

確率ベクトルの高精度シミュレーション法

STATISTICAL PRECONDITIONING TECHNIQUE FOR SIMULATION OF STOCHASTIC VECTORS

山崎文雄*

By Fumio YAMAZAKI

A new stochastic vector simulation technique, which can realize prescribed means and covariances with a substantially smaller sample size than that of other existing methods, is developed. The method utilizes modal decomposition of the covariance matrix of the correlated stochastic vector and the spectral representation of random processes. The decreasing feature of the eigenvalues of the covariance matrix and the orthogonality of the trigonometric functions are taken advantage of for generating sets of independent random variables. The generated stochastic vector is Gaussian by virtue of the central limit theorem. The sample functions of the stochastic vector precisely reproduces, when ensemble-averaged, the prescribed zero-mean and covariance function. Hence, the proposed statistical preconditioning technique will, in general, dramatically reduce the large computational effort that Monte Carlo simulation involving stochastic vectors of large dimension otherwise entails.

1. はじめに

モンテカルロ・シミュレーション法は、その汎用性と理論的な単純さから、構造工学の分野において広く用いられてきた。その主な適用例としては、(a)材料定数や幾何学形状が不確定性を含む構造系の出力応答値や固有値の変動量推定^{1),2)}、(b)時間的・空間的にランダムな外力を受ける非線形構造系の動的応答特性の評価^{3),4)}などが挙げられる。しかし、その結果得られる解の期待値や分散などの統計量は、サンプル数(シミュレーションの試行回数)に依存し、それらの精度は、サンプル数が、十分に多い時のみ保証される。従って、一般にモンテカルロ法は、安定した解が得られるまでに、多大な演算時間を必要とするという問題点を有している。この大きな原因としては、入力となる確率変数の組(確率ベクトル)の目標統計量が、少ないサンプル数では再現されないことが考えられる。このモンテカルロ法の難点に対処する目的で、本論文では、規定されたアンサンプル統計量(期待値、共分散マトリックス)を数少ないサンプル数で高精度に満たすような正規確率ベクトルのシミュレーション手法⁵⁾を提案する。ここで確率ベクトルは、複数次元⁶⁾(multi-variate multi-dimensional)の確率場(確率過程)を離算化して得られる各領域の代表値(確率変数)から構成されるものを主として考慮している。

一般に、正規確率場(確率過程)や正規確率ベクトルのシミュレーション法としては、(a)三角級数モデルによる方法^{7),8)}、(b)AR(自己回帰)モデルまたはARMA(自己回帰・移動平均)モデルによる方法^{9),10)}、(c)共分散マトリックスのコレスキー分解またはモード分解による方法^{11),12)}などが知られている。三角級数モデルで

*工博 清水建設(株) 大崎研究室 (〒100 東京都千代田区内幸町2-2-2)

は、確率変動のパワースペクトルを用いてcosine級数展開を行っており、その直交性ゆえに、空間的な統計量(期待値、分散)は、ある周期で完全に満たされることになる。しかしながら、空間の各地点におけるアンサンブル統計量は、サンプル数が少ないとかなりばらつく傾向にある。一方、近年注目されるようになったAR/ARMAモデルは、演算時間や記憶容量の面で大きな利点があるが、そのサンプル関数の精度は、現在のところ三角級数モデルに比しては劣っている。また、共分散マトリックスの分解による方法は、一度、確率場が確率ベクトルに離散化され、その共分散マトリックスの分解が行われれば、場の次元や数および均質(定常)性に関係無く、サンプル関数が簡単に生成できる利点がある。しかしながらこの場合も、アンサンブル統計量が安定するまでには、大きなサンプル数を要することが指摘される²⁾。このような各手法の特徴を考慮して、共分散マトリックスのモード分解法と三角級数モデルのハイブリッドによる確率ベクトルのシミュレーション法を考案した。この方法は、三角級数の直交性をサンプル数軸方向に取り入れ、かつ、共分散マトリックスの主要な固有モードのみを考慮するため、少ないサンプル数で非常に精度の高いアンサンブル統計量が得られる。以下に手法の詳細と数値例を示す。

2. 共分散マトリックスのモード分解

確率ベクトルは、一般にそれを構成する確率変数が相互に相関を持っており、直接、サンプル関数を生成することは困難である。従って、共分散マトリックスのモード分解などを利用し相関のない確率ベクトルに変換した後、シミュレーションを行うことが多い。材料定数の空間変動などの確率場を対象とする場合、確率場は小領域に分割され、各小領域の代表値より、確率ベクトルが構成される。このような離算化は、確率有限要素法における要素分割に対応しており、要素の代表値の取り方に(a)要素重心での値を用いる方法^{2), 13)}、(b)要素内局所平均をとる方法^{14), 15)}の2つが考えられるが、本論文では、確率変動に比して要素分割を十分に細かくし、前者の方法を採用する。なお、要素分割が十分に細かい場合、2つの方法はほぼ同一の結果を与えるが、要素分割が粗い場合は、(a)では確率変動を過大に、(b)では過小に評価することになるとの指摘¹⁶⁾がある。

もし、 m 個の空間座標におけるパラメータがあり、各々が n 個の要素に分割されたたすると、 $N=n \times m$ 個の確率変数から成る確率ベクトル $\mathbf{X}$ が以下のように構成される。

$$\mathbf{X} = [\{\mathbf{X}^{(1)}\}^T \{\mathbf{X}^{(2)}\}^T \cdots \{\mathbf{X}^{(m)}\}^T]^T ; \quad \mathbf{X}^{(i)} = [X_1^{(i)} X_2^{(i)} \cdots X_n^{(i)}]^T \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \dots (1)$$

ここで $\mathbf{X}^{(i)}$ は i 番目のパラメータの要素代表値から成るベクトルで、ここで期待値: $E[\mathbf{X}^{(i)}] = \mathbf{0}$ かつ各成分の分散を1に標準化してもその一般性は失われない。 $\mathbf{X}$ の2次の確率特性は、共分散マトリックスで規定される。

$$\mathbf{C}_{XX} = \begin{bmatrix} C_{XX}^{11} & C_{XX}^{12} & \cdots & C_{XX}^{1m} \\ C_{XX}^{21} & C_{XX}^{22} & \cdots & C_{XX}^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{XX}^{m1} & C_{XX}^{m2} & \cdots & C_{XX}^{mm} \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

ここで $\mathbf{C}_{XX}$ の要素マトリックス C_{XX}^{ij} の kl 成分は、 $\mathbf{X}^{(i)}$ と $\mathbf{X}^{(j)}$ の相互相関関数 $R_{X_i X_j}$ より以下のように定まる。

$$\text{Cov}[X_k^{(i)}, X_l^{(j)}] = R_{X_i X_j}(\xi_{kl}) \quad \dots (3)$$

ここで、 ξ_{kl} は要素 k と l の重心間の距離ベクトル。確率場の自己相関関数($i=j$)や相互相関関数($i \neq j$)は、一般に距離の増大と共に相関が弱まることが知られているが、現状では実測データ等よりの関数形の構築は容易でない。従って以下の数値例では、2変数2次元直交異方性の均質確率場に対し、次の関数形¹⁷⁾を仮定する。

$$R_{X_1X_1}(\xi) = R_{X_2X_2}(\xi) = \exp \left[-\left(\frac{\xi_x}{d_x}\right)^2 - \left(\frac{\xi_y}{d_y}\right)^2 \right] ; \quad R_{X_1X_2}(\xi) = R_{X_2X_1}(\xi) = \beta \exp \left[-\left(\frac{\xi_x}{d_x}\right)^2 - \left(\frac{\xi_y}{d_y}\right)^2 \right] \quad (4)$$

ここで、 $\xi = [\xi_x \ \xi_y]^T$ は2次元距離ベクトル、 d_x および d_y は相関距離を表すパラメータ、 β は相互相関強さを表すパラメータである。もちろん別の関数形を用いても、以下の理論展開に変わりはない。

共分散マトリックス C_{XX} は、相関関数の与え方によらず対称で非負定値である。したがって、 C_{XX} の固有値および固有モードは、次式の解として実数値で得られる。

$$C_{XX} = \Phi_X \Lambda_X \quad ; \quad \Phi_X = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_N]^T \quad \dots \quad (5)$$

ここで、 Φ_X はその成分の列ベクトルが正規直交： $\Phi_X^T \Phi_X = I$ である固有モード・マトリックス、 Λ_X は、固有値の大きい順 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ に並べられた対角固有値マトリックスである。

その成分が相関を持つ正規確率ベクトル X を直接シミュレーションで生成するのは困難である。従って、その成分が互いに独立で、期待値0、分散が $\lambda_i (i=1, 2, \dots, N)$ となるような正規確率ベクトル Z を第一段階として生成する。これを用いて X は、 $X = \Phi_X Z$ により得られる。この X は、正規確率変数の線形和であるので、正規分布に従う。もし X が、非正規分布の確率ベクトルの場合、非正規分布確率場のシミュレーション法¹⁸⁾の応用などが考えられよう。ここで、 X に相関があれば、その共分散マトリックスの固有値が急激に減少する性質を利用して、最初の M 次($M \leq N$)までのモードのみを考慮した近似式を導入する。

$$X = \Phi_X Z \approx [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_M] [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_M]^T \quad \dots \quad (6)$$

この高次モードの切り捨てによる誤差は、 M 次までの固有値の和を基準化した値で評価できる。

$$P_\lambda(M) = \left(\sum_{k=1}^M \lambda_k \right) / \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k \right) = \sum_{k=1}^M \lambda_k / N \quad \dots \quad (7)$$

ここで、 C_{XX} の全ての固有値の和は、確率ベクトル X の確率変動の全パワーを意味しており、 $P_\lambda(M)$ は切り捨て近似後の精度を表している。この M は、 X の成分間の相関性により、通常、 N よりずっと小さく与えることが可能である。最も極端な例は、 X の全ての成分が完全相関の場合で、この場合、 C_{XX} の全ての成分が1となり、 $\lambda_1 = N$ で、他の固有値は全て0である。この場合は当然ながら $M=1$ で良い。もう一方の極限は、 X が完全無相関の場合で、 C_{XX} は対角項が全て1の対角マトリックスになる。この場合は、既に無相関になっているため、モード分解を行う必要性は当然ながら無く、従って N 次までの全てのモードを考慮する必要がある。しかしこのようなケースは、確率場の概念からは白色雑音に相当し、現実的にはあり得ない。従って一般には、振動の問題と同様に、主要モードのみを考慮することにより、演算時間の短縮が期待できる。

ここでもう一つ良く知られている X の変換法に、 C_{XX} のコレスキー分解法： $C_{XX} = LL^T$ (L は下三角マトリックス)がある。この場合 X のサンプル関数は、 Z を期待値0、分散1の独立な確率変数から成るベクトルとして、 $X = LZ$ により得られる。この方法は、1) X の相関性が強まると数値的に分解が困難になる、2) Z は常に N 次まで考慮しなければならないなどの点があり、モード分解法の方がより利点のある方法と言えよう。

3. 統計的拘束条件法 (Statistical Preconditioning)

期待値が0で分散が λ_i の互いに独立な正規変数 Z_i から成る確率ベクトル Z のサンプル関数を生成する場合、通常は、検定済の正規乱数発生プログラムを利用することが多い。しかし、このランダム・サンプリング法によると、著者の経験から言って、シミュレーションによって得られた統計的共分散 C_{ZZ}^* が目標値 C_{ZZ} に近づくまでには、多くのサンプル数を必要とし、特に非対角項は、なかなか0に漸近しない。また Z_i をLatin Hypercube サンプリング法¹⁹⁾により生成した場合、適当なサンプル数で C_{ZZ}^* の対角項は完全に目標値を満た

すが、非対角項については、同様に精度は余り良くなかった。この C_{ZZ}^* とサンプル平均値 $\bar{Z}^*$ は、 N_s をサンプル数、 $Z(j)$ を j 番目のサンプル・ベクトルとして、次式で表される。

$$C_{ZZ}^* = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} [Z(j) \{Z(j)\}^T - \{\bar{Z}^*\} \{\bar{Z}^*\}^T] \quad ; \quad \bar{Z}^* = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} Z(j) \quad \dots (8)$$

ターゲットの共分散マトリックス C_{ZZ} を非常に小さいサンプル数で完全に満たす確率ベクトル Z の生成法として、 $Z(j)$ の各 i 成分を以下の三角級数モデルで表現することを考える。

$$Z_i(j) = \sqrt{2} C_i \sum_{m=1}^{N_f} \cos(\omega_k j \Delta t + \psi_k) \quad (i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, N_s) \quad \dots (9)$$

ここで $k=(m-1)N+i$ 、 $C_i = \sqrt{\lambda_i/N_f}$ 、 N_f は重ね合わす cosine 関数の総数、 ψ_k は $0 \sim 2\pi$ の間に等分布するランダム位相角、 ω_k はサンプル数軸方向への k 番目の角周波数である。式(9)は、よく知られる1次元確率過程のサンプル関数のスペクトル表現式と同様のものであり、ここでは、サンプル数軸方向の各確率変数の変動を時間軸方向のものに模擬した記号(例えば t や ω)を用いて表している。ここで N_s と ω_k を適切に与えると、以下に証明するように、上式はアンサンブルの目標値(期待値、分散、共分散)を完全に満たす。ここでもし、 Z_i の確率分布形が問題でないなら、 $N_f=1$ とすることができる。しかし、もし Z_i を中心極限定理によって正規分布へ近づけようとするれば、 N_f はかなり大きな数(例えば $N_f \geq 20$)としなければならない。cosine 関数の基本周期 T は、図-1に示すように $T=N_s \Delta t$ であり、 ω_k とその周期 T_k は、以下の通りである。

$$\omega_k = 2\pi/T_k = 2\pi k/T \quad ; \quad T_k = T/k \quad (k=1, 2, \dots, NN_f) \quad \dots (10)$$

従って、周期 T の間に、角周波数 ω_k の cosine 関数は k サイクル入ることになる。アンサンブルの2次までの目標モーメントが満たされるためには、サンプリング間隔 Δt は、最小周期 T_{NN_f} の $1/4$ である必要がある。

$$\Delta t = T_{NN_f}/4 = \pi/(2\omega_{NN_f}) \quad \dots (11)$$

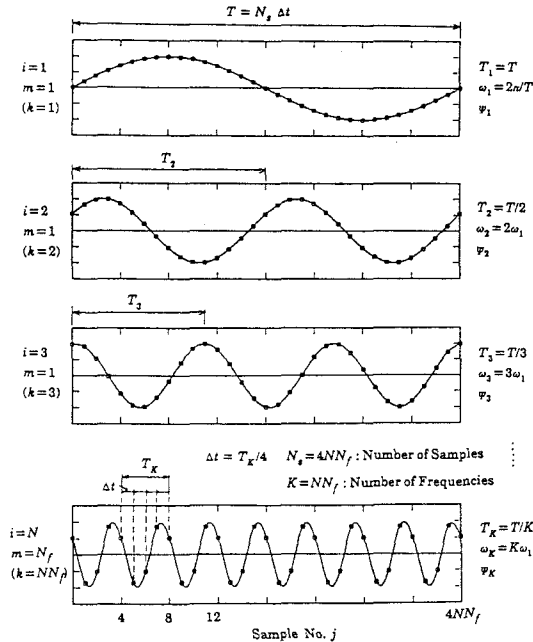


図-1 独立な確率変数 Z_i のサンプル関数のサンプル数軸方向へのスペクトル表現

これらの仮定の下で、アンサンブル平均値は、図-1に示すようにcosine関数の周期性より

$$Z_i^* = \frac{\sqrt{2}}{N_s} C_i \sum_{m=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_s} \cos(\omega_k j \Delta t + \psi_k) = 0 \quad \dots (12)$$

となり、ランダム位相角 ψ_k の値によらず目標が達成される。また、 C_{ZZ}^* の対角項である Z_i の分散は、以下に示すように λ_i となる。

$$C_{ZZii}^* = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} [Z_i(j)]^2 = \frac{2}{N_s} C_i^2 \sum_{j=1}^{N_s} \left\{ \sum_{m=1}^{N_f} \cos(\omega_k j \Delta t + \psi_k) \right\}^2 = \lambda_i \quad \dots (13)$$

上式を導くにあたっては、下記のcosine関数の選点直交性²⁰⁾が利用されている。

$$\sum_{j=1}^{N_s} \cos(\omega_\alpha j \Delta t + \psi_\alpha) \cos(\omega_\beta j \Delta t + \psi_\beta) = \begin{cases} 0 & (\text{if } \omega_\alpha \neq \omega_\beta) \\ N_s \cos(\psi_\alpha - \psi_\beta) / 2 & (\text{if } \omega_\alpha = \omega_\beta) \end{cases} \quad \dots (14)$$

また、各々の Z_i や Z_l に対し、別々の周波数 ω_k を与えることにより、 Z_i と Z_l のアンサンブル共分散は、同じく選点直交性により0となる。

$$C_{ZZil}^* = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} Z_i(j) Z_l(j) = 0 \quad (\text{if } i \neq l) \quad \dots (15)$$

式(12),(13),(15)より、サンプル数 N_s において Z の1次および2次のモーメントは完全に目標値と一致することが解る。ただし N_s は、

$$N_s = T / \Delta t = 4T_1 / T_{NNf} = 4NN_f \quad \dots (16)$$

であることに注意されたい。また N_f の値は、各々の Z_i に対し必ずしも同一である必要はないが、ここでは i に依らず同一の値を用いることにする。式(16)で表されるサンプル数 N_s は、確率ベクトルの次元 N が大きい場合、当然ながら大きな数となる。しかし、ここで式(6)で示したように、 $\sqrt{\lambda_{M+1}} \ll \sqrt{\lambda_1}$ となる固有値の小さな高次モードを切り捨てると、生成するベクトル Z の次元を N から M に減らすことができる。さらにcosine関数の選点直交性は、式(14)において、 $\omega_\alpha = \omega_\beta$ かつ $\psi_\beta = \psi_\alpha + n/2$ の場合も成立することに気がつく。これを利用すると表-1に示すように、選点直交性を保ったまま、かつ期待値0を保ったままで同じ周波数を以下のように2回利用できる。

表-1 確率ベクトル Z の生成に用いるサンプル数軸方向の周波数とランダム位相角

Mode No.	Frequencies to Superpose	Random Phase Angles
1	$\omega_1 \quad \omega_{M/2+1} \quad \dots \quad \omega_{(Nf-1)M/2+1}$	$\psi_1 \quad \psi_{M/2+1} \quad \dots \quad \psi_{(Nf-1)M/2+1}$
2	$\omega_2 \quad \omega_{M/2+2} \quad \dots \quad \omega_{(Nf-1)M/2+2}$	$\psi_2 \quad \psi_{M/2+2} \quad \dots \quad \psi_{(Nf-1)M/2+2}$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$M/2$	$\omega_{M/2} \quad \omega_M \quad \dots \quad \omega_{NfM/2}$	$\psi_{M/2} \quad \psi_M \quad \dots \quad \psi_{NfM/2}$
$M/2+1$	$\omega_1 \quad \omega_{M/2+1} \quad \dots \quad \omega_{(Nf-1)M/2+1}$	$\psi_1 + n/2 \quad \psi_{M/2+1} + n/2 \quad \dots \quad \psi_{(Nf-1)M/2+1} + n/2$
$M/2+2$	$\omega_2 \quad \omega_{M/2+2} \quad \dots \quad \omega_{(Nf-1)M/2+2}$	$\psi_2 + n/2 \quad \psi_{M/2+2} + n/2 \quad \dots \quad \psi_{(Nf-1)M/2+2} + n/2$
$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
M	$\omega_{M/2} \quad \omega_M \quad \dots \quad \omega_{NfM/2}$	$\psi_{M/2} + n/2 \quad \psi_M + n/2 \quad \dots \quad \psi_{NfM/2} + n/2$

$$\omega_{k+M/2} = \omega_k \quad \text{かつ} \quad \psi_{k+M/2} = \psi_k + \pi/2 \quad \dots (17)$$

ここで $1 \leq i \leq M/2$ かつ $1 \leq m \leq N_f$ の条件下で、 $k=(m-1)M+i$ を表す。これらを考慮するとサンプル数 N_s は、

$$N_s = 4T_1/T_{N_f M/2} = 2MN_f \quad (M \text{ は偶数}) \quad \dots (18)$$

に減らすことが可能となる。ただし、もしこの段階で $\mathbf{Z}$ のサンプル関数を正規分布に近づけようと思えば、 N_f を大きく取る必要がある。式(9)を式(6)に代入すると、 ϕ_{si} を固有モード・ベクトル Φ_i の s 成分として、

$$X_s(j) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^{N_f} \phi_{si} \sqrt{\frac{\lambda_i}{N_f}} \cos(\omega_k j \Delta t + \psi_k) \quad (s=1, 2, \dots, N) \quad \dots (19)$$

と表される。ここで注意されたいことは、もし $M \times N_f$ が充分大きければ、 $X_s(i)$ は中心極限定理によって正規分布に漸近する。従って、仮に $N_f=1$ でも M が大きければ(例えば $M \geq 20$)、この分布形に関する条件は、 $\mathbf{Z}$ を $\mathbf{X}$ に変換する過程で、自然に満たされる。従って、確率ベクトルの次元が、離散化した確率場から構成される場合のように大きい時には、 $N_f=1$ で良いと言える。また高次モードの切り捨てにより、アンサンブル共分散は多少の誤差を含むことになるが、アンサンブル平均は、そのまま厳密に0に保たれる。

4. 数値例

以上に提案した統計的拘束条件法の有効性を、例題により示す。まず、空間的な場として、図-2に示す $7 \times 7 = 49$ 個の要素から成る2次元の(有限要素)モデルを考える。ここで各要素は、辺長 $l_x = l_y = 1.0$ の正方形とする。このモデルの2つの(例えば、材料)パラメータが、2変数2次元の確率場を構成するものとする。まず確率場を均質(homogeneous)と仮定し、それぞれ期待値0、分散1に規格化する。次に、要素分割を行い、要素中心の値から成る $49 \times 2 = 98$ 次元の確率ベクトル $\mathbf{X} = [\{\mathbf{X}^{(1)}\}^T \{\mathbf{X}^{(2)}\}^T]^T$ が構成される。元の確率場の自己相関関数および相互相関関数としては、式(4)を仮定し、相関距離は $d_x = d_y = 3.0$ 、相互相関を表すパラメータは $\beta = -0.8$ (強い負の相関)とする。なお、このように設定したパラメータの値を変えても、何ら結論には影響せず、別の例題⁵⁾も既に示されている。このような条件下で、式(2), (3), (4)によって構成された共分散マトリックス $\mathbf{C}_{XX}$ の各成分の値を図-3に3次元の棒グラフで示す。この $\mathbf{C}_{XX}$ の対角項は全て1で、また対角項から離れて平坦に見える部分は、ほぼ0である。また $\mathbf{X}^{(1)}$ と $\mathbf{X}^{(2)}$ の負の相関も表されている。

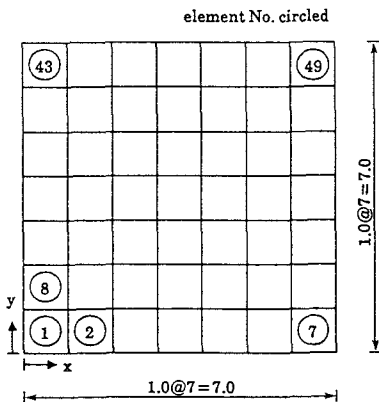


図-2 確率場の要素分割

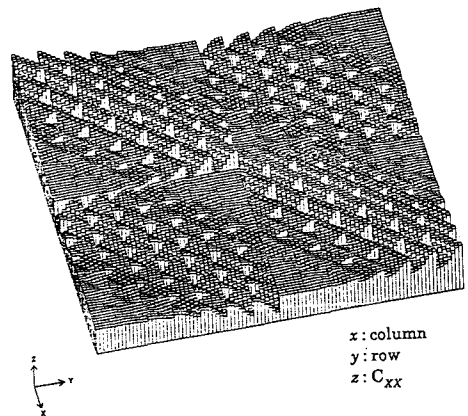


図-3 ターゲットの共分散マトリックス $\mathbf{C}_{XX}$

C_{XX} の固有値解析結果を図-4に示す。この結果、50次までの固有値で、式(7)に示す $P_{\lambda}(M)$ は99.99%に達しており、 $M=50$ 次より高次のモードは無視して全く問題ないことが解る。 M が十分大きいことから $N_f=1$ でよく、統計的拘束条件法によるサンプル数は、式(18)より100となる。また、同一の条件で、 Z をランダム・サンプリングにより生成する方法も、比較のために行う。2つの方法によって得られた確率ベクトルのサンプル関数を図-5に示す。両手法ともに、そのサンプル関数において、 $X^{(1)}$ と $X^{(2)}$ の負の相関が読み取れる。なお、このような個々のサンプル関数については、統計的拘束条件法の影響は見ることができない。しかし、確率ベクトルのある成分(ここでは、要素番号49に対応するベクトル $X^{(1)}$ と $X^{(2)}$ の成分)のサンプルごとの変化を見ると、図-6に示すように、統計的拘束条件法によるサンプル関数は周期性のある関数となっており、一方、ランダム・サンプリングによるサンプル関数は、周期性のない白色雑音になっていることが理解できる。

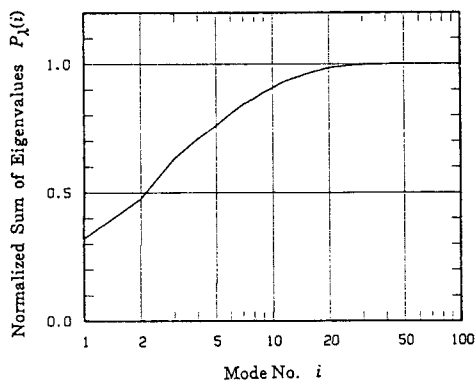


図-4 共分散マトリックス C_{XX} の固有値解析結果

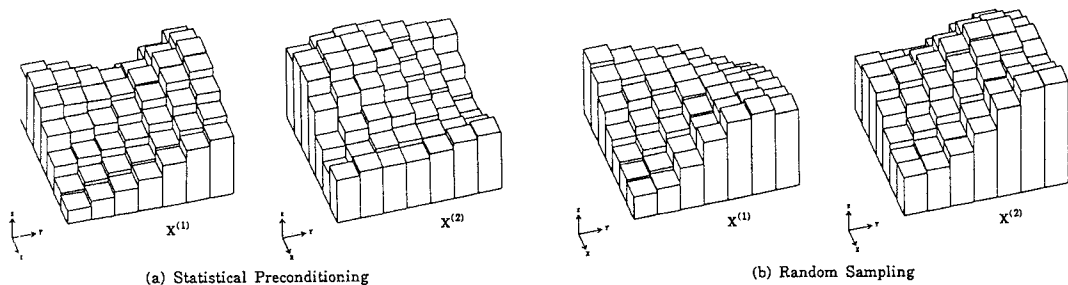


図-5 離散化した確率場のサンプル関数

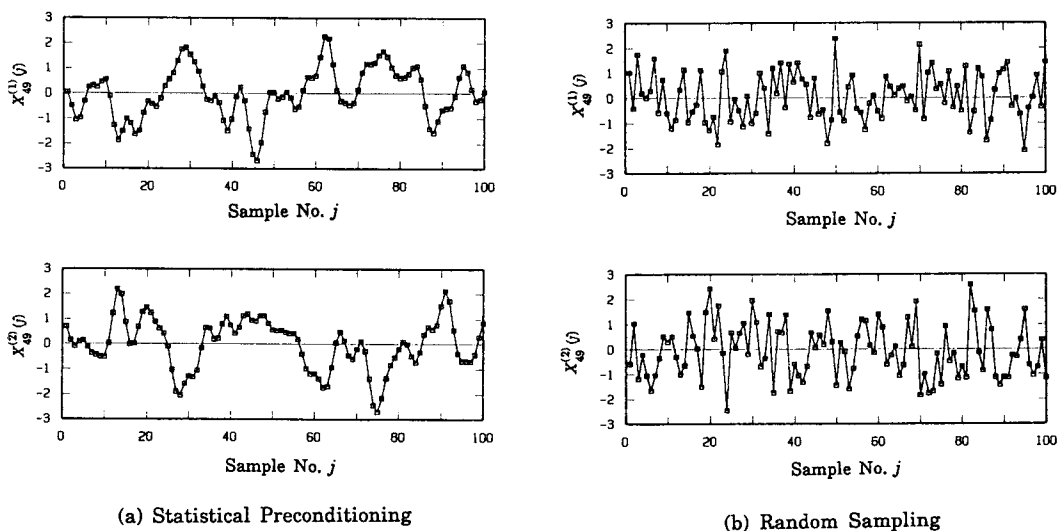


図-6 各確率変数のサンプルごとの変動

図-3と同様の表現で、サンプル数100の場合のシミュレーションによるアンサンプル共分散マトリックスを図-7および図-8に示す。統計的拘束条件法による図-7は、ターゲットの図-3とはほぼ完全に一致しており、一方、ランダム・サンプリングによる図-8は、(この図では読み取りにくい)かなりの誤差を含んでいることが分かる。このシミュレーションによるアンサンプル共分散の精度をより詳しく見るために、モデルの対角線に沿ったターゲットの相関関数との比較を図-9に示す。図中、 $\xi_{1,i}$ は要素1と要素*i*の重心間の距離を表し、ターゲットの相関関数は式(4)で表される。統計的拘束条件法による自己相関および相互相関は、完璧な精度を示している(誤差は、高次モードの打ち切りによるものだけであり、この例題では0.01%以下)。一方、ランダム・サンプリングによるものは、同じサンプル数に対し最大20%程度の誤差を生じており、精度を向上させるためには、サンプル数をさらに大きくする必要がある。ちなみに、ランダム・サンプリング法において、サンプル数を500~1,000に増加させてみたところ、まだ最大5%程度の誤差を生じていた。このことが、実は、モンテカルロ法の最大の問題点であり、この克服に、本提案手法は大きく貢献できるものと期待している。

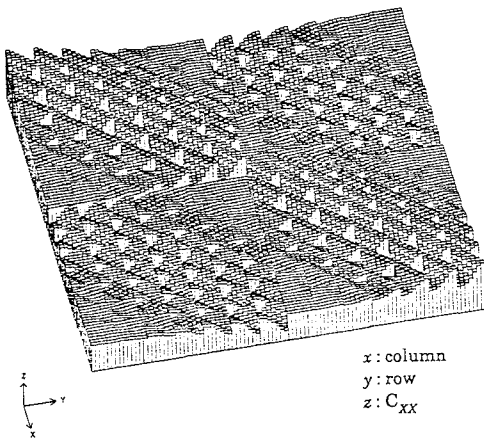


図-7 統計的拘束条件法による共分散 C_{XX}

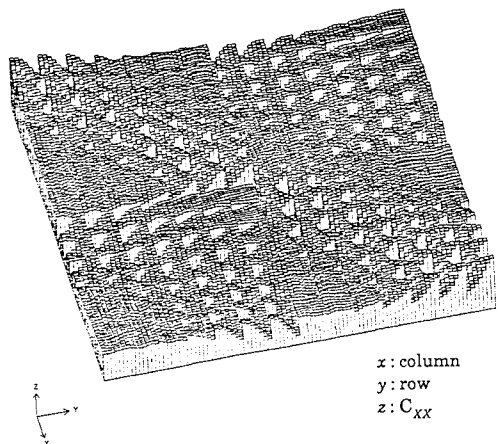
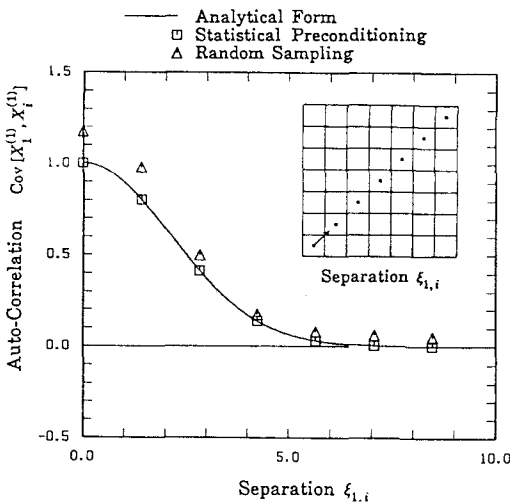
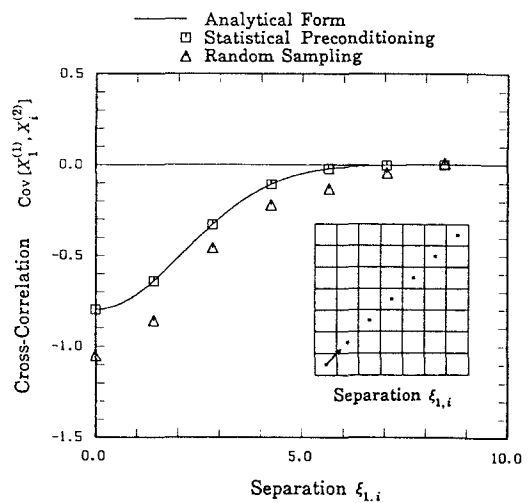


図-8 ランダム・サンプリングによる共分散 C_{XX}

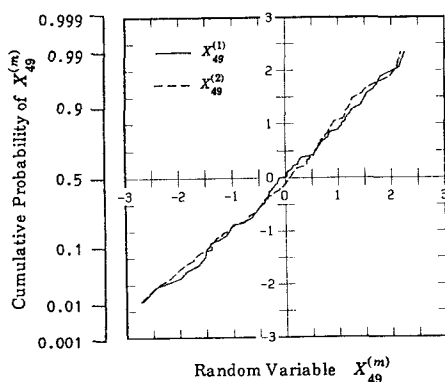


(a) Auto-Correlation

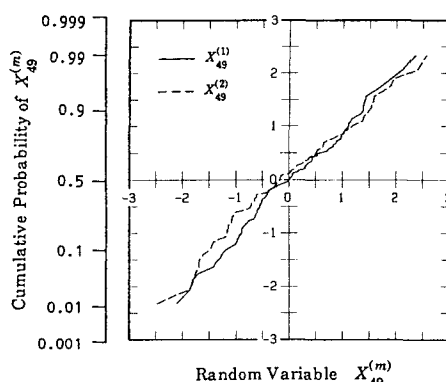


(b) Cross-Correlation

図-9 シミュレーションによる相関関数の精度



(a) Statistical Preconditioning



(b) Random Sampling

図-10 サンプル関数の累積確率分布

さらに、サンプル関数の確率分布形を吟味してみる。要素番号49に関する確率変数の累積確率を正規確率紙にプロットし、図-10に示す。両手法による100個のサンプル値は、共に、原点を通る勾配1の直線ではほぼ表され、サンプル数の増加とともに、ターゲットとした期待値0、標準偏差1の正規分布に漸近するであろうことが予測される。確率分布形に対しては、共に中心極限定理に依存しており、両手法の差異は顕著には見られない。なお、統計的拘束条件法の場合、 M を小さくし N_f をその分大きくすれば、同じサンプル数のままで確率分布形をより正規分布に近づけることも、場合により可能である。

なお、サンプル生成に要する演算時間は、その大部分が、両手法に共通なモード分解とマトリックス演算に費やされるため、両手法による差異はごく僅かであった。ちなみに、両手法のプログラミング上の違いは、式(9)を用いるか正規乱数を用いるかの違いのみである。

最後に、各々の確率変数の2次までの自己モーメントは、Rosenbluethの点推定法²¹⁾や、MakayらのLatin Hypercubeサンプリング法¹⁹⁾によっても完全に満たすことが可能であるが、これらの手法では、本手法のように確率変数間の2次までの相互モーメントを制御することはできないことを指摘しておきたい。

5. 結 論

モンテカルロ法の効率化を目的として、確率場を離散化した場合に構成されるような大次元の確率ベクトルを、少ないサンプル数で非常に精度良くシミュレーションする方法を開発した。この方法では、期待値0の確率ベクトルの共分散マトリックスを完全に再現するため、この共分散マトリックスのモード分解と、これにより無相関となった各々の確率変数の三角級数モデル表現が行われる。この段階でcosine関数の直交性が巧みに取り入れられ、これによりアンサンプルの共分散マトリックスが、完全に満足される。また、共分散マトリックスの固有値が急激に減少する性質を利用し、その固有値が無視できる大きさの空間変動モードを切り捨て、サンプル数の減少を図っている。シミュレーションによって得られた確率ベクトルは、中心極限定理によって正規分布に漸近する。この中心極限定理が成立するには、数多くのcosine関数を重ね合わせる必要があるが、この制約は本手法では、独立な確率変数をモード合成する段階で、自然に満足される。

本論文で提案する統計的拘束条件法(statistical preconditioning)によれば、独立な確率変数をランダム・サンプリング法によって生成する通常確率ベクトル・シミュレーション法に比べ、大幅に少ないサンプル数

で、大次元の確率ベクトルの期待値および共分散マトリックスが再現できる。従って、構造工学の諸問題へのモンテカルロ法の適用における最大の難点とも言える多大な演算時間の問題の解決に、提案手法は貢献できるものと期待している。

参考文献

- 1) Astill, C. J., Nosseir, B., and Shinozuka, M., "Impact Loading on Structures with Random Properties," *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 1, No. 1, pp. 63-77, 1972.
- 2) Yamazaki, F., and Shinozuka, M., and Dasgupta, G., "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, No. 8, pp. 1335-1354, 1988.
- 3) Shinozuka, M., and Wen, Y-K., "Monte Carlo Simulation of Nonlinear Vibrations," *AIAA Journal*, Vol. 10, No. 1, pp. 37-40, 1972.
- 4) Shinozuka, M., "Time and Space Domain Analysis in the Structural Reliability Assessment," *Proceedings of the 2nd ICOSSAR*, pp. 9-28, 1977.
- 5) 山崎文雄・篠塚正宣：共分散行列を確実に満たす確率ベクトルのシミュレーション法，第42回土木学会年次学術講演会，pp. I 558-559, 1987.
- 6) Shinozuka, M., and Jan, C-M., "Digital Simulation of Random Processes and Its Applications," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 25, No. 1, pp. 111-128, 1972.
- 7) 星谷勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，1974.
- 8) Shinozuka, M., "Stochastic Fields and Their Digital Simulation," *Stochastic Methods in Structural Dynamics*, edited by G. I. Schuëller and M. Shinozuka, M. Nijhoff Publishers, Netherlands, pp. 93-133, 1987.
- 9) Naganuma, T., Deodatis, G., and Shinozuka, M., "ARMA Model for Two-Dimensional Processes," *Journal of the Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, No. 2, pp. 234-251, 1987.
- 10) 星谷勝・石井清・栗田博昭：空間・時間分布特性を有する地震動シミュレーション，土木学会論文集，No. 386/I-8, pp. 359-367, 1987.
- 11) Ditlevsen, O., *Uncertainty Modeling*, McGraw-Hill, New York, NY, 1981.
- 12) Elishakoff, I., *Probabilistic Methods in the Theory of Structures*, John Wiley & Sons, New York, NY, 1983.
- 13) 中桐滋・久田俊明：確率有限要素法入門，培風館，1985.
- 14) Vanmarcke, E., and Grigoriu, M., "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams," *Journal of the Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 109, No. 5, pp. 1203-1214, 1983.
- 15) 鈴木誠・石井清：確率有限要素法と要素分割，土木学会論文集，No. 386/I-8, pp. 237-245, 1987年.
- 16) Der Kiureghian, A., and Ke, J. B., "The Stochastic Finite Element Method in Structural Reliability," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 3, No. 2, pp. 83-91, 1988.
- 17) Yamazaki, F., and Shinozuka, M., "Safety Analysis of Stochastic Finite Element Systems by Monte Carlo Simulation," 土木学会論文集，No. 398/I-10, pp. 109-119, 1988.
- 18) Yamazaki, F., and Shinozuka, M., "Digital Generation of Non-Gaussian Stochastic Fields," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, No. 7, pp. 1183-1197, 1988.
- 19) McKay, M. D., Beckman, R. J., and Conover, W. J., "A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output From a Computer Code," *Technometrics*, Vol. 21, No. 2, pp. 239-245, 1979.
- 20) 大崎順彦：地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1976.
- 21) Rosenblueth, E., "Point Estimates for Probability Moments," *Proceedings of the National Academy of Science*, Vol. 72, No. 10, pp. 3812-3814, 1975.

(1988年10月12日受付)