

2次元非線形スロッシング問題の境界要素解析

A BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS FOR TWO-DIMENSIONAL
NONLINEAR SLOSHING PROBLEMS

大山 巧*・藤井邦雄**

By Takumi OHYAMA and Kunio FUJII

Recently, TSD (Tuned Sloshing Damper) has been gained interest as an effective installation for reducing vibration of various structures. In order to estimate its efficiency in advance, it is significant to simulate sloshing phenomena accurately. In this paper, a boundary element method based on nonlinear potential theory is proposed for analyzing two-dimensional sloshing problems. The numerical results are compared with experimental data given by Sun et al. to confirm the validity of the proposed method. Good agreement is shown even for complicated wave motion. It is found that nonlinear analysis is indispensable for predicting the response of the wave motion and the induced hydrodynamic force.

1. ま え が き

容器内の流体が、強制振動外力を受けた場合の流体の挙動（スロッシング）を把握することは、石油貯蔵タンク等の設計上極めて重要であり、これまでに数多くの研究がなされてきた。特に、容器の形状が円筒形や矩形のように単純で、液面振幅が比較的小さい場合には、一般にHousner理論¹⁾を用いて検討されている。また、容器の形状の任意性や発生する波の非線形性を考慮するために、FEM²⁾やBEM³⁾を用いた数値解析法も提案されている。

さて、近年、風による建物の振動を抑えることを目的として、TSD (Tuned Sloshing Damper)あるいはTLD (Tuned Liquid Damper)と呼ばれるスロッシング現象を利用した制振装置（以下、本論文ではTSDと称する）が提案されている⁴⁾。風による振動では、一般に地震に比べてかなり低い振動数が対象になり、それに対応して容器内の液深と容器の水平方向の代表長さの比を石油貯蔵タンク等に比べてかなり小さくする必要がある。その結果、容器内には孤立波やクノイド波に似た非線形性の強い波が発生し、従来のタンク内でのスロッシングのような微小振幅重複波的な様相とは異なる様相を呈する。このような現象に関して、清水・葉山⁵⁾は非線形長波理論を用いた数値解析法を提案し、模型実験結果との比較からその手法の妥当性を検証している。また、Lepelletier and Raichlen⁶⁾は、数値解析および模型実験により定常状態に至るまでの過渡的な水面応答に着目した研究を行なっている。これらの数値解析法は、

* 清水建設(株) 環境技術研究部 (〒135 東京都江東区越中島3丁目 4-17)

** 清水建設(株) 環境技術研究部長 (〒135 東京都江東区越中島3丁目 4-17)

流速成分の鉛直方向の変化が微小であるとした長波近似を用いたものであるが、解析結果が実験結果と良く一致していることから^{5), 6)}、風による振動を対象にした低振動数領域では実用上十分妥当な手法と考えられる。ただし、今後TSDの実用化を図る上で、地震時の安全性についても検討する必要がある、そのような高振動数領域では、水面付近の流体運動が容器底面付近の流体運動に比べて顕著になるため、長波近似を適用することができなくなる。

本研究は、大山^{7), 8), 9)}が海洋における孤立波およびクノイド波の変形の問題を対象に開発した非線形波動の解析法を応用して、2次元非線形スロッシング問題を理論的に検討するものである。この手法では、問題を速度ポテンシャルに関する境界値問題として定式化しているため、長波理論に基づいた前述の手法のような適用制限はなく、全ての振動数領域で用いることができる。本論文では、解析手法について述べるとともに、矩形タンクを用いたSun・Fujinoら¹⁰⁾の模型実験結果との比較から解析手法の妥当性を検証する。さらに、波の非線形性が流体力の応答に及ぼす影響について論じる。

2. 解析理論

(1) 基礎方程式と境界条件

2次元矩形容器内に液深 h の流体があり、容器が強制振動を受けるときの流体運動を考える。図-1に示すように、容器中央の静水面上に原点をとり、水平方向に x 軸、鉛直上向きに z 軸を定義する。流体を非圧縮、非粘性流体、流体運動を非回転と仮定し、速度ポテンシャル $\phi(x, z, t)$ により流体運動を記述する。 ϕ に関する基礎方程式と境界条件は、以下のように表される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\text{on } Sw_1, Sw_2) \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{at } z = -h) \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \cos \beta \quad (\text{on } S_F) \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 \right\} + \gamma \phi + a_x x + g \eta = 0 \quad (\text{on } S_F) \dots\dots\dots(5)$$

ただし、 $\eta(x, t)$ は鉛直上向きを正としたときの平均水面からの水面変動量、 n, s は流体領域 Ω を取り囲む境界線上での外向き法線方向および接線方向、 β は水面上における法線ベクトルと鉛直軸とのなす角度、 a_x は容器の水平入力加速度、 γ は減衰係数である。式(1)は連続方程式、式(2)、(3)は容器壁面および底面における不透過条件、式(4)、(5)は自由表面における運動学的条件および力学的条件(圧力方程式)を表している。

式(5)における $\gamma \phi$ は表面波の減衰を表す項であり、従来提案されている解析モデル^{3), 5), 6), 11)}と同様に速度に比例する等価線形減衰項として評価している。 γ の値は、ほとんどの場合が実験的に決められているが、ここではLepelletier and Raichlen⁶⁾にならい、以下のように評価する。

$$\gamma = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\nu \omega}{2}} \left(1 + \frac{2h}{b} + C \right) \dots\dots\dots(6)$$

ただし、 b は容器の幅、 ν は流体の動粘性係数、 C はMiles^{12), 13)}により提案されているSurface Contaminationによる減衰を表す。 C の値は、流体の性質等により理論上0から2の間で変化するが、Miles¹²⁾はガラス容器の中に蒸留水を入れた場合の実験結果が $C=1$ に対応することを確認している。

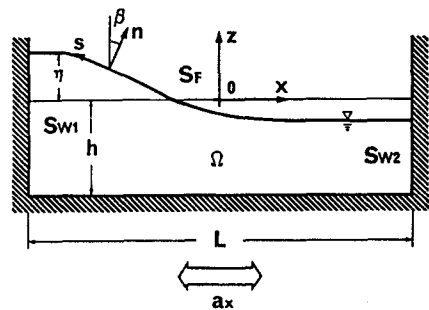


図-1 座標系と記号の定義

また、 $C=1$ とした Lepelletier and Raichlen⁶⁾の解析結果が実験値と良く一致していることから、本研究でも C の値は常に1とする。

(2) 境界積分方程式

式(1)より ϕ が調和関数であることから、流体領域 Ω に2次元のグリーン公式を適用する。このとき、 Ω を取り囲む境界面 S 上の点 $P(x_p, z_p)$ における速度ポテンシャル $\phi(P)$ は以下のように表せる。

$$\phi(P) = -\frac{1}{\alpha^*(P)} \int_S \left\{ \phi(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} G(P, Q) \right\} ds_Q \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r} + \ln \frac{1}{r'} \right) \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (z_q - z_p)^2} \\ r' &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (z_q + z_p + 2h)^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ただし、 $Q(x_q, z_q)$ は S 上の点の座標を表す。また式(7)の係数 $\alpha^*(P)$ は、点 P の両側の境界線のなす角を $\alpha(P)$ とするととき以下のように表される。

$$\alpha^*(P) = \begin{cases} \alpha(P) & (z_p \neq -h) \\ 2\alpha(P) & (z_p = -h) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(10)$$

式(7)に圧力方程式(5)以外の境界条件式(2)～(4)を代入し、さらに $z = -h$ で $\partial G / \partial n = 0$ であることを考慮すると、次式が得られる。

$$\phi(P) = -\frac{1}{\alpha^*(P)} \left\{ \int_{SFUSW1USW2} \phi \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int_{SF} G \frac{\partial \eta}{\partial t} \cos \beta ds \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

また、圧力方程式(5)については、重みつき残差法により境界積分方程式に変換する。式(5)に式(4)を代入し、両辺に任意の重み関数 Θ をかけ S_F 上で積分することにより、次式を得る。

$$\int_{SF} \Theta \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \cos \beta \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 \right) + \gamma \phi + a_x x + g \eta \right\} ds = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

(3) 積分方程式の空間的離散化

境界積分方程式(11)、(12)を線形要素を用いて空間的に離散化する。図-2に示すように、自由表面 S_F と直立壁面 S_{W1} 、 S_{W2} に節点を配置し、 j 番目節点と $j+1$ 番目節点で構成される要素の番号を j とする。ただし、 N 番目要素(N :全節点数)は N 番目と1番目の節点により構成されるものとする。 S_F 、 S_{W1} 、 S_{W2} の要素分割数をそれぞれ N_F 、 N_{W1} 、 N_{W2} とすると、 $N = N_F + N_{W1} + N_{W2} + 1$ である。 j 番目要素内の諸量の分布を次のように一次関数で近似する。

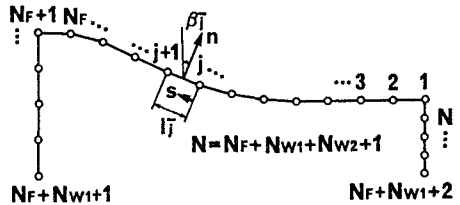


図-2 境界面の要素分割

$$\left. \begin{aligned} \phi &= N_j^T \phi_j, \quad \phi_j^T = (\phi_j \quad \phi_{j+1}) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= N_j^T (\phi_t)_j, \quad (\phi_t)_j^T = \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_j \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{j+1} \right) \\ \eta &= N_j^T \eta_j, \quad \eta_j^T = (\eta_j \quad \eta_{j+1}) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= N_j^T (\eta_t)_j, \quad (\eta_t)_j^T = \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_j \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{j+1} \right) \\ \Theta &= N_j^T \Theta_j, \quad \Theta_j^T = (\Theta_j \quad \Theta_{j+1}) \\ N_j^T &= (1 - s/l_j \quad s/l_j) \end{aligned} \right\} \quad \text{(on } j\text{-th element)} \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\dots\dots\dots(14)$$

ただし、 l_j は j 番目要素の長さ、 s は各要素の接線方向を表す部分座標であり、肩文字の T はベクトルの転置を表す。

式 (11)、(12) に現われる境界面上での積分を各要素上での積分の和で表し、式 (13) を代入する。さらに、式 (11) における点 P を各節点に一致させることにより、以下のような離散化方程式を得る。

$$\alpha_i^* \phi_i + \sum_{j=1}^{NF+NW1} A_{ij}^T \phi_j + \sum_{j=NF+NW1+2}^N A_{ij}^T \phi_j - \sum_{j=1}^{NF} \cos \beta_j B_{ij}^T (\eta_i)_j = 0 \quad (i = 1 \sim N) \quad (15)$$

$$A_{ij} = \int_0^{1j} N_j^T \frac{\partial G}{\partial n} ds, \quad B_{ij} = \int_0^{1j} N_j^T G ds \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{NF} \Theta_j^T \left[\int_0^{1j} N_j N_j^T ds (\phi_i)_j + \frac{1}{2} \{ \cos^2 \beta_j \int_0^{1j} N_j N_j^T (\eta_i)_j N_j^T ds (\eta_i)_j \} \right. \\ \left. + \frac{1}{1j^2} \int_0^{1j} N_j ds E^T \phi_j E^T \phi_j \right] + \int_0^{1j} N_j N_j^T ds \{ \gamma \phi_j + a_x X_j + g \eta_j \} = 0 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \\ X_j &= \begin{pmatrix} x_j & x_{j+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式 (16) における要素内のグリーン関数の積分 A_{ij} 、 B_{ij} は、解析的に求められ、特別な特異点処理は必要としない³⁾。また式 (17) を導く際、 $\partial \phi / \partial s$ は要素内で一定とし、 $(\partial \phi / \partial s)_j = (\phi_{j+1} - \phi_j) / 1j$ と評価している。なお、自由表面と直立壁面との交点に配置した 1 番目と $N_F + 1$ 番目の節点では、 $\partial \phi / \partial n$ が不連続になるが、これは境界面の法線方向 n の不連続性によるものであり、 ϕ の連続性は保たれている。従って ϕ を未知数とした本解析法では、これらの節点についても他の節点と同様に取り扱うことができ、二重節点の使用などの特別な処理を行う必要はない。

式 (17) における各要素内での形状関数の積分は簡単に計算でき、以下のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{1j} N_j ds &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \int_0^{1j} N_j N_j^T ds = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \int_0^{1j} N_j N_j^T (\eta_i)_j N_j^T ds &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3(\eta_i)_j + (\eta_i)_{j+1} & (\eta_i)_j + (\eta_i)_{j+1} \\ (\eta_i)_j + (\eta_i)_{j+1} & 3(\eta_i)_{j+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式 (17) に式 (19) を代入し、重み関数の節点値 Θ_j ($j = 1 \sim N_F + 1$) について整理すると、次式を得る。

$$\sum_{j=1}^{NF+1} \alpha_j \Theta_j = 0 \quad (20)$$

ただし、 α_j ($j = 1 \sim N_F + 1$) は以下に示す通りである。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 \{ 2 \{ (\partial \phi / \partial t)_1 + \gamma \phi_1 + a_x x_1 + g \eta_1 \} + (\partial \phi / \partial t)_2 + \gamma \phi_2 + a_x x_2 + g \eta_2 \} \\ &\quad + b_1 \{ 3 (\partial \eta / \partial t)_1^2 + 2 (\partial \eta / \partial t)_1 (\partial \eta / \partial t)_2 + (\partial \eta / \partial t)_2^2 \} + c_1 (\phi_2 - \phi_1)^2 \\ \alpha_j &= a_{j-1} \{ (\partial \phi / \partial t)_{j-1} + \gamma \phi_{j-1} + a_x x_{j-1} + g \eta_{j-1} \} + 2 \{ (\partial \phi / \partial t)_j + \gamma \phi_j + a_x x_j \\ &\quad + g \eta_j \} + a_j \{ 2 \{ (\partial \phi / \partial t)_j + \gamma \phi_j + a_x x_j + g \eta_j \} + (\partial \phi / \partial t)_{j+1} + \gamma \phi_{j+1} \\ &\quad + a_x x_{j+1} + g \eta_{j+1} \} + b_{j-1} \{ (\partial \eta / \partial t)_{j-1}^2 + 2 (\partial \eta / \partial t)_{j-1} (\partial \eta / \partial t)_j \\ &\quad + 3 (\partial \eta / \partial t)_j^2 \} + b_j \{ 3 (\partial \eta / \partial t)_j^2 + 2 (\partial \eta / \partial t)_j (\partial \eta / \partial t)_{j+1} \\ &\quad + (\partial \eta / \partial t)_{j+1}^2 \} + c_{j-1} (\phi_j - \phi_{j-1})^2 + c_j (\phi_{j+1} - \phi_j)^2 \quad (j = 2 \sim N_F) \\ \alpha_{NF+1} &= a_{NF} \{ (\partial \phi / \partial t)_{NF} + \gamma \phi_{NF} + a_x x_{NF} + g \eta_{NF} \} + 2 \{ (\partial \phi / \partial t)_{NF+1} + \gamma \phi_{NF+1} \\ &\quad + a_x x_{NF+1} + g \eta_{NF+1} \} + b_{NF} \{ (\partial \eta / \partial t)_{NF}^2 + 2 (\partial \eta / \partial t)_{NF} (\partial \eta / \partial t)_{NF+1} \\ &\quad + 3 (\partial \eta / \partial t)_{NF+1}^2 \} + c_{NF} (\phi_{NF+1} - \phi_{NF})^2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$a_j = 1j/6, \quad b_j = 1j \cos^2 \beta_j / 24, \quad c_j = 1/4 1j \quad (22)$$

式 (20) が任意の重み関数について成り立つためには、次式を満足する必要がある。

$$\alpha_j = 0 \quad (j = 1 \sim N_F + 1) \quad (23)$$

(4) 逐次計算法

式(15)、(23)を各時間ステップで解くことにより、流体運動が追跡できる。 j 番目節点の時間ステップ n における η 、 ϕ 、 $\partial \eta / \partial t$ 、 $\partial \phi / \partial t$ の節点値を $\eta_j^{(n)}$ 、 $\phi_j^{(n)}$ 、 $(\partial \eta / \partial t)_j^{(n)}$ 、 $(\partial \phi / \partial t)_j^{(n)}$ と表し、これらを1ステップ前の値のまわりでテイラー展開する。そして、 $n-1$ ステップから n ステップまでの η 、 ϕ の増分 $\Delta \eta_j^{(n)}$ 、 $\Delta \phi_j^{(n)}$ を用いて $(\partial \eta / \partial t)_j^{(n)}$ 、 $(\partial \phi / \partial t)_j^{(n)}$ を表し、 $(\Delta t)^3$ 以上の項を微小項として無視することにより、次式が導かれる^{8)・9)}。

$$\eta_j^{(n)} = \eta_j^{(n-1)} + \Delta \eta_j^{(n)} \quad (j = 1 \sim N_F + 1) \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$(\frac{\partial \eta}{\partial t})_j^{(n)} = \frac{2\Delta \eta_j^{(n)}}{\Delta t} - (\frac{\partial \eta}{\partial t})_j^{(n-1)} \quad (j = 1 \sim N_F + 1) \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$\phi_j^{(n)} = \phi_j^{(n-1)} + \Delta \phi_j^{(n)} \quad (j = 1 \sim N) \quad \dots\dots\dots(26)$$

$$(\frac{\partial \phi}{\partial t})_j^{(n)} = \frac{2\Delta \phi_j^{(n)}}{\Delta t} - (\frac{\partial \phi}{\partial t})_j^{(n-1)} - \frac{2\Delta \eta_j^{(n)}}{\Delta t} (\frac{\partial \phi}{\partial z})_j^{(n-1)} - (\frac{\partial \eta}{\partial t})_j^{(n-1)} \Delta (\frac{\partial \phi}{\partial z})_j^{(n)} \quad (j = 1 \sim N_F + 1) \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$\Delta (\frac{\partial \phi}{\partial z})_j^{(n)} = (\frac{\partial \phi}{\partial z})_j^{(n)} - (\frac{\partial \phi}{\partial z})_j^{(n-1)} \quad \dots\dots\dots(28)$$

ただし、 Δt は時間増分量である。式(27)の右辺第3項以降は、自由表面上の節点の空間的な変動に対応した非線形項である。大山⁷⁾は孤立波の伝播波形に関する解析結果から、これらの項を考慮することにより従来の方法³⁾に比べて解析精度が高められることを示した。式(24)～(27)を式(15)、(21)に代入すると、最終的に $\Delta \eta_j^{(n)}$ ($j = 1 \sim N_F + 1$)、 $\Delta \phi_j^{(n)}$ ($j = 1 \sim N$)に関する連立方程式を得る。ここで、 $\Delta \eta_j^{(n)}$ が未知数として方程式中に取り込まれているため、 n ステップの境界形状も未知になる。ただし、1ステップ前の境界形状を初期値として、境界形状が収束するまで同一ステップで計算を繰り返すことにより十分な精度で解が得られることを確かめたので⁷⁾、本解析でも同様の方法を用いることにした。また、式(27)、(28)中の $\partial \phi / \partial z$ は運動学的条件式(4)を用いて、以下のように求められる。

$$(\frac{\partial \phi}{\partial z})_j = (\frac{\partial \eta}{\partial t})_j \cos^2 \beta_j + (\frac{\partial \phi}{\partial z})_j \sin^2 \beta_j \quad \dots\dots\dots(29)$$

ただし、式(27)における n ステップの $(\partial \phi / \partial z)_j$ の値は、前に述べた同一ステップでの繰り返し計算の中で求める⁹⁾。

(5) 流体力の算定

TSDの制振装置としての性能を評価する場合、入力加速度に対する流体力の応答が重要になる。ここで言う流体力とは、具体的には容器両側の直立壁面に作用する力のことであり、以下にその算定法を示す。まず、壁面上に作用する圧力 p は、圧力方程式により次のように表すことができる。

$$p = -\rho \{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\frac{\partial \phi}{\partial z})^2 + \gamma \phi + a_x x + g z \} \quad \dots\dots\dots(30)$$

ただし、 ρ は流体密度である。両側壁面に作用する水平力の合力 F_x は、 p を用いて以下のように表される。

$$F_x = - \int_{S_{W1}} p dz + \int_{S_{W2}} p dz \\ = - \sum_{j=N_F+1}^{N_F+NW1} \int_0^{1j} p dz + \sum_{j=N_F+NW1+2}^N \int_0^{1j} p dz \quad \dots\dots\dots(31)$$

ϕ 、 $\partial \phi / \partial t$ が要素内で線形に分布するものと仮定すると、式(31)の積分は式(30)を用いて次のように表せる。

$$\int_0^{1j} p dz = -\frac{\rho}{2} \frac{1}{j} \{ (\frac{\partial \phi}{\partial t})_j + (\frac{\partial \phi}{\partial t})_{j+1} + \frac{(\phi_{j+1} - \phi_j)^2}{1j^2} + \gamma (\phi_j + \phi_{j+1}) + a_x L + g (z_j + z_{j+1}) \} \quad \dots\dots\dots(32)$$

ただし、 L は容器の長さを表し、また左辺第5項の符号は、節点が S_{W1} 上にあるとき－、 S_{W2} 上のとき＋をとる。

3. 模型実験との比較

(1) 波形および流体力に関する実験結果との比較

本解析法の妥当性を検証するために、Sun・Fujino ら¹⁰⁾による模型実験のうち非碎波状態での実験結果と本解析結果を比較をする。実験に用いた容器は長さ $L=59.0\text{ cm}$ 、幅 $b=33.5\text{ cm}$ で、これを振動台に載せて正弦波加振状態における容器壁面での水面変動量 η および流体力 F_x を測定している。ただし、液深 h は 3.0 cm で一定とし (スロッシングの第1次固有振動数 f_0 は 0.458 Hz)、加振振動数 f と加振振幅 A を変化させている。実験では一定の振動数で静水状態から加振し始め、定常振動状態に落ち着いてから、 η の最大値 η_{max} と最小値 η_{min} 、 F_x の最大値 $(F_x)_{max}$ およびそれらの時刻歴波形を測定している。解析においても実験と同様に静水状態を初期状態とし、 η と F_x が定常振動状態になるまで流体運動を追跡した。なお解析を行う際、要素分割数、時間増分量 Δt をどの程度にとればよいかが問題になる。大山⁸⁾は、孤立波およびクノイド波の解析におけるこれらの離散化パラメータの設定方法をすでに提案している。そして、波高水深比が大きいほどパラメータの値を小さくすることにより、十分な精度を有する結果が得られることを明らかにしている。本解析における離散化パラメータは、容器内で発生する波の波高が液深の60%以下になること (ただし、壁面ではこの約2倍の波高) を想定し、大山の結果 (参考文献8) の図-2) を用いて、 $N_F=40$ 、 $N_{W1}=N_{W2}=5$ 、 $\Delta t\sqrt{g/h}=0.36$ と設定した。

図-3～5は、定常振動状態における η と F_x の時刻歴波形

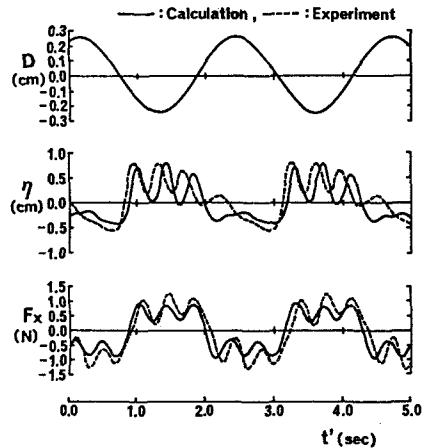


図-3 η と F_x の時刻歴波形
($f/f_0=0.95$)

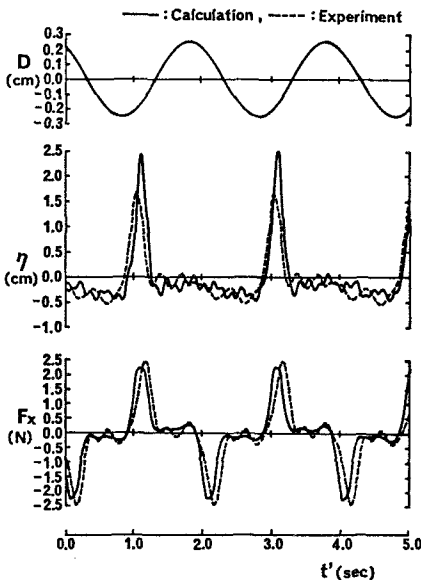


図-4 η と F_x の時刻歴波形
($f/f_0=1.10$)

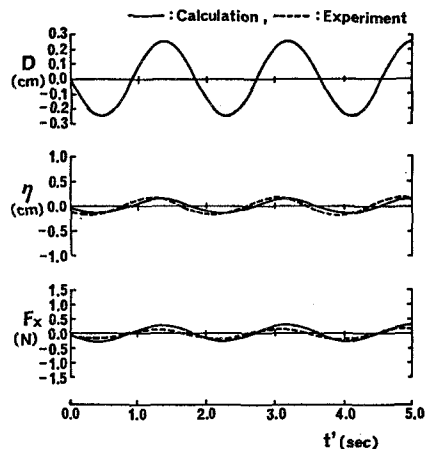
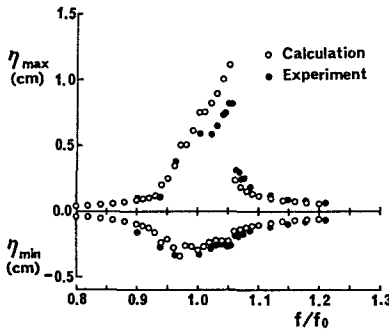
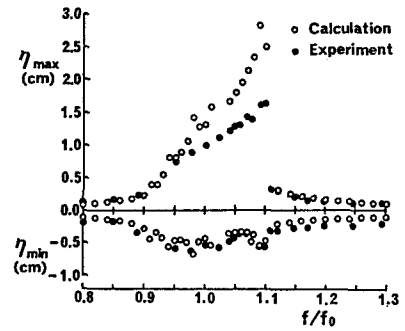


図-5 η と F_x の時刻歴波形
($f/f_0=1.198$)

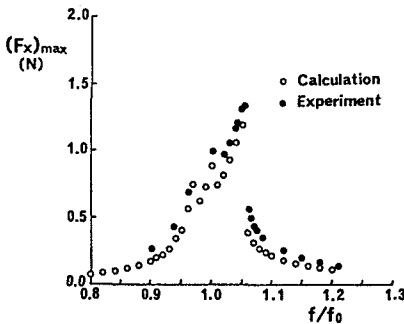


(a) $A = 0.1 \text{ cm}$

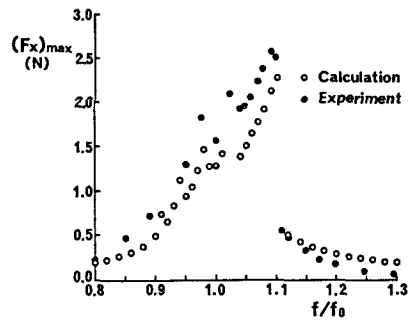


(b) $A = 0.25 \text{ cm}$

図-6 加振振動数による η_{max} , η_{min} の変化



(a) $A = 0.1 \text{ cm}$



(b) $A = 0.25 \text{ cm}$

図-7 加振振動数による $(F_x)_{max}$ の変化

形に関して実験結果と解析結果を比較したものである。ただし加振振幅 A は 0.25 cm で、 f/f_0 はそれぞれ 0.951 、 1.101 、 1.198 である。なお、図中に示される容器の水平変位 D の時刻歴波形（解析でも実験でも入力条件となる）を解析と実験で一致させることにより、両者の応答波形の位相を整合させている。図-5 に示す実験結果では η と F_x の振幅が他のケースに比べて小さく、応答波形はいずれも正弦波になっているのに対して、図-3、4 の実験結果には、複数の波の峰が存在したり、静水面からの峰の高さが谷の深さに比べて大きくなるといった波の非線形性の影響が顕著に現われている。このような波の非線形性は、解析結果にも明確に現われており、波形と位相に関する解析結果と実験結果の一致は極めて良好である。なお、図-4 に示す η_{max} の実験結果は、解析結果よりも小さくなっている。実験では、波高計を設置する関係で壁面から若干離れた位置で水面変動量を測定しており、この図に示すような波面勾配が大きくなる場合には、壁面における水面変動量よりも小さく評価しているものと思われる。

図-6、7 は、 $A = 0.1$ 、 0.25 (cm) の条件に対して、 η_{max} 、 η_{min} および $(F_x)_{max}$ の加振振動数 f と f_0 の比 f/f_0 に対する変化について、解析結果と実験結果を比較したものである。これらの応答特性の実験結果には、 η_{max} 、 $(F_x)_{max}$ の値が急激に変化する（以下、これをジャンプ現象⁵⁾と称する） f/f_0 が存在し、 A によりその値は変化している。そして解析結果は、このような加振振幅による応答特性の変化についても、実験結果と良く一致しているのがわかる。また、実験結果と解析結果には、ジャンプ現象が起こる振動数よりも低振動数側で、小さなピークが複数現われている。以上から、著者が海洋波の変形を解析する目的で提案した非線形波動解析の理論は、スロッシング問題にも十分適用できることが明らかになった。

(2) 波の非線形性の効果

波の非線形性が F_x の応答波形に及ぼす影響を把握することは、工学上重要な問題である。すなわち、この影響が工学的に見て無視できる程度であれば、Housner 理論を適用することにより直接等価質点系モデルに置き換えることが可能になる。そこで、線形理論に基づく解析を行ない、その結果を実験結果および非線形解析の結果と比較する。

波の非線形性は、速度ポテンシャルに関する境界値問題として定式化する場合、自由表面での境界条件式 (4)、(5) のみに現われることになる。そして、これを無視した線形理論では、式 (4)、(5) のかわりに、以下のような境界条件を与えればよい。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (On \ S_F) \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \gamma \phi + a_x x + g \eta = 0 \quad (On \ S_F) \quad \dots\dots\dots (34)$$

ただし自由表面 S_F は、非線形解析の場合とは異なり、 $z = 0$ の固定境界面として取り扱うことができる。式 (33)、(34) の境界条件に対応して、式 (15)、(21) は以下のように置き換えられる。

$$\alpha^*_{ij} \phi_i + \sum_{j=1}^{NF+NW1} A_{ij}^T \phi_j + \sum_{j=NF+NW1+2}^N A_{ij}^T \phi_j - \sum_{j=1}^{NF} B_{ij}^T (\eta_t)_j = 0 \quad (j = 1 \sim N) \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 [2 \{(\partial \phi / \partial t)_1 + \gamma \phi_1 + a_x x_1 + g \eta_1\} + (\partial \phi / \partial t)_2 + \gamma \phi_2 + a_x x_2 + g \eta_2] \\ x_j &= a_{j-1} [(\partial \phi / \partial t)_{j-1} + \gamma \phi_{j-1} + a_x x_{j-1} + g \eta_{j-1} + 2 \{(\partial \phi / \partial t)_j + \gamma \phi_j + a_x x_j \\ &\quad + g \eta_j\}] + a_j [2 \{(\partial \phi / \partial t)_j + \gamma \phi_j + a_x x_j + g \eta_j\} + (\partial \phi / \partial t)_{j+1} + \gamma \phi_{j+1} \\ &\quad + a_x x_{j+1} + g \eta_{j+1}] \\ x_{NF+1} &= a_{NF} [(\partial \phi / \partial t)_{NF} + \gamma \phi_{NF} + a_x x_{NF} + g \eta_{NF} + 2 \{(\partial \phi / \partial t)_{NF+1} + \gamma \phi_{NF+1} \\ &\quad + a_x x_{NF+1} + g \eta_{NF+1}\}] \end{aligned} \right\} \quad (j = 2 \sim N_F) \quad \dots\dots\dots (36)$$

式 (35) の A_{ij} 、 B_{ij} と式 (36) の a_j は、各時間ステップで計算し直す必要はなく、初期状態（静水状態）で計算していおけばよい。また逐次計算をする際、式 (28) の右辺第 3 項以降の非線形項も無視でき、式 (28) のかわりに次式を用いればよい。

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_j^{(n)} = \frac{2\Delta \phi_j^{(n)}}{\Delta t} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_j^{(n-1)} \quad (j = 1 \sim N_F + 1) \quad \dots\dots\dots (37)$$

図-8 は、 $A = 0.1, 0.25 \text{ cm}$ のときの f/f_0 に対する $(F_x)_{max}$ の特性を示したものである。前に述べたように、非線形解析結果および実験結果では、 $(F_x)_{max}$ がピークになる加振振動数は A が大きくなるほど高振

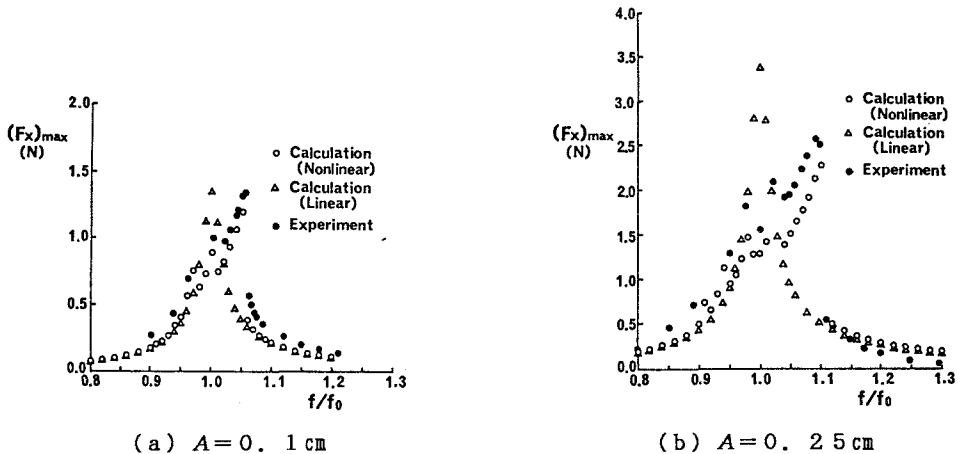


図-8 $(F_x)_{max}$ の特性に及ぼす波の非線形性の影響

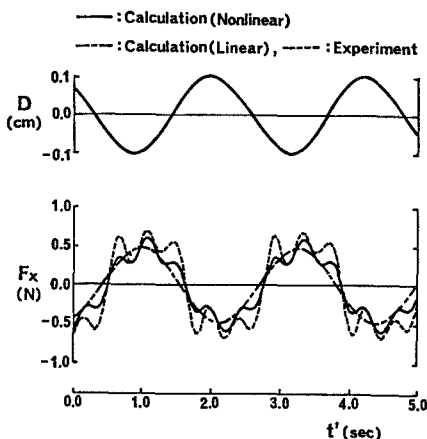


図-9 F_x の時刻歴波形に及ぼす
波の非線形性の影響
($A=0, 1\text{cm}$, $f/f_0=0, 962$)

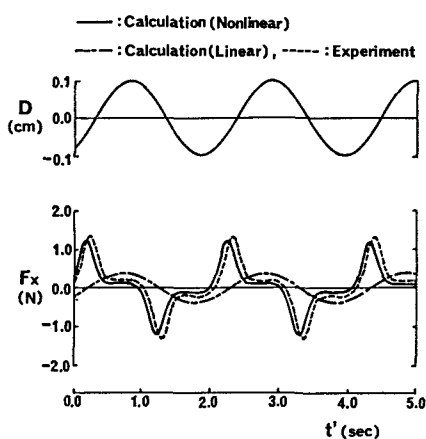


図-10 F_x の時刻歴波形に及ぼす
波の非線形性の影響
($A=0, 1\text{cm}$, $f/f_0=1, 051$)

動数側にずれるのに対して、線形解析の結果ではいずれも $f=f_0$ で $(F_x)_{max}$ はピークになる。これらの図からわかるように、線形解析結果は、ジャンプ現象が現われる振動数よりも高い振動数領域では、実験結果、非線形解析結果とほぼ一致しているが、制振装置として最も機能が発揮されると考えられる $(F_x)_{max}$ がピークになる振動数付近では、適用できなくなる。

図-9～11は、 $A=0, 1\text{cm}$ のときの F_x の時刻歴波形を示したものである。図-10が、 $(F_x)_{max}$ がほぼピークになるときの振動数に対応した結果を示したものであり、図-9、11はそれよりも低振動数側および高振動数側の結果を示している。線形解析結果から得られる波形は常に正弦波になるため、図-11に示される場合のような正弦波に近い応答波形については非線形解析結果、実験結果とよく一致するが、図-9のように1周期内に複数の峰を有する波形を表現することはできない。また、図-10からわかるように、 $(F_x)_{max}$ がほぼピークになる振動数では、線形解析結果は振幅、位相とも非線形解析結果および実験結果とはかなり異なった結果になっているのがわかる。以上から、 $(F_x)_{max}$ のジャンプ現象が起こる振動数よりも低振動数側の応答波形は、波の非線形性の影響を強く受け、この振動数領域では線形理論に基づく解析結果は適用できないことがわかる。

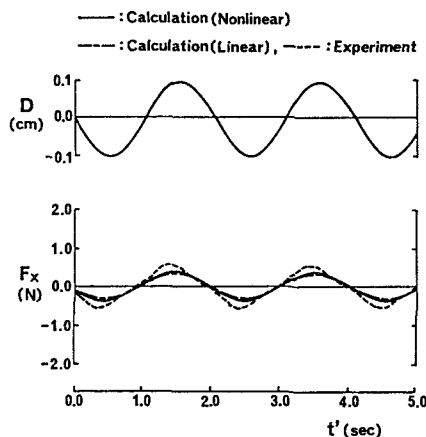


図-11 F_x の時刻歴波形に及ぼす
波の非線形性の影響
($A=0, 1\text{cm}$, $f/f_0=1, 062$)

4. あとがき

本研究により得られた結論を以下に示す。

- (1) 著者が提案した2次元非線形波浪場の解析法をスロッシング問題に適用した。本解析法による結果は、水面変動量および流体力に関して模型実験結果と良く一致し、非線形性の強いスロッシング現象を十分に説明できることが確かめられた。

(2) 線形理論に基づく解析結果を実験結果、非線形解析結果と比較した。実験および非線形解析において流体力がジャンプ現象を起こす振動数よりも低振動数側では、線形理論は適用できないことを確認した。従って、制振装置としての性能を評価する上で、波の非線形性を考慮することが必要であることが明らかになった。

今後、建物あるいは土木構造物との連成振動を評価する上で、いくつかの課題が残っている。その中で、特に流体問題に関連すると思われる主な課題として、3次元非線形水面波に関する解析手法の確立および碎波時の流体力の評価方法の検討があげられる。

謝辞：本論文で用いた実験データは、東京大学工学部 藤野陽三助教授および留学生の孫 利民氏から提供されたものであり、また本研究を進めるにあたり、両氏から貴重な意見を賜っている。ここに記して感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Housner, G. W. : Dynamic Pressure on Accelerated Fluid Containers, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 47, pp. 15~35, 1957.
- 2) たとえば、木村憲明・大橋弘隆：軸対称容器におけるスロッシングの非線形応答（第1報，支配方程式の導出と解の性質），日本機械学会論文集（第1部），Vol. 44, No. 385, pp. 3024~3454, 1978.
- 3) Nakayama, T. and K. Washizu: The Boundary Element Method Applied to the Analysis of Two-Dimensional Nonlinear Sloshing Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 1631~1646, 1981.
- 4) たとえば、藤野陽三：液体の動揺を利用したダンパー，日本機械学会第574回講習会「流体関連振動の基礎と最近の話題」，pp. 113~127, 1988.
- 5) 清水 隆・葉山眞治：浅水波理論を応用したスロッシングの非線形応答（第1報，基礎式の導出と長方形容器における非線形応答），日本機械学会論文集（C編），Vol. 53, No. 486, pp. 357~363, 1982.
- 6) Lepelletier, G. and F. Raichlen: Nonlinear Oscillations in Rectangular Tanks, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 114, No. 1, pp. 1~23, 1988.
- 7) 大山 巧：境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 555~559, 1985.
- 8) 大山 巧：数値波動水槽によるクノイド波の変形の解析，第33回海岸工学講演会論文集，pp. 99~103, 1986.
- 9) 大山 巧：クノイド波の斜面越上の境界要素解析，土木学会論文集，Vol. 381, pp. 189~198, 1987.
- 10) Sun, L. M., B. M. Pacheco, Y. Fujino, K. Fujii and P. Chaiseri: Measurements of Wave Motion and Wave-Induced Force in Tuned Liquid Damper - An Experiment using Shaking Table - , 土木学会第43回年次学術講演会概要集 I, 1988.
- 11) 松浦義一・松本瓦平・水内 充・有馬健次・城市 浩・林 茂弘：倉内流体運動を利用した防振法に関する基礎的研究，日本造船学会論文集，Vol. 160, pp. 424~432, 1986.
- 12) Miles, J. W. : Surface Wave Damping in Closed Basins, Proceedings, Royal Society of London, A297, pp. 459~475, 1967.
- 13) Miles, J. W. : Resonantly Forced, Nonlinear Gravity Waves in a Shallow Rectangular Tank, Wave Motion, Elsevier Science Publishers, B. V. (North Holland), Vol. 7, pp. 291~297, 1985.

(1988年10月12日受付)