

条件付き破壊確率を用いた繰り返し高速モンテカルロ法とその構造物の動的信頼度評価への応用

AN ITERATIVE FAST MONTE-CARLO PROCEDURE USING CONDITIONAL FAILURE PROBABILITY
AND ITS APPLICATION TO TIME-VARIANT STRUCTURAL RELIABILITY ANALYSES

白 木 渡*・G.I.Schuëller**

By Wataru SHIRAKI and G.I.Schuëller

An efficient simulation procedure for structural reliability analysis is proposed. First the concept of the conditional failure probability with given system parameters during the lifetime of structure is introduced. Then the overall failure probability is efficiently determined using the iterative fast Monte-Carlo procedure. The mean values of the importance sampling density function are selected to be the center of domain which contributes most to the overall failure probability. In numerical examples, the applicability of the suggested method as well as the advantage over existing accurate methods are shown.

1. まえがき

モンテカルロ法は、構造物の破壊確率を計算するための有力な手法の一つである。しかしながら、この手法は破壊確率が非常に小さい場合には、精度よい結果を得るためにかなりの計算時間を必要とする。

これまでモンテカルロ手法による計算精度を改良するための種々の工夫がなされ、Importance Sampling手法^{1)~3)}、Stratified Sampling手法⁴⁾、Latin Hypercube Sampling手法^{5)・6)}等のサンプリング手法が開発されている。これらの手法の有効性については、文献7)で比較検討されている。上掲の文献のうち、特に文献3)においては、ISPUD(Importance Sampling Procedure Using Design Point)として知られる一般的な信頼性解析のための多目的プログラム・システムが与えられている。しかしながら、文献7)および8)において指摘されているように、ISPUDにおいて用いられている Importance Sampling 密度関数は、設計点(design point)をその平均としたもので、まだ最適なものとはいえない。文献8)においては、各サンプリングごとに Importance Sampling 密度関数をより最適なものに更新していく有効な Adaptive Sampling手法が開発されている。文献8)では、その手法を繰り返し高速モンテカルロ法、IFM(Iterative Fast Monte-Carlo) 手法と呼んでいる。

上述したサンプリング手法は、主として時間に依存しない信頼性解析に用いることを意図して開発されたものである。本研究においては、時間に依存しない構造信頼性問題のみならず時間に依存する場合についても適用できる有効なサンプリング手法を提案する。まず、構造物の供用期間中において、ランダムなシステ

* 工博 鳥取大学助教授 工学部土木工学科

** Ph.D Innsbruck University 土木工学科力学講座

ム・パラメータの値を特定値に固定した場合の条件付き破壊確率の概念を導入する。この条件付き破壊確率は、一般に不規則過程論および不規則振動論に基づいて評価できる。次に、構造物の全破壊確率を効率よく求めるために、IFM手法を用いてランダムなシステム・パラメータに関する積分を実行する。この手法においては、Importance Sampling の確率密度関数の平均値は、全破壊確率に最も貢献する領域の中心として求められる。最後に、簡単な数値計算例により本論文で提案する計算手法の有効性を示す。

2. Importance Sampling 手法 および Adaptive Sampling 手法

2. 1 Importance Sampling 手法

時間に依存しない構造信頼性問題においては、一般に構造物の破壊確率 P_f は次式で与えられる。

$$P_f = \int_{D_f} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

ここに、 D_f は破壊領域、 $\mathbf{X}$ は基本確率変数ベクトル、そして $f_X(\mathbf{x})$ は $\mathbf{X}$ の同時確率密度関数である。Importance Sampling の概念を用いれば、式(1)は次ぎのように書き換えられる^{1)~4)}。

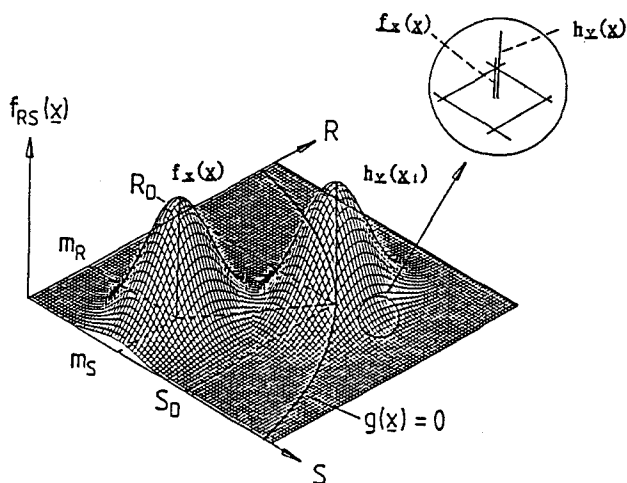
$$P_f = \int_{\text{all } \mathbf{x}} I(g(\mathbf{x}) \leq 0) \frac{f_X(\mathbf{x})}{h_X(\mathbf{x})} h_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

ここに、 $g(\mathbf{x})$ は破壊基準関数で $g(\mathbf{x}) \leq 0$ は構造物の破壊を意味する。また、 $I(\cdot)$ は指標関数(indicator function)で、 $I(g(\mathbf{x}) \leq 0) = 1$ 、 $I(g(\mathbf{x}) > 0) = 0$ と定義される。そして、 $h_X(\mathbf{x})$ は Importance Sampling 密度関数である。

Importance Sampling の基本的な考え方は、破壊確率に貢献する最も”重要(importance)”な領域にサンプリング点を集中させることである。この概念に従って、オリジナルな確率密度関数 $f_X(\mathbf{x})$ の代わりに Importance Sampling 密度関数 $h_X(\mathbf{x})$ を用いてサンプリングを実行すれば式(2)で与えられる P_f は次式によって数値計算される。

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(\mathbf{x}_i) \leq 0) \frac{f_X(\mathbf{x}_i)}{h_X(\mathbf{x}_i)} \quad (3)$$

ここに、 N はシミュレーション回数である。



R_0, S_0 coordinates of design point

Fig.1 Schematic Sketch of Importance Sampling Technique Using Design Points-Two Dimensional Case²⁾

ISPUD³⁾ においては、設計点(design point)が Importance Sampling の確率密度の平均値として選ばれている。Fig.1 は、設計点を用いた Importance Sampling 手法を図示したものである。

2.2 Adaptive Sampling 手法

前節の式(3)によって得られる破壊確率 P_f の推定値の誤差は、推定値の分散 S_I^2 によって、次のように表わされる。

$$S_I^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[I(g(x_i) \leq 0) \frac{f_X(x_i)}{h_X(x_i)} \right]^2 - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(x_i) \leq 0) \frac{f_X(x_i)}{h_X(x_i)} \right]^2 \quad (4)$$

そして、いわゆる標準誤差 S_{IE} は、次式で定義される。

$$S_{IE} = \sqrt{\frac{S_I^2}{N}} \quad (5)$$

もし、 $h_X(x)$ が破壊領域 D_f 内で定義される条件付きの $f_X(x)$ となるように、すなわち

$$h_X(x) = f_X(x | x \in D_f) \quad (6)$$

となるように選ばれば、分散 S_I^2 をゼロにすることができる⁴⁾。実際問題において、これは不可能な選択である。しかしながら、少なくとも次式(7)および(8)で表わされる1次および2次のモーメントの範囲内において式(6)を満足できる $h_X(x)$ を選ぶことは可能である。すなわち、

$$E_h(x) = E_f(x | x \in D_f) \quad (7)$$

$$E_h(x x^T) = E_f(x x^T | x \in D_f) \quad (8)$$

ここに、 E_h および E_f はそれぞれ $h_X(x)$ および $f_X(x)$ に関する期待値演算、上付きの添え字 T はベクトルの転置を意味する記号である。

まず、通常のモンテカルロ手法により、式(7)および(8)の右辺の $E_f(x | x \in D_f)$ および $E_f(x x^T | x \in D_f)$ の値を推定し、これらの値を用いて Importance Sampling 密度関数が定められる。次に、その確

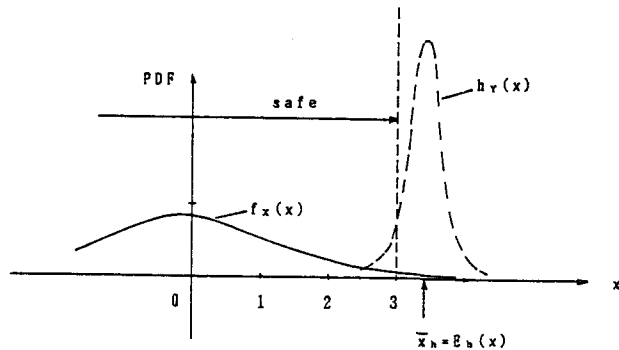


Fig. 2 Basic Idea of IFM procedure for One-Dimensional Case⁸⁾

率密度関数により Importance Sampling が実行され、 $E_h(x)$ および $E_h(x x^T)$ の値が更新される。この手順を数回続ければ効率よく精度よい結果を得ることができる。このサンプリング手法が Adaptive Sampling 手法と呼ばれるものである⁸⁾。多次元正規確率密度関数は、平均値と共分散によって唯一定義されるものであるので、このタイプの確率密度関数が $h_X(x)$ として選ばれる。この Adaptive Sampling の考え方をを用いて開発された破壊確率の評価法が IFM 手法⁸⁾ と呼ばれるものである。この手法の基本的な考え方を一次元の場合について図示したものが Fig.2 である。Fig.2 において、破壊領域 D_f は $D_f = \{x | x > 3\}$ である。

3. 条件付き破壊確率の概念を用いた繰返し高速モンテカルロ法

構造信頼性問題において、実際の破壊基準関数 $g(\mathbf{x})$ は次式の形で表現されることが多い⁹⁾。

$$g(\mathbf{x}) = u(x_2, x_3, \dots, x_n) - x_1 \quad (9)$$

ここに、 u は確率ベクトル $\mathbf{X}' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ の各変数に関して連続で単調な任意の関数である。

いま、 x_1 と $\mathbf{X}'$ の間の統計的な独立性が仮定できるものとする、 x_1 を除く全ての確率変数すなわち確率ベクトル $\mathbf{X}'$ が $\mathbf{X}' = \mathbf{x}'$ という値をとるという条件のもとでの条件付き破壊確率 $P_f^o(\mathbf{x}')$ は、次式で与えられる。

$$P_f^o(\mathbf{x}') = 1 - F_{x_1}(u(\mathbf{x}')) \quad (10)$$

ここに、 $F_{x_1}(\cdot)$ は x_1 の確率分布関数である。式(10)より明らかなように、 x_1 が $\mathbf{X}'$ に独立であり、 $\mathbf{X}' = \mathbf{x}'$ の与えられた値に対して x_1 が破壊基準面上で定義される唯一の値をとるとすれば、 $P_f^o(\mathbf{x}')$ は x_1 の確率分布関数から直接得ることができる。

この条件付き破壊確率の概念を導入すれば、破壊確率を求めるための積分の次元が一つ減少でき、式(1)が次のように書き換えられる。

$$P_f = \int_{\mathbf{x}' \in \mathbf{X}'} P_f^o(\mathbf{x}') f_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (11)$$

これにより、 P_f の評価に関して数値計算上の効率化がはかられるが、さらに効率化を行うために、式(11)の積分値の計算に際してIFM手法を用いる。

Importance Sampling 密度関数 $h_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}')$ を用いれば、式(11)は次のように書き換えられる。

$$P_f = \int_{\mathbf{x}' \in \mathbf{X}'} P_f^o(\mathbf{x}') \frac{f_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}')}{h_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}')} h_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (12)$$

この $h_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}')$ の分布形としては多次元正規分布を用いその平均値は、全破壊確率に最も貢献する領域の中心として定められる。式(12)は次式によって数値計算される。

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_f^o(\mathbf{x}_i') \frac{f_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}_i')}{h_{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}_i')} \quad (13)$$

その計算手順を以下に示す。簡単のために、非相関な変数空間の場合について説明する。相関のある場合については、非相関空間への変換の後、同じ手順を用いればよい。

まず、Importance Sampling密度関数の平均値の初期ベクトルを得るための手順について説明する³⁾。任意の一つの変数 x_1 を考え、その変数を除く全ての変数がそれぞれの平均値をとるという条件のもとで、 x_1 の1つの変数に関して通常のモンテカルロ・シミュレーションを実行し、一種の条件付き破壊確率 p_{fi} を求める。

$$p_{fi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_f^o(\mu_{x_2}, \mu_{x_3}, \dots, x_1^{(j)}, \dots, \mu_{x_n}) \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (14)$$

そして、この p_{fi} の質量中心として定義される $\bar{x}_{hci}$ を考える (Fig.3 参照)。

$$\bar{x}_{hci} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_1^{(j)} \cdot P_f^o(\mu_{x_2}, \mu_{x_3}, \dots, x_1^{(j)}, \dots, \mu_{x_n})}{P_{fi}} \quad (15)$$

さらに、これらの $\bar{x}_{hi}, i=2,3,\dots,n$ の重み付き平均値

$$\bar{x}_{h1} = \frac{P_{f1} \cdot \bar{x}_{hc1}}{\sum_{i=2}^n P_{fi}} \quad (16)$$

を考えることによって、Importance Sampling 密度関数の平均値の初期ベクトル $\bar{x}_h = (\bar{x}_{h2}, \bar{x}_{h3}, \dots, \bar{x}_{hi}, \dots, \bar{x}_{hn})$ を得る。

次の手順としては、今度は平均値の初期ベクトル $\bar{x}_h$ の回りに上で示した方法によって各変数 x_i に関するシミュレーションを行う。これらのシミュレーション結果により、新たな平均値の初期ベクトル $\bar{x}_{hi}$ と初期標準偏差 σ_{hi} , $i=2,3,\dots,n$ が推定される。このようにして得られた平均値および標準偏差の初期値を用いて、Importance Sampling が実行され、破壊確率 P_f が式(13)により評価される。

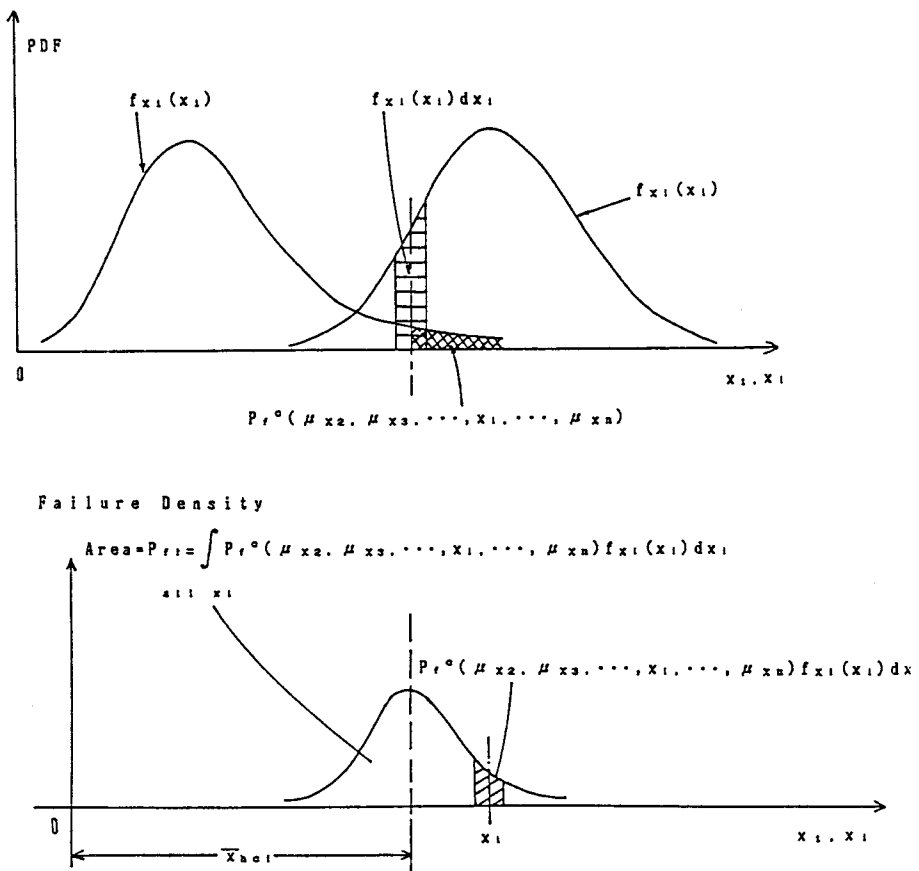


Fig.3 Interpretation of Eq.(15) as the Mass Center of P_{fi}

以上示した手法がここで提案する条件付き破壊確率の概念を用いた繰り返し高速モンテカルロ法, IFMPUC (Iterative Fast Monte-Carlo Procedure Using Conditional Failure Probability) である。これまでの IFMPUC の説明においては、時間に依存しない信頼性の問題についてのみ議論してきたが、この手法は以下に示すように時間に依存する信頼性の問題に関しても非常に有効な計算手法である。

いま、確率変数のパラメータ X_R を有する構造システムが、時間変動荷重 $S(t, X_S)$ の作用を受ける場合を考える。 S は時間に依存するベクトル確率過程であるが、 X_S という確率変数のパラメータによって規定されているものとする。ここで、 X_R と X_S のパラメータをすべて含む X なる確率変数ベクトルを考える。さて、 X が与えられた値 $X = x$ をとるという条件のもとでの、条件付き破壊確率 $P_f^\circ(x)$ の概念を導入すれば、パラメータ X のランダム性を含む全破壊確率 P_f は次式で与えられる¹⁰⁾。

$$P_f = \int_{\text{all } x} P_f^\circ(x) f_x(x) dx \quad (17)$$

上式における条件付き破壊確率 $P_f^\circ(x)$ は、これまで開発されてきた確率過程論および不規則振動論に基づいた解析法により評価可能である。

式(17)は、時間に依存する信頼性問題における基本式である。式(17)と式(11)を比較すれば明らかなように、両者は全く同一の式である。したがって、式(17)で示される時間に依存する破壊確率も、上述した IFMPUC の手順に従って効率よく計算することができる。

4. ISPUD, IFM および IFMPUC の基本概念の比較

ここでは、3章で提案したサンプリング手法 IFMPUC をもう少し分かり易く説明するために、3つのサンプリング手法、すなわち ISPUD, IFM および IFMPUC の基本概念の比較を行う。簡単のために、取り扱う変数は X_1, X_2 の2つで、いずれも非相関の標準正規確率分布に従うものとする。

Fig.4 は、ISPUD と IFM 手法による破壊確率の求め方を図示したものである。図に示すように、ISPUDでは、まず設計点 $D(x_{D1}, x_{D2})$ を求め、その回りに Importance Sampling 密度関数 $h_{Y1}(x_1)$, $h_{Y2}(x_2)$ を用いてサンプリングを行い、次式によって破壊確率 P_f を求める。

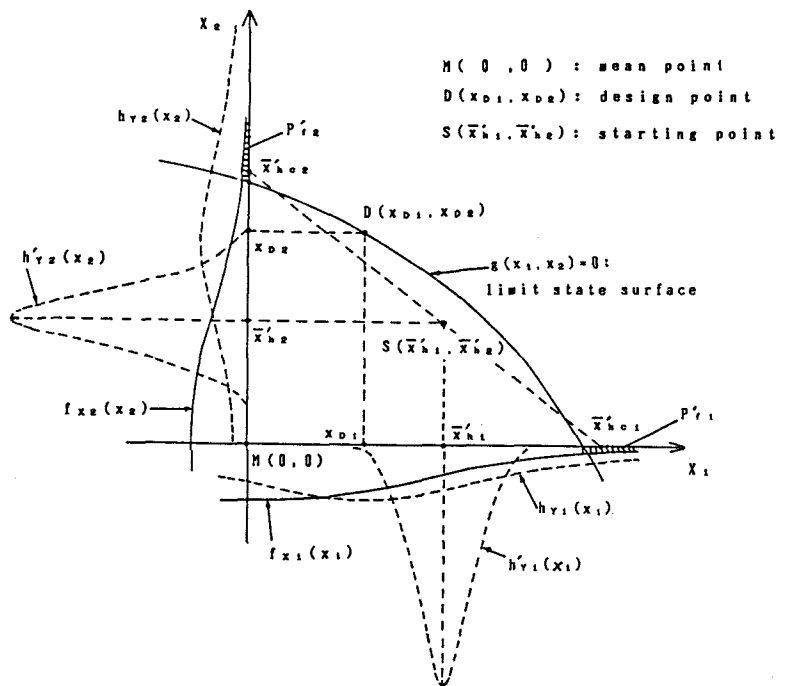


Fig.4 Basic Ideas of ISPUD and IFM Procedure for Two-Dimensional Case

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(x_{1i}, x_{2i}) \leq 0) \frac{f_{x1}(x_{1i}) \cdot f_{x2}(x_{2i})}{h_{v1}(x_{1i}) \cdot h_{v2}(x_{2i})} \quad (18)$$

IFM 手法では、まず3章で示した手順で Importance Sampling 密度関数の平均値の初期値

$$\bar{x}_{h1}' = \frac{\bar{x}_{hc1}' \cdot p_{f1}'}{p_{f1}' + p_{f2}'}, \quad \bar{x}_{h2}' = \frac{\bar{x}_{hc2}' \cdot p_{f2}'}{p_{f1}' + p_{f2}'} \quad (19)$$

を求める。ここに、 $\bar{x}_{hc1}, \bar{x}_{hc2}$ はそれぞれ p_{f1}', p_{f2}' の質量中心の座標値、そして p_{f1}', p_{f2}' はそれぞれ $x_2 = \mu_{x2}=0, x_1 = \mu_{x1}=0$ という条件のもとでの条件付き破壊確率である。これらの値は、通常モンテカルロ法を用いて次式で求める。

$$\bar{x}_{hc1}' = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_1^{(j)} \cdot I(g(x_1^{(j)}, \mu_{x2}) \leq 0)}{p_{f1}'}, \quad \bar{x}_{hc2}' = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_2^{(j)} \cdot I(g(\mu_{x1}, x_2^{(j)}) \leq 0)}{p_{f2}'} \quad (20)$$

$$p_{f1}' = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I(g(x_1^{(j)}, \mu_{x2}) \leq 0), \quad p_{f2}' = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I(g(\mu_{x1}, x_2^{(j)}) \leq 0) \quad (21)$$

次に、式(19)により定まる Starting Point $S(\bar{x}'_{h1}, \bar{x}'_{h2})$ の回りに、さらに同様の手順を繰り返し新たな Starting Point と標準偏差の初期値を求め、これらの値より定まる Importance Sampling 密度関数 $h_{v1}(x_1), h_{v2}(x_2)$ を用いてサンプリングを開始する。そして、次式で与えられる破壊確率 P_f を得る。

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(g(x_{1i}, x_{2i}) \leq 0) \frac{f_{x1}(x_{1i}) f_{x2}(x_{2i})}{h_{v1}'(x_{1i}) h_{v2}'(x_{2i})} \quad (22)$$

式(22)で得た P_f の推定誤差が大きければ、同様な手順を繰り返して先に求めた Importance Sampling 密度関数 $h_{v1}'(x_1), h_{v2}'(x_2)$ を更新して、再びサンプリングを行う。この手順を推定誤差が許容できる範囲に入るまで続ける。通常3回程度の繰り返して十分であることが示されている⁸⁾。

Fig.5 は、IFMPUC による破壊確率の求め方を図示したもの

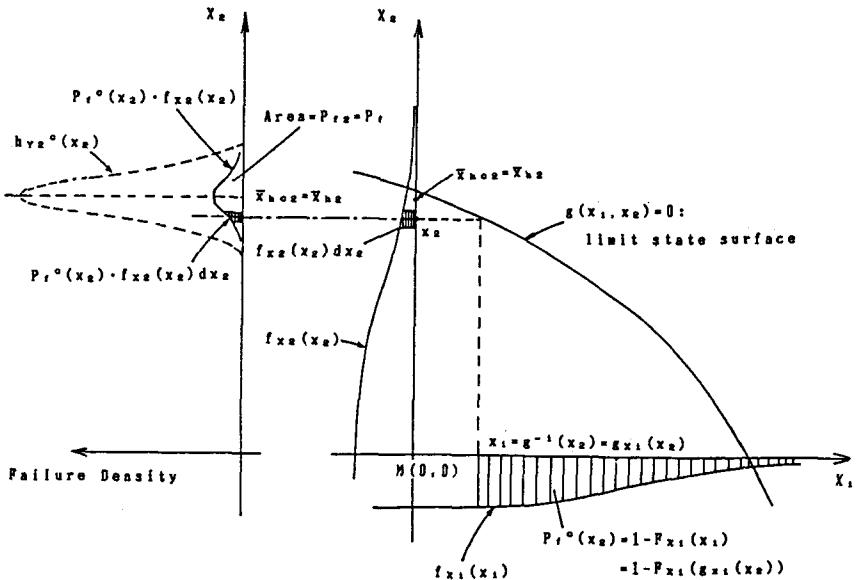


fig.5 Basic Idea of IFMPUC for Two-Dimensional Case

である。IFMPUCではまず、式(10)によって定義される条件付き破壊確率 $P_f^\circ(x_2)$ を求める。

$$P_f^\circ(x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) = 1 - F_{X_1}(g_{X_1}(x_2)) \quad (23)$$

ここに、 $x_1 = g^{-1}(x_2) = g_{X_1}(x_2)$ である。この条件付き破壊確率を用いれば破壊確率 P_f は、次のように評価される。

$$P_f = \int_{x_1 \in x_2} P_f^\circ(x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 = \int_{x_1 \in x_2} \{1 - F_{X_1}(g_{X_1}(x_2))\} f_{X_2}(x_2) dx_2 \quad (24)$$

上式より明らかなように、条件付き破壊確率の概念を導入すれば、 P_f を評価するための積分の次元が1つ減少して、2次元問題が1次元問題になる。さて、IFMPUCでは式(24)の積分を上述したIFM法を用いて効率よく計算する。この場合、Starting Pointの座標値は $\bar{x}_{h2}$ のみで、次式に示すように p_{f2} の質量中心として定められる。

$$\bar{x}_{h2} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_2^{(j)} \{1 - F_{X_1}(g_{X_1}(x_2^{(j)}))\}}{p_{f2}} \quad (25)$$

$$p_{f2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \{1 - F_{X_1}(g_{X_1}(x_2^{(j)}))\} \quad (26)$$

これらの式およびFig.5から明らかなように、2変数の問題においては $\bar{x}_{h2}$ 、 p_{f2} はそれぞれ $\bar{x}_{h2}$ 、 P_f に一致している。この $\bar{x}_{h2}$ を平均値とする Importance Sampling 密度関数 $h^\circ_{x_2}(x_{2i})$ によりサンプリングを開始し、破壊確率 P_f を得る。

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{1 - F_{X_1}(g_{X_1}(x_{2i}))\} \frac{f_{X_2}(x_{2i})}{h^\circ_{x_2}(x_{2i})} \quad (27)$$

IFM手法のところで示したように、 P_f の推定誤差が許容できる範囲に入るまで $h^\circ_{x_2}(x_2)$ を更新してサンプリングを繰り返す。

5. 数値計算例

本章では、本論文で提案した IFMPUC の有効性を示すために、2つの数値計算例を示す。[計算例1]は、時間に依存しない信頼性問題、[計算例2]は、時間に依存する信頼性問題を取り上げる。IFMPUCによって得られた計算結果を、IFM, ISPUDおよび通常のモンテカルロ法による計算結果と比較して、その有効性を示す。比較項目は、シミュレーション回数(N)、計算時間(CUP)および推定誤差(標準誤差 S_{IE})の3つを考える。

[計算例1]

非線形性の高い破壊基準関数を有する例として、よく取り扱われる時間に依存しない信頼性問題を考える。破壊確率基準関数 $g(x)$ は次式で定義される³⁾。

$$g(x) = 4 - \frac{1}{8} \sum_{m=2}^4 x_m^2 - x_1 \quad (28)$$

ここに、 X_1 は平均値 $\mu_{x_1}=0$ 、標準偏差 $\sigma_{x_1}=1.0$ を有するグンベル分布する確率変数、 X_2 、 X_3 および X_4 は、いずれも X_1 と同一の平均値および標準偏差を有する標準正規分布する確率変数である。そして、これら4つの確率変数は互いに独立とする。この場合の条件付き破壊確率は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} P_f(x') &= 1 - F_{x_1}(x_1) \\ &= 1 - \exp[-\exp\{-a(x_1-b)\}] \end{aligned} \quad (29)$$

ここに、 $a=\pi/(\sqrt{6}\sigma_{x_1})$ 、 $b=\mu_{x_1}-0.577/a$ 、 $x_1=u(x')=-(1/8)\sum_{m=2}^4 x_m^2+4$ である。

Table 1 に計算結果を示す。計算手法としてはIFMPUC、IFMおよびISPUDの3つを考えた。いずれの手法においても、計算はVAX11/750を用いた。表中の標準誤差 S_{IE} については、 P_f の推定値との比を計算し、パーセントで表示している。表から明かなように、本論文で提案したIFMPUCにより得られた結果は、シミュレーション回数 N 、CPU時間、標準誤差 S_{IE} のいずれの項目においても、他の2つの手法に比べて優れており、この方法の有効性が示される。なお、表の一番下の欄に示されている結果は、1次近似2次モーメント法による P_f 計算結果であり、この例題のように非線形性の高い問題においては線形近似法による方法ではかなりの誤差が出ることが分かる。

Table 1 Comparison of Results for Example 1

Method	Run No.	P_f	Statistical Error: $S_{IE}(\%)$	Total CPU(sec)	Number of Simulation for One Run : N
IFMPUC	1	$0.591 \cdot 10^{-2}$	0.0	4.3	100
	2	$0.591 \cdot 10^{-2}$	0.4		
	3	$0.590 \cdot 10^{-2}$	0.9		
	1	$0.591 \cdot 10^{-2}$	0.0	13.5	500
	2	$0.590 \cdot 10^{-2}$	0.5		
	3	$0.589 \cdot 10^{-2}$	0.3		
IFM	1	$0.589 \cdot 10^{-2}$	9.9	4.7	100
	2	$0.504 \cdot 10^{-2}$	9.2		
	3	$0.539 \cdot 10^{-2}$	7.1		
	1	$0.575 \cdot 10^{-2}$	4.7	14.0	500
	2	$0.559 \cdot 10^{-2}$	4.7		
	3	$0.559 \cdot 10^{-2}$	5.0		
	1	$0.575 \cdot 10^{-2}$	3.3	26.4	1000
	2	$0.563 \cdot 10^{-2}$	3.3		
	3	$0.597 \cdot 10^{-2}$	3.5		
ISPUD	1	$0.554 \cdot 10^{-2}$	3.6	32.2	1000
	2	$0.604 \cdot 10^{-2}$	4.2		
	3	$0.569 \cdot 10^{-2}$	3.7		
	1	$0.588 \cdot 10^{-2}$	1.5	157.3	5000
	2	$0.577 \cdot 10^{-2}$	1.6		
	3	$0.576 \cdot 10^{-2}$	1.6		
First Order	—	$0.332 \cdot 10^{-2}$	—	—	—

〔計算例2〕

動的外乱を受ける1自由度振動系の動的信頼性問題を考える¹⁰⁾。簡単化のために、外乱はガウス白色雑音でモデル化するが、外乱の強さならびに継続時間は確率変数としてモデル化する。構造系は微小減衰を有する線形振動系であるが、系の固有振動数ならびに減衰定数は確率変数としてモデル化する。そして、これらの確率変数は互いに独立であると仮定する。強制関数 $F(t)$ は、 $F(t)=S(t)mg$ で表わされるものとする。ここに、 m は質量、 g は重力加速度、 $S(t)$ はスペクトル密度 S_0 、継続時間 T を有するガウス白色雑音過程である。構造系の固有周波数は $n_0(\text{cps})$ 、減衰定数は ξ とする。確率変数としては、 $n_0=X_1$ 、 $\xi=X_2$ 、 $S_0=X_3$ 。

および $T=X_4$ の4つを考え、これらはそれぞれ次に示す確率分布に従うものとする。

$$\begin{aligned} n_0 &= X_1 = \text{Normal}, & N(\mu_{x1}=2\text{cps}, \sigma_{x1}=0.2\text{cps}) \\ \xi &= X_2 = \text{Lognormal}, & \text{LN}(\mu_{x2}=0.02, \sigma_{x2}=0.008) \\ S_0 &= X_3 = \text{Type II Extreme}, & \text{EX II}(\mu_{x3}=0.25, \sigma_{x3}=0.15) \\ T &= X_4 = \text{Lognormal}, & \text{LN}(\mu_{x4}=10\text{sec}, \sigma_{x4}=3.0\text{sec}) \end{aligned}$$

さて、変位応答が与えられたいき値レベル d を超過するという簡単な破壊基準を考えると、ランダムなシステム・パラメータ $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3, X_4)$ が $\mathbf{X}=\mathbf{x}$ 、すなわち、 $X_1=x_1, X_2=x_2, X_3=x_3, X_4=x_4$ という値をとるという条件のもとでの条件付き破壊確率は簡単な不規則振動解析により、次式で得られる。

$$P_f(\mathbf{x}) = 1 - \exp \left\{ -x_1 x_4 \exp \left(-\frac{8\pi^2 x_1^3 x_2 d^2}{x_3} \right) \right\} \quad (30)$$

Table 2 に計算結果を示す。計算手法としては、IFMPUCと通常のモンテカルロ法の2つを考えた。この例においても、計算に際しては、VAX11/750を用いた。変位のいき値レベルとしては、 $d=0.33, 0.50, 1.00(\text{ft})$ の3つのレベルを考えた。表から明らかなように、いき値レベル d が $d=1.00(\text{ft})$ と高い場合、すなわち破壊確率 P_f が非常に小さな値となる場合には、通常のモンテカルロ法ではシミュレーション回数 $N=50000$ 回、CPU時間 828.6秒の計算で標準推定誤差 S_{IE} を7.5%とするのがやっとである。しかし、IFMPUCでは $d=1.00(\text{ft})$ の場合にはシミュレーション回数 $N=2000 \times 3=6000$ 回、CPU時間61.3秒の計算で $S_{IE}=3.3\%$ の精度のよい結果が得られている。IFMPUC の計算法では破壊確率の大小にかかわらず短い計算時間で精度良い結果を得ることができる。

Table 2 Comparison of Results for Example 2

Method	Threthould R Level: d(ft)	Run No.	P_f	Statistical Error: $S_{IE}(\%)$	Total CPU(sec)	Number of Simulation for One Run: N
IFMPUC	0.33	1 2	0.228 0.220	5.0 2.2	41.2	2000
	0.50	1 2	0.350 10^{-1} 0.340 10^{-1}	7.8 2.4	41.3	2000
	1.00	1 2 3	0.425 10^{-3} 0.435 10^{-3} 0.492 10^{-3}	31.6 7.7 3.3	61.3	2000
Monte-Carlo	0.33	1	0.224	1.9	79.3	5000
	0.50	1	0.330 10^{-1}	4.4	78.8	5000
	1.00	1	0.662 10^{-3}	18.6	81.0	5000
	1.00	1	0.600 10^{-3}	11.8	159.3	20000
	1.00	1	0.5375 10^{-3}	7.5	828.6	50000

6. あとがき

本論文では、構造物の破壊確率を計算するための有効なサンプリング手法を提案した。まず、条件付き破壊確率の概念を導入して、問題の次元を1つ減らして効率化をはかり、さらに全破壊確率を求める積分の計算において、繰返し高速モンテカルロ法を用いることにより効率化をはかった。この方法は時間に依存する信頼性問題のみならず時間に依存しない信頼性問題にも適用可能であることを示した。また、2つの計算例により提案した手法がかなり小さい破壊確率の計算に際しても、他のサンプリング手法に比べて非常に少ないシミュレーション回数、CPU時間で精度よく求められることを示した。

この手法の問題点としては、条件付き破壊確率が式(10)で示すような陽な形で求めることが困難な場合に生じる。このような場合にも本手法が有効であるためには、条件付き破壊確率をいかに効率よく陽な形で評

価するかが重要なポイントである。この点については今後の課題であると考えている。

謝 辞

本研究は、著者がインスブルック大学の土木建築工学部 力学講座に9ヶ月間(昭和62年10月～昭和63年6月)客員教授として滞在した際にまとめたものである。インスブルック滞中に際して経済的援助をいただいたオーストリア連邦学術研究省ならびに日本政府文部省の関係各位に厚くお礼申し上げる次第である。また、この研究はオーストリア政府研究機関の援助もいただいた、併せてお礼申し上げる。

また、鳥取大学 高岡宣善教授には、著者がインスブルック大学の客員教授として研究・教育に携わる機会を与えていただき、さらに本研究の遂行に際して貴重な御助言を賜った。厚くお礼申し上げる次第である。さらに、有益な議論をしていただいたインスブルック大学の大学院生Y.M.Chenさん、W.Ouyornprasert君ならびに図表の作成等に御協力いただいた鳥取大学の大学院生山口和範君、酒井太君に厚くお礼申し上げる。

参考文献

- 1) Harbitz, A : Efficient and Accurate Probability of Failure Calculation by the Use of Importance Sampling Technique, Proc. of ICASP-4, pp.825-836, 1983.
- 2) Schuëller, G. I. and Stix, R. : A Critical Appraisal of Methods to Determine Failure Probabilities, Structural Safety, Vol.4, pp.291-309, 1987.
- 3) Bourgund, U and Bucher, C.G.: ISPUD, a Code for Importance Sampling Procedures Using Design Points - A User's Manual, Report No.8-86, Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, Nov., 1986.
- 4) Rubinstein, R.Y.: Simulation and the Monte-Carlo Method, John Wiley & Sons, New York, 1981.
- 5) Iman, R.L. and Canover, W.J.: Small Sample Sensitivity Analysis Techniques for Computer Models with an Application to Risk Assessment, Communications in Statistics, Theory and Methods, A9(17), pp.1749-1842, 1980.
- 6) Hwang, H., Reich, M., Ellingwood, B. and Shinozuka, M. : Reliability Assessment and Probability Based Design of Reinforced Concrete Containments and Shear Walls, Report NUREG/CR-3957, BNL-NUREG-51956, Structural Analysis Division, Dept. of Nuclear Energy, Brookhaven National Laboratory, Upton, New York, 1986.
- 7) Schuëller, G.I., Bucher, C.G., Bourgund, U. and Ouyornprasert, W : On Efficient Computational Schemes to Calculate Structural Failure Probabilities, Lecture Notes in Engineering No.31, Stochastic Structural Mechanics, Edited by Y.K.Lin and G.I.Schuëller, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- 8) Bucher, C.G.: Adaptive Sampling-An Iterative Fast Monte-Carlo Procedure, Structural Safety, Vol.5, pp.119-126, 1988.
- 9) Harbitz, A.: A Level 3 Acculate Probability of Failure Calculation Method, Proc. of Euromech 155 on Reliability Theory of Structural Engineering System, Dialog 6-82, Lyngby, pp.337-346, 1982.
- 10) Wen, Y. K. and Chen H-C.: On Fast Integration for Time Variant Structral Reliability, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.2, No.3, pp.156-162, Sept., 1987.

(1988年10月12日)