present perturbation technique. Using perturbed eigensolutions, the modal superposition equation of response to general load is expressed in terms of well-known proportional modes (or classical modes). The accuracy of perturbed eigensolutions and the corresponding response is tested on several 2DOF systems and 9DOF systems. The effects of damping nonproportionality on eigensolutions and time-history responses are also discussed.

1. まえがき

線形自由度系の運動方程式において、粘性減衰マトリックスが(古典的)固有モードで直交化できないとき、この系を非比例減衰系という。

実際の構造系の振動減衰は多かれ少なかれ非比例的性質を有する。構造物-equipment系、構造物-TMD系、地盤-構造物系あるいは免震構造系は非比例減衰を有する典型的な例である。すでに、非比例減衰系の動的線形解析には固有値解析に基づく複素モードによる厳密解法が存在する。すなわち、固有値問題においては、state-vectorアプローチによる手法¹⁾が一般的であるが、大規模構造系では比例減衰系の場合に較べて計算時間が膨大になる。

本研究では、やや弱い非比例減衰をもつ系の固有値と固有ベクトルを、対応する比例減衰系の固有値と固有ベクトルを基として摂動法によって求める方法を提案する。次に、その摂動モードを使って、一般的な外力に対する強制振動応答をモード重ね合わせによって示す。さらに、非比例減衰が固有値解と動的応答に及ぼす影響を明確に理解できる形での定式化を示す。

ここで求める摂動法による非比例減衰系の固有値・固有ベクトル(ともに複素数)表示は、当然のことであるが近似解である。しかし本手法では、系の自由度を n としたとき $n \times n$ マトリックスの固有値解析は必要とするが $2n \times 2n$ マトリックスの固有値解析を必要としないため計算時間が低減される。特に、自由度が大きい場合、振動系のパラメータ同定、感度解析などで固有値解析を繰り返して使用する場合などでその効果を発揮する。また、複素固有値・複素固有モードの摂動解は比例減衰系のそれらを使い陽な形で表わされるの

1)工博 東京大学工学部土木工学科 講師

2)工修 大阪大学大学院博士課程(元東大大学院修士課程)

3)Ph.D 東京大学工学部総合試験所 助教授

4)工博 東京大学工学部土木工学科 教授

で、複素固有値・複素固有モードの意味を理解しやすいと思われる。

なお、非比例減衰系の固有値問題に対する振動法の適用を検討した文献には(2), (3), (4)などがあるが、比例減衰系の固有値・固有ベクトルを振動解の基にしている点、state-vectorアプローチをとっていない点に本方法の特徴がある。

最後に、本振動法による固有値解と動的応答の精度を、構造物-equipment系、構造物-TMD系、弾性地盤-構造物系、isolator-構造物(免震構造)系を対象とした4つタイプの2自由度系モデルと、構造物にTMDをつけた9自由度系モデルを例として調べる。

2. 非比例減衰系

粘性減衰を有する n 自由度系の線形系運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

と表わせる。ここに、 $[M]$, $[C]$, $[K]$ は、それぞれ対称の質量、減衰、剛性マトリックス、 $\{x\}$, $\{f(t)\}$ は、それぞれ変位、外力ベクトルである。減衰マトリックス $[C]$ は次に示すように、Caughey減衰⁵⁾で表わすことができない非比例減衰とする。すなわち

$$[K][M]^{-1}[C] \neq [C][M]^{-1}[K] \quad (2)$$

式(1)の特性方程式は、 $\{x\} = \{y\} \exp(\lambda t)$ とおくと次のようになる。

$$(\lambda_i^2 [M] + \lambda_i [C] + [K]) \{y_i\} = \{0\} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, r, \dots, n, n+1, \dots, n+r, \dots, 2n \quad (3)$$

これは固有値問題であり、減衰が非常に大きくない場合は $(n+r)$ 次の固有値 (λ_{n+r}) 、固有ベクトル $(\{y_{n+r}\})$ は r 次 $(\lambda_r, \{y_r\})$ の共役複素数となる。各固有ベクトルは下のように正規化することができる。

$$\{y_i\}^T (\lambda_i + \lambda_k) [M] + [C] \{y_k\} = \delta_{ik} r_i \quad , \quad i, k = 1, 2, \dots, 2n \quad (4)$$

$$\{y_i\}^T (\lambda_i \lambda_k [M] - [K]) \{y_k\} = \delta_{ik} \lambda_i r_i \quad (5)$$

ここに、 δ_{ik} はクロネッカーのデルタ、 r_i は正規化定数(複素数)である。

そして、外力による動的応答は複素固有モードの重ね合わせによって次のように表わすことができる。

$$\{x\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n P_i \{y_i\} \quad (6)$$

$$\{\ddot{x}\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \ddot{P}_i \{y_i\} \quad (7)$$

R_e は実部の意味である。 P_i は複素数のモード寄与係数であり、次式で与えられる。

$$P_i = \frac{\{y_i\}^T}{r_i} \exp(\lambda_i t) \left[\int_0^t \{f(\tau)\} \exp(-\lambda_i \tau) d\tau + \lambda_i [M] \{x_0\} + [C] \{x_0\} + [M] \{\dot{x}_0\} \right] \quad (8)$$

ここに、 $\{x_0\}$, $\{\dot{x}_0\}$ は初期変位ベクトルと初期速度ベクトルである。

3. 振動法による固有値問題

ここでは、“やや弱い非比例減衰”(moderately nonproportional damping)を持つ系の複素固有値ならびに複素固有ベクトルを、比例減衰系の固有値、固有ベクトルを基とする2次振動法により求める。

3.1 減衰マトリックス $[C]$ の分離 非減衰系 $([M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\})$ の i 次モードの固有値(非減衰振動数)を ω_{gi} とすれば、その固有ベクトルマトリックス $[Y_g]$ は、質量マトリックスと剛性マトリックスに対して次のように正規化することができる。

$$[Y_g]^T [M] [Y_g] = [I] \quad , \quad [Y_g]^T [K] [Y_g] = \operatorname{diag}[\omega_{gi}^2] \quad (9), (10)$$

また、式(1)の非比例減衰マトリックス $[C]$ に対しては、

$$[Y_g]^T [C] [Y_g] = \operatorname{diag}[2\xi_{gi} \omega_{gi}] + [\bar{C}] \quad (11)$$

と表わすことができる。ここで、 $\xi_{\theta i}$ は比例減衰比である。 $[C]$ は $[Y_{\theta}]^T[C][Y_{\theta}]$ の非対角要素で組み立てた対角要素がゼロであるマトリックスで、その (i, k) 要素を $\bar{c}_{ik}$ とする($\bar{c}_{ii} = 0$)。また、やや弱い非比例減衰とは、 $[C] < [C]$ (あるいは、 $c_{ik} < 2\xi_{\theta i}\omega_{\theta i}$) ということである。減衰マトリックス $[C]$ は次のように表わされる。

$$[C] = [C_p] + [C_N] \quad (12)$$

ここに、 $[C_p]$ は比例減衰(Caughey減衰⁵⁾)マトリックス、 $[C_N]$ は $[C]$ の非比例減衰性要素で組立てられた非比例減衰マトリックスと呼ばれ、それぞれ、次のように表わされる。

$$[C_p] = [Y_{\theta}][M]\text{diag}[2\xi_{\theta i}\omega_{\theta i}][M][Y_{\theta}]^T \quad (13)$$

$$[C_N] = [Y_{\theta}][M][\bar{C}][M][Y_{\theta}]^T \quad (14)$$

したがって、特性方程式(3)は次のように書ける。

$$(\lambda_i^2[M] + \lambda_i\{[C_p] + [C_N]\} + [K])\{y_i\} = \{0\} \quad , \quad i=1, 2, \dots, r, \dots, n, n+1, \dots, n+r, \dots, 2n \quad (15)$$

また、 $[C]$ の代わりに比例減衰マトリックス $[C_p]$ を持つ比例減衰系の運動方程式と特性方程式は、

$$[M]\{x\} + [C_p]\{x\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (16)$$

$$(\lambda_{\theta i}^2[M] + \lambda_{\theta i}[C_p] + [K])\{y_{\theta i}\} = \{0\} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, r, \dots, n, n+1, \dots, n+r, \dots, 2n \quad (17)$$

と表わせる。ここに、比例減衰系の固有モード $\{y_{\theta i}\}$ は非減衰系の固有ベクトル $\{y_{\theta i}\}$ と同一の実ベクトルとなり⁵⁾、その固有値は、

$$\lambda_{\theta i} = -\omega_{\theta i}\xi_{\theta i} + j\omega_{\theta i}\sqrt{1-\xi_{\theta i}^2} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

と与えられる。ここで、 $j = \sqrt{-1}$ 。また、比例減衰系の全ての固有値特性は既知と仮定する。

3.2 摂動方程式とその摂動解 式(1)で与えられる系がやや弱い非比例減衰を持つと考えれば、固有値と固有ベクトルを次のように表わすことができる。

$$\lambda_i = \lambda_{\theta i} + \lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \dots \quad (19)$$

$$\{y_i\} = \{y_{\theta i}\} + \{y_{1i}\} + \{y_{2i}\} + \dots \quad (20)$$

ここで、 λ , $\{y\}$ の1番目の添字はオーダーの大きさを示している。例えば、 $\{y_{2i}\}$ は $\{y_{1i}\}$ より1オーダー小さいベクトルである。また、 $\{y_{1i}\}$ と $\{y_{2i}\}$ は下に示すように、 $\{y_{\theta i}\}$ との線形結合であると仮定する。

$$\{y_{1i}\} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\{y_{\theta k}\}(1-\delta_{ik}) \quad , \quad \{y_{2i}\} = \sum_{k=1}^n b_{ik}\{y_{\theta k}\}(1-\delta_{ik}) \quad (21), (22)$$

式(19)~(22)を式(15)に代入して、オーダー別に分類すると、次のようになる。

$$0 \text{ 次オーダー: } (\lambda_{\theta i}^2[M] + \lambda_{\theta i}[C_p] + [K])\{y_{\theta i}\} = \{0\} \quad (23)$$

$$1 \text{ 次オーダー: } (\lambda_{\theta i}^2[M] + \lambda_{\theta i}[C_p] + [K])\{y_{1i}\} = -(2\lambda_{\theta i}\lambda_{1i}[M] + \lambda_{1i}[C_p] + \lambda_{\theta i}[C_N])\{y_{\theta i}\} \quad (24)$$

$$2 \text{ 次オーダー: } (\lambda_{\theta i}^2[M] + \lambda_{\theta i}[C_p] + [K])\{y_{2i}\} = -[(\lambda_{1i}^2 + 2\lambda_{\theta i}\lambda_{2i})[M] + \lambda_{2i}[C_p] + \lambda_{1i}[C_N]]\{y_{\theta i}\} \\ - (2\lambda_{\theta i}\lambda_{1i}[M] + \lambda_{1i}[C_p] + \lambda_{\theta i}[C_N])\{y_{1i}\} \quad (25)$$

本研究では、実用的な面を考慮し、2次オーダーにまでに限って適用する。それぞれのオーダーに対して未知係数を求めると、次のようになる。

$$\lambda_{1i} = 0 \quad (26)$$

$$a_{ik} = \lambda_{\theta i}\bar{c}_{ik}(1-\delta_{ik}) / (\lambda_{\theta k} - \lambda_{\theta i})(\lambda_{\theta k} + 2\xi_{\theta k}\omega_{\theta k} + \lambda_{\theta i}) \quad (27)$$

$$\lambda_{2i} = -\lambda_{\theta i}(\sum_{m=1}^n \bar{c}_{im}a_{im}(1-\delta_{im})) / 2(\lambda_{\theta i} + \xi_{\theta i}\omega_{\theta i}) \quad (28)$$

$$b_{ik} = \lambda_{\theta i}(\sum_{m=1}^n \bar{c}_{km}a_{im}(1-\delta_{im}))(1-\delta_{ik}) / (\lambda_{\theta k} - \lambda_{\theta i})(\lambda_{\theta k} + 2\xi_{\theta k}\omega_{\theta k} + \lambda_{\theta i}) \quad (29)$$

これらの λ_{1i} 、 a_{ik} 、 λ_{2i} 、 b_{ik} を式(19)~(22)に代入し、式(18)の関係をを用いると、以下のように式(1)で与えられる非比例減衰系の固有値 λ_i 、固有ベクトル $\{y_i\}$ が求まる。すなわち

$$\lambda_i = -\omega_i\xi_i + j\omega_i\sqrt{1-\xi_i^2} \quad (30)$$

$$\{y_i\} = \{y_{\theta i}\} + \sum_{k=1}^n \zeta_{ik}\{y_{\theta k}\} + j\sum_{k=1}^n \eta_{ik}\{y_{\theta k}\} \quad (31)$$

ただし、

$$\omega_i = \omega_{0i} \sqrt{1 + \alpha_i}, \quad \xi_i = \xi_{0i} \sqrt{1 + \beta_i} \quad (32), (33)$$

$$\zeta_{ik} = R_{ik} \bar{c}_{ik} + \sum_{m=1}^n (R_{ik} R_{im} - I_{ik} I_{im}) \bar{c}_{im} \bar{c}_{km} \quad (34)$$

$$\eta_{ik} = I_{ik} \bar{c}_{ik} + \sum_{m=1}^n (I_{ik} R_{im} + R_{ik} I_{im}) \bar{c}_{im} \bar{c}_{km} \quad (35)$$

$$\alpha_i = \kappa_i (\kappa_i + 2) + \xi_{0i}^2 [\gamma_i (\gamma_i + 2) - \kappa_i (\kappa_i + 2)] \quad (36)$$

$$\beta_i = (\gamma_i^2 + 2\gamma_i - \alpha_i) / (1 + \alpha_i) \quad (37)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2\omega_{0i} \xi_{0i}} \sum_{k=1}^n (R_{ik} - \frac{\xi_{0i}}{\sqrt{1 - \xi_{0i}^2}} I_{ik}) \bar{c}_{ik}^2 \quad (38)$$

$$\kappa_i = \frac{-1}{2\omega_{0i} \sqrt{1 - \xi_{0i}^2}} \sum_{k=1}^n (I_{ik} + \frac{\xi_{0i}}{\sqrt{1 - \xi_{0i}^2}} R_{ik}) \bar{c}_{ik}^2 \quad (39)$$

$$R_{ik} = [\xi_{0i} \omega_{0i} (\omega_{0k}^2 + \omega_{0i}^2) - 2\xi_{0k} \omega_{0k} \omega_{0i}^2] / D_{ik} \quad (40)$$

$$I_{ik} = -\omega_{0i} \sqrt{1 - \xi_{0i}^2} (\omega_{0k}^2 - \omega_{0i}^2) / D_{ik} \quad (41)$$

$$D_{ik} = 2(\xi_{0k} \omega_{0k} - \xi_{0i} \omega_{0i})^2 (\omega_{0k}^2 + \omega_{0i}^2) + (\omega_{0k}^2 - \omega_{0i}^2) \{ (\omega_{0k}^2 - \omega_{0i}^2) - 2(\xi_{0k}^2 \omega_{0k}^2 - \xi_{0i}^2 \omega_{0i}^2) \} \quad (42)$$

ここで、 ω_i は擬振動数(pseudo-frequency)、 ξ_i は擬減衰比(pseudo-damping ratio)である。式(31)-(33)の無次元パラメータ $\alpha, \beta, \zeta, \eta$ は、それぞれ減衰の非比例性が系の擬振動数、擬減衰比、固有ベクトルの実数部と虚数部に及ぼす影響を示す。当然、比例減衰系の場合は全てゼロになる。なお、比例減衰系の固有値のうち、同じものが(すなわち重根)存在すると、式(27), (29)の分母項がゼロになるため本方法の適用が不可能となるが、重根の固有値をもつ構造系は一般にはまれである。

4. 固有ベクトルの摂動解を用いた動的応答の表現

式(4), (5)の複素固有モードの直交性に、第3節で摂動法によって求めた複数固有ベクトルを代入して、すなわち式(30), (31)を式(4)に代入すると、 i 次モードに対する正規化定数 r_i は

$$r_i = \chi_i + j(2\omega_{0i} \sqrt{1 - \xi_{0i}^2} + \phi_i) \quad (43)$$

と得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \chi_i = & -2\gamma_i \omega_{0i} \xi_{0i} \{ 1 + \sum_{k=1}^n (\zeta_{ik}^2 - \eta_{ik}^2) \} - 4\omega_{0i} \sqrt{1 - \xi_{0i}^2} \{ \sum_{k=1}^n \zeta_{ik} \eta_{ik} \} (1 + \kappa_i) \\ & + 2 \sum_{k=1}^n \zeta_{ik} \bar{c}_{ik} + 2 \sum_{k=1}^n (\omega_{0k} \xi_{0k} - \omega_{0i} \xi_{0i}) (\zeta_{ik}^2 - \eta_{ik}^2) + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (\zeta_{ik} \zeta_{im} - \eta_{ik} \eta_{im}) \bar{c}_{km} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \phi_i = & 2\omega_{0i} \sqrt{1 - \xi_{0i}^2} \{ \kappa_i + (1 + \kappa_i) \sum_{k=1}^n (\zeta_{ik}^2 - \eta_{ik}^2) \} - 4\gamma_i \omega_{0i} \xi_{0i} \{ \sum_{k=1}^n \zeta_{ik} \eta_{ik} \} \\ & + 2 \sum_{k=1}^n \eta_{ik} \bar{c}_{ik} + 4 \sum_{k=1}^n (\omega_{0k} \xi_{0k} - \omega_{0i} \xi_{0i}) \zeta_{ik} \eta_{ik} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (\zeta_{ik} \eta_{im} + \eta_{ik} \zeta_{im}) \bar{c}_{km} \end{aligned} \quad (45)$$

そして、この正規化定数 r_i とインパルス応答関数 $h_i(t)$ を用いると、式(8)のモード寄与係数 P_i を次のように示すことができる。

$$2\text{Re}(P_i) = \{ \{y_{0i}\}^T + \sum_{k=1}^n \zeta_{ik} \{y_{0k}\}^T \} \{G_{1i}\} + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} \{y_{0k}\}^T \{G_{2i}\} \quad (46)$$

$$2\text{Im}(P_i) = -(\{y_{0i}\}^T + \sum_{k=1}^n \zeta_{ik} \{y_{0k}\}^T) \{G_{2i}\} + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} \{y_{0k}\}^T \{G_{1i}\} \quad (47)$$

ここで、 R_{0i}, I_{0i} は各々実部、虚部の意味である。また、

$$\{G_{1i}\} = p_i \{F_i\} + q_i \{G_i\}, \quad \{G_{2i}\} = p_i \{G_i\} - q_i \{F_i\} \quad (48), (49)$$

$$\{F_i\} = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2} \left[\int_0^t \{f(\tau)\} h_i(t-\tau) d\tau + ([C]\{x_0\} + [M]\{\dot{x}_0\}) h_i(t) + [M]\{x_0\} h_i(t) \right] \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \{G_i\} = & \omega_i \xi_i \int_0^t \{f(\tau)\} h_i(t-\tau) d\tau + (-\omega_i^2 [M]\{x_0\} + \xi_i \omega_i ([C]\{x_0\} + [M]\{\dot{x}_0\})) h_i(t) \\ & + \int_0^t \{f(\tau)\} \dot{h}_i(t-\tau) d\tau + (-\xi_i \omega_i [M]\{x_0\} + [C]\{x_0\} + [M]\{\dot{x}_0\}) \dot{h}_i(t) \end{aligned} \quad (51)$$

$$p_i = 2(2\omega_{0i} \sqrt{1-\xi_{0i}^2} + \phi_i) / [(4\omega_{0i} \sqrt{1-\xi_{0i}^2})(1 + \omega_{0i} \sqrt{1-\xi_{0i}^2} \phi_i) + \chi_i^2 + \phi_i^2] \quad (52)$$

$$q_i = 2\chi_i / [(4\omega_{0i} \sqrt{1-\xi_{0i}^2})(1 + \omega_{0i} \sqrt{1-\xi_{0i}^2} \phi_i) + \chi_i^2 + \phi_i^2] \quad (53)$$

$$h_i(t) = \frac{1}{\omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}} \exp(-\omega_i \xi_i t) \sin(\omega_i \sqrt{1-\xi_i^2} t) \quad (54)$$

式(6), (7)より、一般的な外力 $\{f\}$ に対する系(1)の変位応答と加速度応答は、それぞれ以下ようになる。

$$\{x\} = \{d_1\} + \{d_2\} + \{d_3\}, \quad \{\ddot{x}\} = \{a_1\} + \{a_2\} + \{a_3\} \quad (55), (56)$$

ここで、

$$\{d_1\} = \sum_{i=1}^n \{y_{0i}\}^T \{G_{1i}\} \{y_{0i}\} \quad (57a)$$

$$\{d_2\} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \{y_{0k}\}^T (\zeta_{ik} \{G_{1i}\} + \eta_{ik} \{G_{2i}\}) \{y_{0i}\} + \{y_{0i}\}^T (\zeta_{ik} \{G_{1i}\} + \eta_{ik} \{G_{2i}\}) \{y_{0k}\} \quad (57b)$$

$$\{d_3\} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \{y_{0k}\}^T [(\zeta_{ik} \zeta_{im} - \eta_{ik} \eta_{im}) \{G_{1i}\} + (\eta_{ik} \zeta_{im} + \zeta_{ik} \eta_{im}) \{G_{2i}\}] \{y_{0m}\} \quad (57c)$$

$$\{a_1\} = \sum_{i=1}^n \{y_{0i}\}^T (A_i \{G_{1i}\} + B_i \{G_{2i}\} + C_i \{f\}) \{y_{0i}\} \quad (58a)$$

$$\begin{aligned} \{a_2\} = & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \{y_{0k}\}^T [(A_i \zeta_{ik} - B_i \eta_{ik}) \{G_{1i}\} + (B_i \zeta_{ik} + A_i \eta_{ik}) \{G_{2i}\} + C_i \zeta_{ik} \{f\} - E_i \eta_{ik} \{f\}] \{y_{0i}\} \\ & + \{y_{0i}\}^T [(A_i \zeta_{ik} - B_i \eta_{ik}) \{G_{1i}\} + (B_i \zeta_{ik} + A_i \eta_{ik}) \{G_{2i}\} + C_i \zeta_{ik} \{f\} - E_i \eta_{ik} \{f\}] \{y_{0k}\} \end{aligned} \quad (58b)$$

$$\begin{aligned} \{a_3\} = & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \{y_{0k}\}^T [A_i (\zeta_{ik} \zeta_{im} - \eta_{ik} \eta_{im}) - B_i (\eta_{im} \zeta_{ik} + \zeta_{im} \eta_{ik}) \{G_{1i}\} \\ & B_i (\zeta_{ik} \zeta_{im} - \eta_{ik} \eta_{im}) + A_i (\eta_{im} \zeta_{ik} + \zeta_{im} \eta_{ik}) \{G_{2i}\} \\ & C_i (\zeta_{ik} \zeta_{im} - \eta_{ik} \eta_{im}) + E_i (\eta_{im} \zeta_{ik} + \zeta_{im} \eta_{ik}) \{f\}] \{y_{0m}\} \end{aligned} \quad (58c)$$

ただし、

$$A_i = (2\xi_i^2 - 1)\omega_i^2, \quad B_i = -2\xi_i \omega_i^2 \sqrt{1-\xi_i^2} \quad (59), (60)$$

$$C_i = -q_i (\xi_i \omega_i) + p_i (\omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}), \quad E_i = p_i (\xi_i \omega_i) + q_i (\omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}) \quad (61), (62)$$

やや弱い非比例減衰の仮定のもとでは非比例減衰性によって固有振動数、モード減衰があまり変わらないと考えられるので、式(55), (56)の $\{d_1\}$ 、 $\{a_1\}$ は比例減衰系の応答とほとんど同一値と考えてよい。したがって、 $\{d_2\}$ 、 $\{a_2\}$ 、 $\{d_3\}$ 、 $\{a_3\}$ が非比例減衰が応答に及ぼす実質的影響である。ここで、非比例減衰影響係数 α 、 β 、 ζ 、 η は1より小さい値であることから、これらの二乗項の結合でなっている $\{d_3\}$ 、 $\{a_3\}$ は2次のオーダーの補正項であり、実用的には無視しうるものと考えられる。

5. 応用例

以上で定式化した固有値解とその動的応答を非比例減衰を持つ2自由度系と9自由度系に対して適用し、その精度を検討する。

5.1 2自由度系 図-1に示す一般的な2自由度系に対し、まず、以下の4つの無次元パラメータを定義する。

$$\mu = m_b/m_a, \quad \tau = \omega_b/\omega_a \quad (63), (64)$$

$$\nu = \xi_b/\xi_a, \quad \xi_b = c_b / (2\sqrt{k_b m_b}) \quad (65), (66)$$

ここに、 μ は質量比、 τ は振動数比、 ν は減衰比の比で $\nu \neq \tau$ のとき、系は非比例減衰系になる。 ξ_b はサブシステムbの減衰比である。運動方程式は次のように示される。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + 2\omega_a \xi_b \begin{bmatrix} 1/\nu + \mu\tau & -\mu\tau \\ -\mu\tau & \mu\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \omega_a^2 \begin{bmatrix} 1 + \mu\tau^2 & -\mu\tau^2 \\ -\mu\tau^2 & \mu\tau^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{m_a} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (67)$$

代表的な非比例減衰系の例として、4つの系を選び、表-1にその無次元パラメーター μ, ν, τ, ξ_b の値、あるいは、パラメータの変動範囲を示している。ケースAは構造物-equipment(同調した場合)⁶⁾、ケースBは構造物-TMD(Tuned Mass Damper)系⁷⁾、ケースCは弾性地盤上の構造物、ケースDはisolator-構造物⁸⁾の例である。

5.1.1 固有値解の定式化 提案した摂動法により固有値・固有ベクトルを、上に定義した4つのパラメーターとサブシステムaの質量 m_a を用いて以下のように陽な形で示すことができる。

まず、式(67)の非減衰系の振動数、減衰比、固有ベクトルは、それぞれ次のように得られる。

$$\omega_{\sigma i} = \omega_a \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (68)$$

$$\xi_{\sigma i} = \xi_b \{ (\tau^2 - \sigma_i^2)^2 + \mu\nu\tau\sigma_i^4 \} / \nu\sigma_i \{ (\tau^2 - \sigma_i^2) + \mu\tau^4 \} \quad (69)$$

$$\{y_{\sigma i}\} = \frac{1}{\sqrt{[1 + \mu\{\tau^2/(\tau^2 - \sigma_i^2)\}^2]m_a}} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tau^2/(\tau^2 - \sigma_i^2) \end{Bmatrix} \quad (70)$$

ここで、

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} [(1 + \tau^2 + \mu\tau^2) \mp \sqrt{(1 + \tau^2 + \mu\tau^2)^2 - 4\tau^2}] \quad (71)$$

以上の $\omega_{\sigma i}, \xi_{\sigma i}, \{y_{\sigma i}\}$ を式(26)-(36)に代入すると、以下のように2自由度系の擬似振動数、擬似減衰比、固有ベクトルが求められる。

$$\omega_i = \omega_{\sigma i} \sqrt{1 + \alpha_i}, \quad \xi_i = \xi_{\sigma i} \sqrt{1 + \beta_i}, \quad i, k = 1, 2, (i, k) = (1, 2), (2, 1) \quad (72), (73)$$

$$\{y_i\} = \{y_{\sigma i}\} + \xi_{ik} \{y_{\sigma k}\} + j \eta_{ik} \{y_{\sigma k}\} \quad (74)$$

ここに、

$$\alpha_i = \frac{\rho^2}{\bar{D}_{ik}} \left[(\sigma_k^2 - \sigma_i^2) \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{4\bar{D}_{ik}} (\sigma_k^2 - \sigma_i^2) \right\} + \frac{\rho^2}{4\bar{D}_{ik}(1 - \xi_{\sigma i}^2)} [\xi_{\sigma i}(\sigma_k^2 - \sigma_i^2) - 2\sigma_k(\xi_{\sigma i}\sigma_k - \xi_{\sigma k}\sigma_i)]^2 \right] \quad (75)$$

$$\beta_i = \frac{1}{1 + \alpha_{ik}} \left[\frac{\rho^2}{\bar{D}_{ik}} \frac{\sigma_k}{\xi_{\sigma i}} (\xi_{\sigma i}\sigma_k - \xi_{\sigma k}\sigma_i) - 2 + \frac{\rho^2 \sigma_k}{\bar{D}_{ik} \xi_{\sigma i}} (\xi_{\sigma i}\sigma_k - \xi_{\sigma k}\sigma_i) - \alpha_{ik} \right] \quad (76)$$

$$\xi_{ik} = [\sigma_i \xi_{\sigma i} (\sigma_i^2 + \sigma_k^2) - 2\xi_{\sigma k} \sigma_i^2 \sigma_k] \rho / \bar{D}_{ik} \quad (77)$$

$$\eta_{ik} = [\sigma_i \sqrt{1 - \xi_{\sigma i}^2} (\sigma_i^2 - \sigma_k^2)] \rho / \bar{D}_{ik} \quad (78)$$

$$\bar{D}_{ik} = 2(\sigma_i^2 + \sigma_k^2) \{ \xi_{\sigma i} \sigma_i - \xi_{\sigma k} \sigma_k \}^2 + (\sigma_i^2 - \sigma_k^2) \{ (\sigma_i^2 - \sigma_k^2) - 2(\xi_{\sigma i}^2 \sigma_i^2 - \xi_{\sigma k}^2 \sigma_k^2) \} \quad (79)$$

$$\rho = 2 \frac{\xi_b(\tau - \nu)}{\nu\tau} \sqrt{\frac{\mu\tau^4}{(1 + \tau^2 + \mu\tau^2)^2 - 4\tau^2}} \quad (80)$$

以上に示したように、2自由度非比例減衰系の複素固有値、複素固有モードの2次のオーダーまでの摂動解を近似解ではあるが解析的な形(closed form solution)で表わすことができる。

5.1.2 固有値解と時間歴応答の精度 図-3は、ある1つのパラメーターを変化させたときの厳密固有値解に対する摂動解の誤差(パーセント値)を示している。ここで、 L と θ は図-2のように定義される固有ベクトルの絶対値と位相である。誤差の中で位相に対するものが一番大きい、ケースAを除くと、誤差は

10%以下である。ケースAの質量比の小さい構造物-equipmentの場合には、強い非比例減衰のため誤差が大きくなり、本摂動法の適用は難しいとみられるが（この場合には、質量比 μ を摂動パラメータとしている文献6の手法が適している）、質量比 μ が0.005以上であれば、その誤差が小さくなり、適用可能であると言える。図-4は減衰の非比例性の影響を示す変数 α 、 β 、 ζ 、 η の変化をそれぞれのケースに対して示している。ここでは、4つケースのいずれでも η が α 、 β 、 ζ より著しく大きい値であることから、減衰の非比例性は固有ベクトルの虚数部に及ぼす影響が最も大きいことが分かる。また、図-4の絶対値をとった曲線は、それぞれのケースの誤差の曲線（図3）と似ている点から、非比例減衰性影響係数（ α 、 β 、 ζ 、 η ）、とくに η の値をみることにより本摂動法の適用性がある程度予測できるといえる。

近似法は、その使用にあたってはその適用範囲が使用者に理解できることが望ましい。本手法では前述のように無次元量である α 、 β 、 ζ 、 η の値を適用範囲の目安に使うことができる点の特長の1つである。図3、4とを対比してみた場合、 η の値が0.3以下であるならば固有値解の誤差は10%以下であり、実用上大きな問題が生じないと思われる。ただし、対象とする問題で要求される精度が異なるので0.3という値はあくまでも目安である。

図-5、6は、ケースA（構造物-equipment系）の質量比 μ が各々0.2%、0.5%のとき、構造物（質点1、図1）が共振正弦波外力を受けたときの構造物（ $m_a=3\text{kg}$ とする）の強制振動応答を示している。図-7はケースB（構造物-TMD系）の振動数比 τ が0.985のとき、構造物、TMDともに初期変位1を与えたときの自由振動応答を示している。図5、6、7において上から3つの図a、b、cは、それぞれ厳密複素固有モード、摂動モード、減衰マトリックスの非対角要素を無視して求めた実数モード（比例減衰系5、6、7モード）を用いた応答である。4、5番目の図は後者2つの手法による応答の誤差を示している。ケースAの質量比0.2%（図-5）では摂動法による固有値解の誤差が大きいためその応答の精度も少し悪くなるが、質量比0.5%（図-6）の場合はよい結果が得られているといえる。非比例減衰成分を無視した実数モードによる応答（図(c)）は、図5、6、7のいずれのケースにおいてもかなり精度が落ちている。

5.2 9自由度系への適用 他の多自由度系の例として図-8に示すTMDを有するカンチレバー系を用いる。表-2は各節点の質量、減衰、剛性を示し、TMDを除く系は比例減衰系であって、そのモード減衰比は2%とした。ここで、TMDの質量は第一次モード質量の1%とし、TMDの減衰比に関しては5%、6.4%、7.5%、10%の4つのケースを考える。TMDの減衰比が6.4%の場合（ケース2）はしたがって2自由度モデルのケースB（表1）に近いものとなっている。

9つの固有モードにおける疑似振動数、疑似減衰比、固有ベクトルの絶対値と位相に対する最大パーセント誤差及び非比例減衰係数 α 、 β 、 ζ 、 η の最大値を表-3にケース1～4について示す。 α 、 β 、 ζ 、 η が大きくなると、2自由度系の場合と同じように、減衰の非比例性は主として固有ベクトルの虚数部に及ぼすことが分かる。ケース2、4に対して第1次モードの振動数と共振する正弦波の外力を第6節点に加えた時の、第8節点の強制振動応答を図-9、10に示す。図9、10の(a)、(b)、(c)図は図5、6、7のと同じ意味である。

ケース2は前述のように2自由度系の構造物-TMD系（ケースB）とほぼ同等であるため、表3の結果は図3b)のとはほぼ同じである。また、図9の摂動解による応答の誤差も小さい。ケース4（TMDの減衰比：10%）の場合は固有値解（表3）と応答（図10）ともに、かなり誤差がでている。これは系が強い非比例性減衰を持つためと考えられる。図5、6、7の結果同様、図9、10において非比例減衰成分を無視した実数モードを用いたときの誤差は摂動解の比較数倍程度になっている。

6. まとめ

（1）やや弱い非比例性の減衰を持つ系の複素固有ベクトルならびに複素固有値を、比例減衰系の固有値解を基とする2次摂動法により求める解析法を提案した。ここで、非比例減衰が固有値解に及ぼす影響を陽

に分かる形で示した。そして、摂動モードを用いた強制振動による動的応答、比例減衰系モードによる応答と非比例減衰による応答とに分けて示した。また、2自由度系に対しては、本摂動法を用いて固有値解を5つのシステムパラメーターを用いて表示した。

(2) 2自由度系と9自由度系を例として、本摂動法の適用性を検討した。非比例減衰の影響は、疑似振動数、疑似減衰比、固有ベクトルの絶対値よりは、固有ベクトルの位相に主に及ぶことが分かった。ここで扱った例では、固有ベクトルの虚数部に及ぼす非比例減衰の影響を示す係数 η が0.3以下ならば、固有値解とその応答の誤差は10%以下であり十分な精度を有することが示された。

(3) 本摂動法によるモード解析法は、 $2n \times 2n$ マトリックスを用いるstate-vectorアプローチによる複素モード解析法に比べ、自由度の大きい系においてその計算時間が短くなること($n=9$ のとき、計算時間は約3分の1であり、 n が大きくなるとその差はさらに広がる)、非比例減衰の固有モード、動的応答に及ぼす影響が明快につかみやすいことなどの利点を持つと考えている。また、本摂動法は多自由度系-TMD系でのTMDの設計で必要となるreanalysis、あるいは非比例減衰系構造物のパラメータ同定などで有効に利用できると期待される。

なお、本論文は文献9をさらに発展させたものであり、その一般的定式化、2自由度系についての詳細な検討は各々文献10、11を参考にされたい。

7. 参考文献

1. Foss, K.A. : Coordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, ASME J. Appl. Mech., Vol.25, 361-364, 1958
2. Caughey, T.K. and O'Kelly, E.J. : Effect of Damping on the Natural Frequencies of Linear Dynamic Systems, J. Acoustical Soc. of America, Vol.33, No.11, 1458-1461, 1961
3. Chung, K.R. and Lee, C.W. : Dynamic Reanalysis of Weakly Nonproportionally Damped System, J. Sound Vib., Vol.111, No.1, 37-50, 1986
4. Meirovitch, L. and Ryland, G. : A Perturbation Technique for Gyroscopic Systems with Small Internal and External Damping, J. Sound Vib., Vol.100, No.3, 393-408, 1985
5. Caughey, T.K. and O'Kelly, E.J. : Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, ASME J. Appl. Mech., Vol.32, 583-588, 1965
6. Igusa, T and Der Kiureghian A. : Dynamic Characterization of Two-Degree-of-Freedom Equipment-Structure Systems, ASCE J. Eng. Mech., Vol.111, No.1, 1-19, 1985
7. Warburton, G.B. and Ayorinde, E.O. : Optimum Absorber Parameters for Simple Systems, J. Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol.8, 197-217, 1980
8. Constantinou, M.C. : A Simplified Analysis Procedure for Base-Isolated Structures on Flexible Foundation, J. Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol.15, 963-983, 1987
9. B. パチェコ、金熙恵、藤野陽三 : 摂動法による非比例減衰系の固有値解析とモード解析への応用、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、Vol.12, pp.377-382、1988
10. Pacheco, B.M. and Fujino, Y. : Perturbation Technique to Account for Damping Nonproportionality in Modal Dynamic Analysis, Proc. JSCE(submitted for possible publication)
11. Pacheco, B.M. and Fujino, Y. : Explicit Formulas for Complex Modes of Two-Degree-of-Freedom(2DOF) System, Proc. JSCE(submitted for possible publication)

(1989年10月12日受付)

表 1 4つの2自由度系モデルとそのパラメータ

CASE	A	B	C	D
"a"	structure	structure	ground	isolator
"b"	equipment	TMD	structure	structure
$\mu = \frac{m_b}{m_a}$	0.002 ~ 0.01	0.01	0.30	5.00
$\nu = \frac{\xi_b}{\xi_a}$	0.20	3.20	0.10 ~ 2.00	0.10 ~ 2.00
$\tau = \frac{\omega_b}{\omega_a}$	1.00	0.70 ~ 1.30 *	1.00	1.00
ξ_b	0.01	0.064	0.02	0.02

* Warburton's optimized τ is 0.9868

表 2 9自由度系の4つのケースのパラメータ

	CASE 1	CASE 2	CASE 3	CASE 4
$m_1 \sim m_8$	1 kg			
m_9	0.04286 kg			
$k_1 \sim k_8$	340 kg/s ²			
k_9	0.4955 kg/s ²			
$c_1 \sim c_8$	4 kg/s			
c_9	0.01457	0.01865	0.02186	0.02914
damping ratio of TMD	5%	6.4%	7.5%	10%

表 3 9自由度モデル（ケース1～4）における振動解の誤差 ε と非比例減衰による補正係数 α 、 β 、 ξ 、 η の最大値

CASE	CASE 1	CASE 2	CASE 3	CASE 4
$\varepsilon_{\omega \text{ Max}}$	0.011%	0.026%	0.068%	0.371%
$\varepsilon_{\xi \text{ Max}}$	0.049%	0.128%	0.356%	2.679%
$\varepsilon_{L \text{ Max}}$	0.241%	0.502%	1.220%	5.895%
$\varepsilon_{\theta \text{ Max}}$	3.633%	4.851%	7.629%	16.760%
α_{Max}	0.0057	0.0096	0.0151	0.0320
β_{Max}	0.0072	0.0132	0.0212	0.0462
ξ_{Max}	0.0089	0.0136	0.0197	0.0375
η_{Max}	0.1971	0.2299	0.2872	0.4166

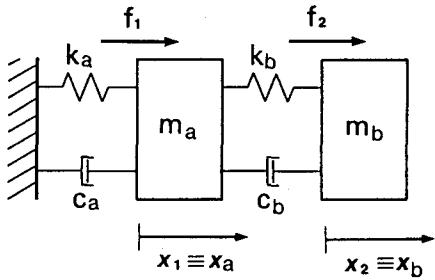


図 1 2自由度線形系モデル

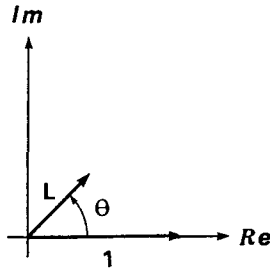


図 2 複素モードにおけるLと θ の定義

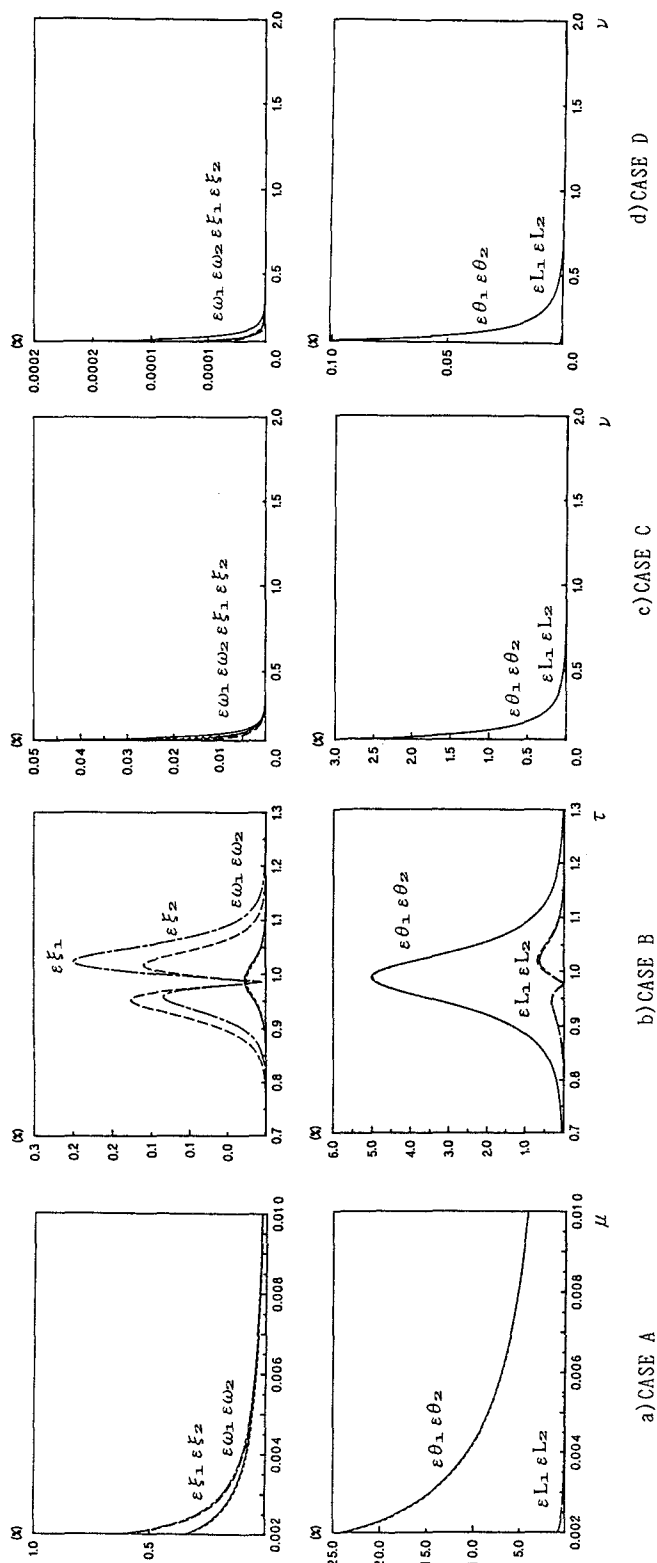


図 3 2 自由度モデルにおける固有値と複素固有モードの誤差 ε (%)

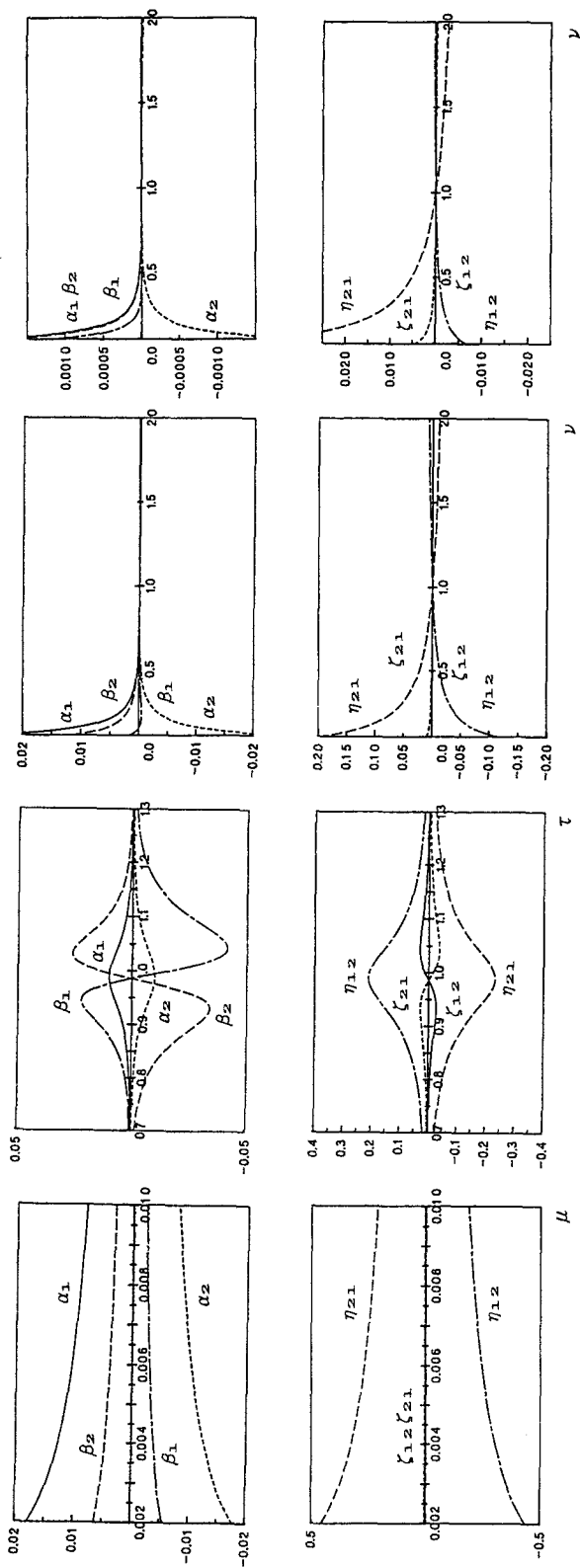


図4 固有値と複素固有モードにおよぼす非比例減衰の影響

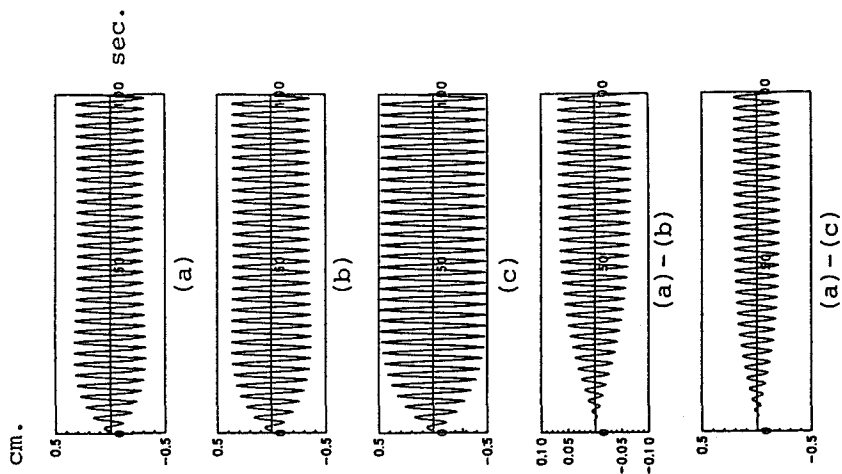


図5 質点1 (図1) における時刻歴応答
(a) 厳密解 (b) 振動解による応答 (c) 非比例減衰成分を無視したときの応答 (2 自由度系、CASE A、 $\mu=0.002$ 、 $f=0.5\sin 1.97t$ (kgf))

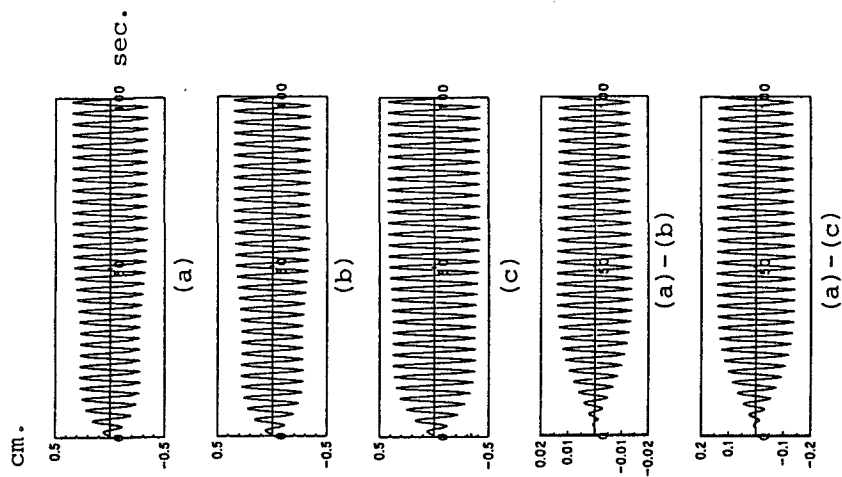


図6 質点1 (図1) における時刻歴応答
(a) 厳密解 (b) 振動解による応答 (c) 非比例減衰成分を無視したときの応答 (2 自由度系、CASE A、 $\mu=0.005$ 、 $f=0.5\sin 1.97t$ (kgf))

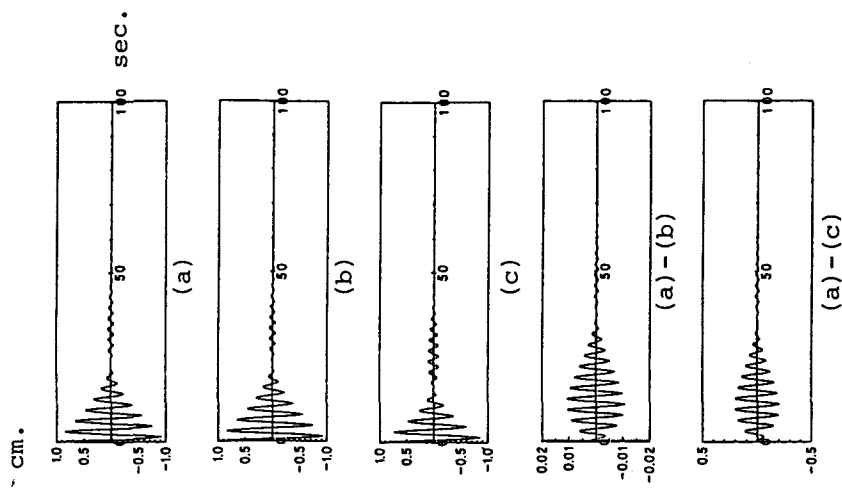


図7 質点1 (図1) における時刻歴応答
(a) 厳密解 (b) 振動解による応答 (c) 非比例減衰成分を無視したときの応答 (2 自由度系、CASE B、 $\tau=0.985$ 、 $X_{01}=X_{02}=1$ cm)

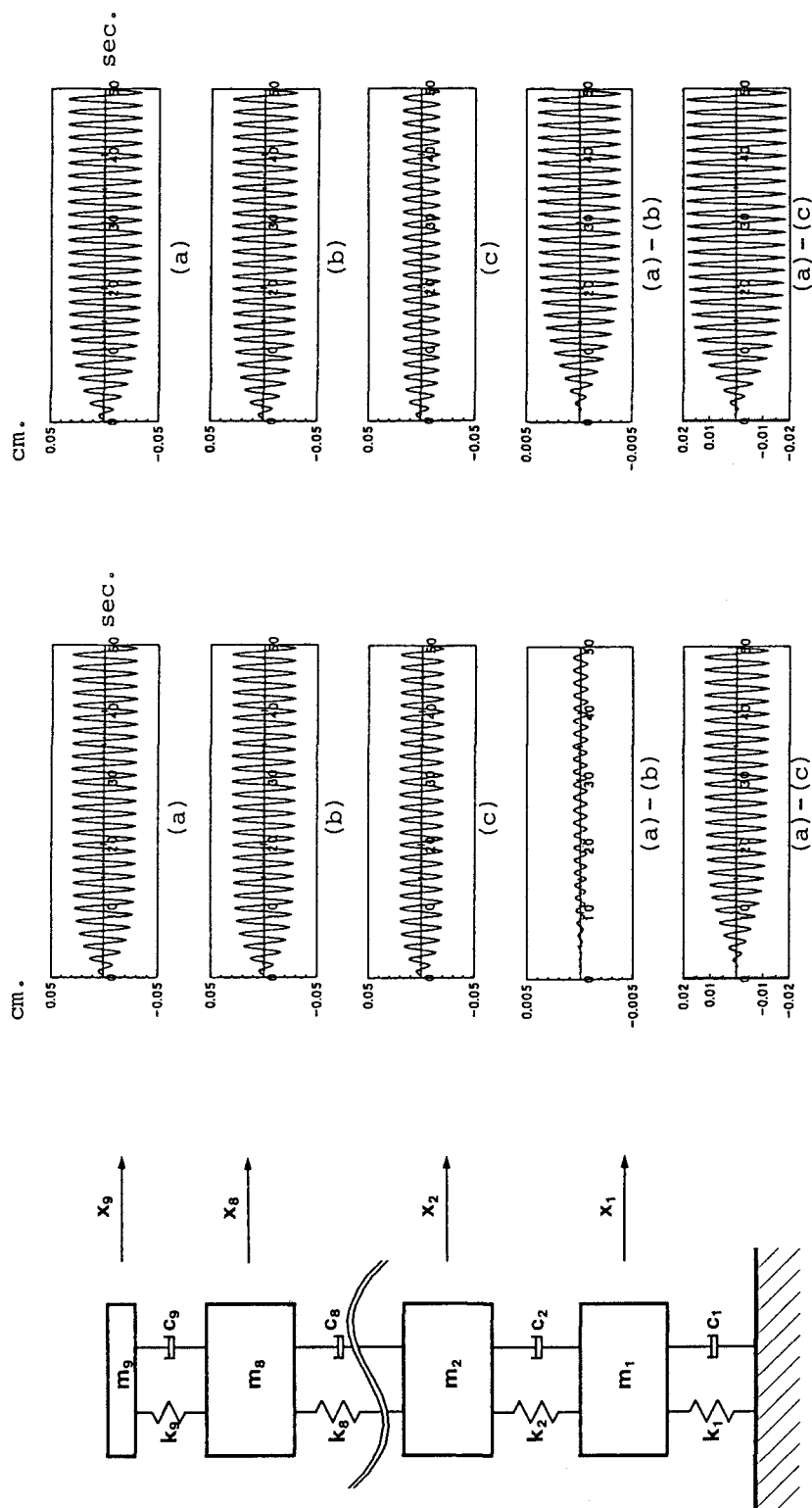


図 8 9 自由度線形系モデル

図 9 質点 8 (図 8) における時刻歴応答
(a) 厳密解 (b) 振動解による応答 (c) 非比例減衰成分を無視したときの応答 (9 自由度系、CASE 2、 $f=0.167\sin 3.23t$ (kgf))

図 10 質点 8 (図 8) における時刻歴応答
(a) 厳密解 (b) 振動解による応答 (c) 非比例減衰成分を無視したときの応答 (9 自由度系、CASE 4、 $f=0.167\sin(3.23t)$)