

安全性指標の有効性について

AVAILABILITY OF SAFETY INDEX FOR STRUCTURAL DESIGN

長 尚*

By Takashi CHOU

It has been observed that the safety index, β , according to the Advanced Second Moment Method, is a very powerful tool available for the structural reliability problems. As the value of β increases, however, the error of failure probability, p_F , evaluated from β increases significantly, even if the error of β is small.

The purpose of this study is to demonstrate numerically relations between design results such as configurations and the safety indices with the help of some fundamental problems and practical examples, and to discuss availability of the index. The design results are not affected to the same degree as the variance of the probability, but it is usually affected to the same or somewhat larger degree as the variance of the index.

1. まえがき

一般に簡単な計算で求められる全確率分布安全性指標 β (信頼性指標ともいう) は、破壊確率 p_F との対応の良い指標である。^{1) 2) 3) 4) 5) 6)} これまで筆者が扱った多くの構造物の信頼性解析の検討結果によると、モンテカルロ法によって求めたほぼ正確な破壊確率 p_F に対応する指標 β^E , すなわち

$$\beta^E = -\Phi^{-1}(p_F) \quad \dots \dots \dots (1)$$

に対する安全性指標 β の誤差 $(\beta - \beta^E)$ 率は通常数%以下である。⁵⁾ ここに $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数である。しかし安全性指標 β の値が大きくなると、安全性指標 β の誤差率が数%以下であっても、これに対応する破壊確率 p_F の誤差は非常に大きくなる。その模様を見るために、 β の変化 α に対する p_F の変化 γ を次式で定義し、その結果を図-1に示す。

$$\gamma = \Phi(-\alpha\beta) / \Phi(-\beta) \quad \dots \dots \dots (2)$$

図-1は横軸に β をとり縦軸に γ をとって、安全性指標 β が $\pm 2.5\%$, $\pm 5\%$ 変動した場合 (すなわち $\alpha = 0.95, 0.975, 1.025, 1.05$) について示されている。この図から分かるように、安全性指標 β の誤差がたとえ 5% であっても、例えば $\beta = 5$ の場合、破壊確率 p_F は非常に大きく変化し、約 $1/4$ もしくは 3.5 倍にもなっている。したがって全確率分布安全性指標 β が破壊確率と対応が良いと言っても、

$$p_F \approx \Phi(-\beta) \quad \dots \dots \dots (3)$$

の関係が成立するのではなく、むしろ次のような関係が成立すると言った方が適切である。

* 工博 信州大学教授 工学部土木工学科 (〒380 長野市若里 500番地)

$$\beta \doteq -\Phi^{-1}(p_F) \quad \dots \dots \dots (4)$$

そうだとすると、たとえ全確率分布安全性指標であっても、 β の値が大きくなると、指標としての有効性に疑問が出るかもしれない。確かに、破壊確率そのものが議論の対象になり、またその確率の変化が敏感に結果に響くような問題では、このような安全性指標を用いることは疑問であろう。しかし構造物の信頼性解析の問題では、むしろそのようなケースは少ない。通常は構造物の設計に関連して安全性指標は用いられる。構造物の設計問題では破壊確率の変化がそのまま同じ程度に、断面寸法などの設計結果に影響を与えるのではない。普通安全性指標の変化と同程度もしくはやや上まわる程度の影響しか与えないのである。本文ではこの問題について具体的な数値計算結果に基づいて検討する。そして構造物の設計問題では、破壊確率に比べてはるかに計算が簡単で、設計結果との関連も強い全確率分布安全性指標 β の有効性は極めて高いことを指摘し、若干の考察を加える。

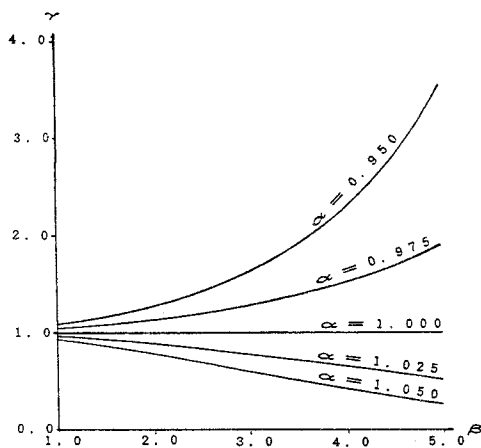


図-1 安全性指標の変化と破壊確率の変化の関係

2. 安全性指標の変化が設計に与える影響

2.1 ケース1

破壊基準関数 $g(x)$ が、

$$g(x) = R - S \quad \dots \dots \dots (5)$$

で、強度 R と荷重影響 S が共に正規分布の場合、設計用安全性指標 β_D を用いて設計されたときの中央安全率 ($\nu = \bar{R} / \bar{S}$) は次のように表される。

$$\nu = \{1 + \sqrt{1 - (1 - \beta_D^2 V_R^2)(1 - \beta_D^2 V_S^2)}\} / (1 - \beta_D^2 V_R^2) \quad \dots (6)$$

ここに V_R 、 V_S は R 、 S の変動係数である。ここで β_D の変化 α (0.95~1.05) に対する ν の変化模様を見るために、 β_D の変化 α に対する ν の変化 δ を次式のように定義する。

$$\delta = \nu(\alpha \beta_D) / \nu(\beta_D) \quad \dots \dots \dots (7)$$

この δ の計算結果を図-2~7に実線で示す。これらの図では横軸に α をとり縦軸に δ をとって、設計用安全性指標が1, 2, 3, 4, 5の場合について示してある。ただし共に正規分布の場合には式(6)から明らかなように、 $\beta_D = 1/V_R$ で ν は無限大となるから、 β_D の値は $1/V_R - 0.2$ 以下とした。なおこれらの図には比較のために、式(2)に当たる次式で計算される、破壊確率への影響度合 γ が破線で示されている。

$$\gamma = p_F(\alpha \beta_D) / p_F(\beta_D) \quad \dots \dots \dots (8)$$

参考のために図-6の場合の δ 、 γ の数値の一部を表-1に示す。これらの図表から、次のようなことが言える。
(1) 強度の変動係数が大きくなると、設計用安全性指標の変化が設計(中央安全率)へ及ぼす影響はやや大きくなる。
(2) 荷重影響の変動係数の大小と、設計用安全性指標の変化が設計(中央安全率)へ及ぼす影響との間にはほとんど関係がない。

表-1 ケース1の δ 、 γ の例

$\beta_D \backslash \alpha$	0.95	0.975	1.025	1.05
2.0	δ 0.95	0.98	1.03	1.05
	γ 1.26	1.12	0.89	0.79
3.8	δ 0.52	0.69	1.88	18.4
	γ 2.12	1.46	0.68	0.46

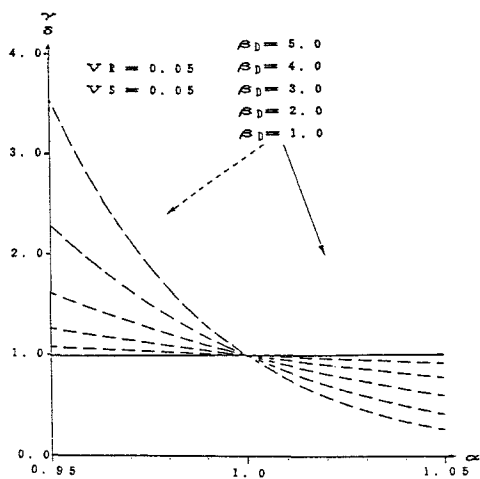


図-2 β_D の変化の ν への影響 (ケース1-1)

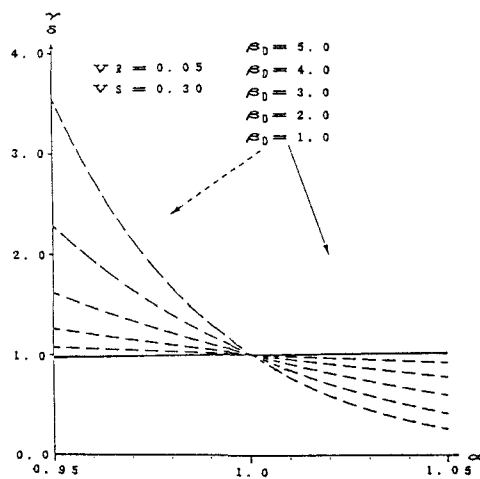


図-3 β_D の変化の ν への影響 (ケース1-2)

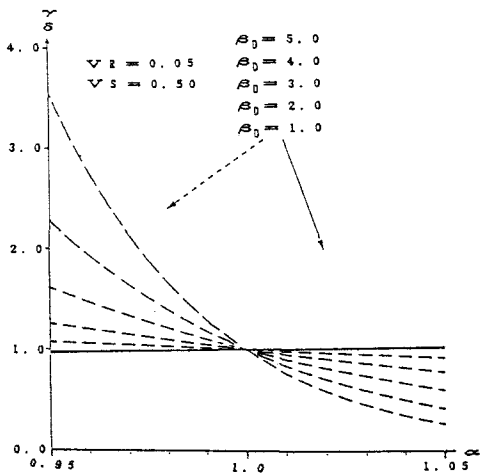


図-4 β_D の変化の ν への影響 (ケース1-3)

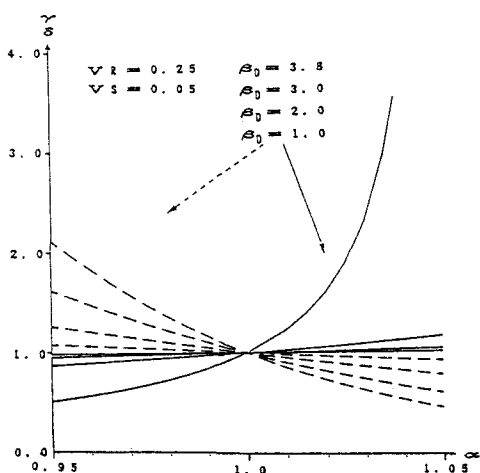


図-5 β_D の変化の ν への影響 (ケース1-4)

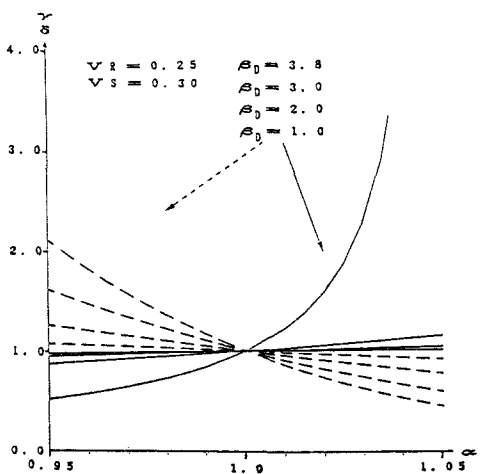


図-6 β_D の変化の ν への影響 (ケース1-5)

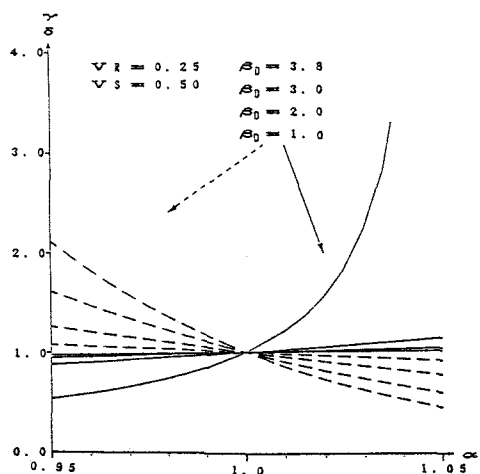


図-7 β_D の変化の ν への影響 (ケース1-6)

(3) β_D の値が $1/V_R$ に近い場合を除き、設計用安全性指標の変化が設計（中央安全率）へ及ぼす影響は小さい。

(4)一方破壊確率は設計用安全性指標の変化の影響を大きく受けている。

以上より、破壊基準関数が式（５）で確率変数 R 、 S が共に正規分布の場合には、 β_D の値が $1/V_R$ に近い場合を除き、安全性指標のもつ誤差がもたらす破壊確率の誤差のような極端な影響を、設計結果には与えないと言える。

ただし β_D の値が $1/V_R$ に近い場合には、図に見られるように破壊確率に及ぼすような影響を越えて、さらに極端な影響を与える。これは既に指摘³⁾したように、このようなケースでは強度を幾ら上げてもある一定の安全性を越えないという、常識に反する性質を持っていることによる。したがって破壊基準関数が式（５）で、確率変数 R 、 S が共に正規分布である状態を設定すること自体に問題がある。このことについては後述する。なお以下本ケースのように、主として中央安全率を設計結果として評価するが、厳密に言うところらが等価でないこともあり得ることを断っておく。

2. 2 ケース2

破壊基準関数が式（５）で確率変数 R 、 S が共に対数正規分布の場合、設計中央安全率 ν は次のようになる。

$$\nu = \exp \left[\beta_D \sqrt{\ln \{ (1+V_R^2)(1+V_S^2) \}} - \ln \sqrt{ (1+V_S^2) / (1+V_R^2) } \right] \dots (9)$$

この式（９）で計算された中央安全率 ν で設計されたものの、安全性指標は式（６）の正規分布の場合と異なり、正確には β_D とはならず若干の差が生ずる。これは全確率分布安全性指標の性質から言える。⁵⁾ しかしここでは、 β_D の変化の設計への影響の程度を見るのが目的なので、これをそのまま使う。なお以下述べるケース3～13のすべてについて、このことは前提になっていることを断っておく。

ここで先のケース1の場合と同様に、 β_D の変化に対する ν の変化模様を図－8～13に示す。また表－2に図－12の場合の数値の一部を示す。

表－2 ケース2の δ 、 γ の例

これらの図表から、次のようなことが言える。

- (1)荷重影響の変動係数が大きくなると、設計用安全性指標の変化が設計（中央安全率）へ及ぼす影響はやや大きくなる。
- (2)強度の変動係数の大小と、設計用安全性指標の変化が設計（中央安全率）へ及ぼす影響との間にはほとんど関係がない。
- (3)設計用安全性指標の変化が設計（中央安全率）へ及ぼす影響は小さい。その程度はケース1の場合よりさらに小さい。
- (4)一方破壊確率は設計用安全性指標の変化の影響を大きく受けている。

$\beta_D \backslash \alpha$	α	0.95	0.975	1.025	1.05
2.0	δ	0.96	0.98	1.02	1.04
	γ	1.26	1.12	0.89	0.79
5.0	δ	0.91	0.95	1.05	1.10
	γ	3.55	1.90	0.52	0.27

以上より破壊基準関数が式（５）で確率変数 R 、 S が共に対数正規分布の場合には、安全性指標のもつ誤差がもたらす破壊確率の誤差のような極端な影響を、ケース1の場合よりさらに、設計には与えないと言える。しかもこの場合にはケース1のような欠点、すなわち幾ら強度を高めても、安全性の水準がある一定値より上がらず、そのような状態ではわずかな設計用安全性指標の誤差が設計に非常に響くというようなことはない。

なお上記(1)、(2)はケース1と丁度逆な傾向となっている。

2. 3 ケース3～9

破壊基準関数はやはり式（５）とし、各種の確率分布の組合わせについて、 $\beta_D = 3$ ($V_R = 0.25$, $V_S = 0.3$) における設計中央安全率 ν および安全性指標の変化の、 ν への影響 δ の計算結果を表－3に示す。なおケース番号3以降は、式（６）、（９）のような式は誘導できない。そこで、数値微分による Newton-Raphson 法を適用した算法¹⁰⁾で計算を行った。表中のアルファベット記号は、最初が R の、次が S の確率分

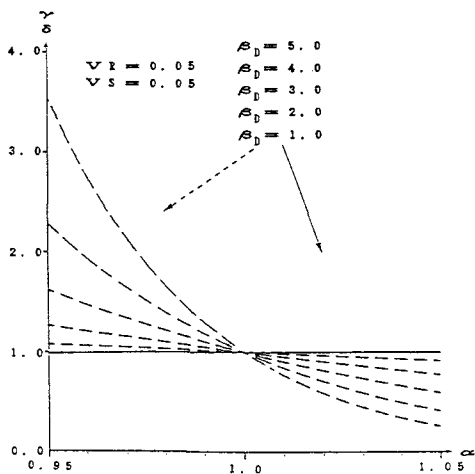


図-8 β_D の変化の ν への影響 (ケース2-1)

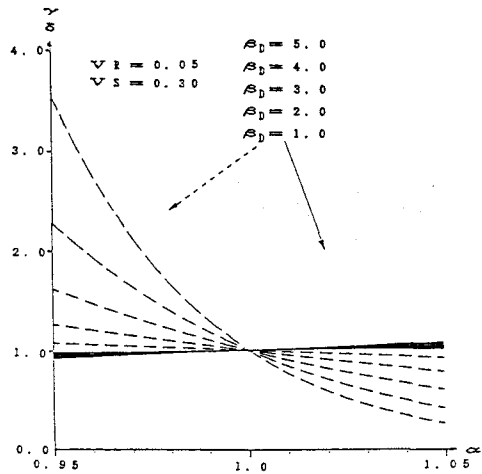


図-9 β_D の変化の ν への影響 (ケース2-2)

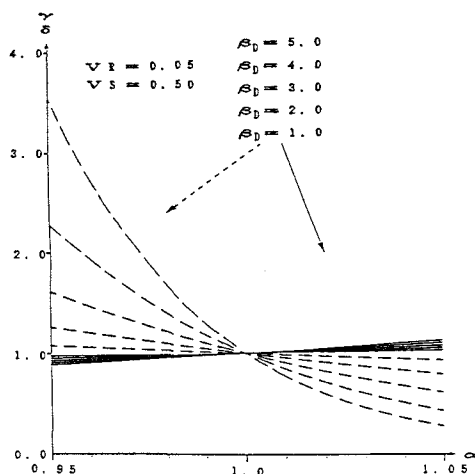


図-10 β_D の変化の ν への影響 (ケース2-3)

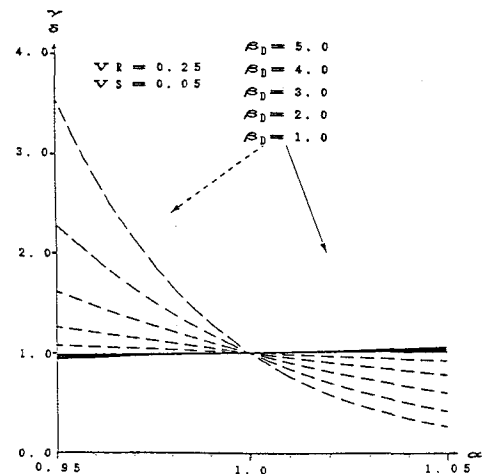


図-11 β_D の変化の ν への影響 (ケース2-4)

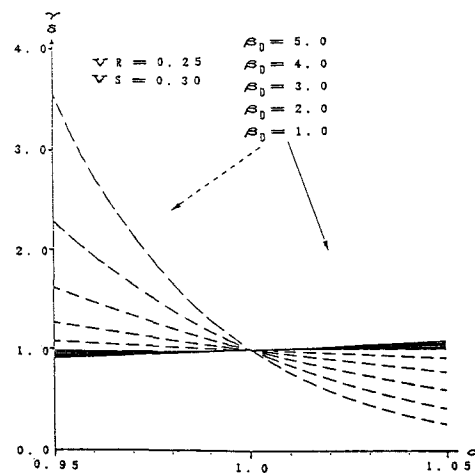


図-12 β_D の変化の ν への影響 (ケース2-5)

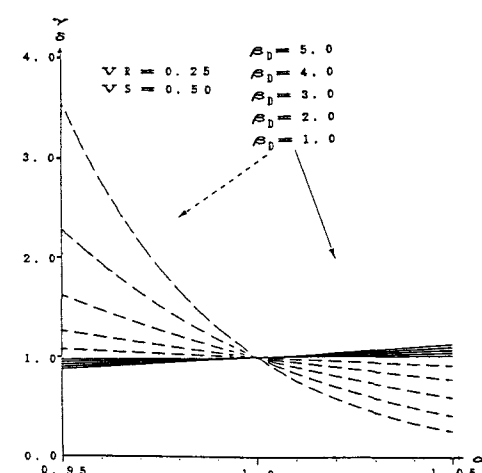


図-13 β_D の変化の ν への影響 (ケース2-6)

布が次のようであることを示す。

N：正規分布，L：対数正規分布，W：ワイブル分布〔下限値＝平均値－2×（標準偏差）〕，E：極値Ⅰ型最大値分布，B：ベータ分布〔下限値＝平均値－2×（標準偏差），上限値＝平均値＋3×（標準偏差）〕

また，表－4には表－3で示した $\beta_D = 3$ の場合の中央安全率 ν を用いたとき，実際のほぼ正確な安全性指標はどうなるかを，モンテカルロ法で照査した結果を示す。

これらの表から次のようなことが言える。

(1) Rが正規分布の場合は，Sが正規分布でなくても，

ケース1の共に正規分布の場合と傾向が同じである。

(2) Rが正規分布でない場合は，Sが正規分布であっても，ケース2の共に対数正規分布の場合と傾向が同じである。しかもここではかなり極端な上下限値を設定してあるから，ここで示さなかった実際に想定される確率分布の組合せでは，さらにこのようなことが言えると考えられる。

(3)したがって先にも述べたようにRを正規分布と設定することが実務的でないから，安全性指標の誤差は，通常ケース2で示した程度，すなわち高々誤差と同程度かややそれを上回る程度の影響しか，設計に与えないと言えよう。

(4)設計中央安全率 ν もRが正規分布とした場合とそうでない場合でかなり違い，前者が大きくなっている。

(5)先にケース1以外において，設計用安全性指標 β_D と実際の安全性指標とは若干相違すると指摘したが，ここに示した例では両者はかなり一致している。

2. 4 ケース10, 11

次のような鋼製はりの曲げ破壊の破壊基準関数 η について取り上げる。

$$g(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3 - (x_4 + x_5) x_6 \dots\dots\dots (10)$$

ここで x_1 の平均値 $\bar{x}_1$ を設計用安全性指標 $\beta_D = 4$ とその近辺で設計するものとする。平均値（無次元化してある） $\bar{x}$ ，変動係数 V は次のようなものとし，ケース10はすべての確率変数を正規分布，ケース11はすべての確率変数を対数正規分布とする。

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1 \ 2.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0)^T \dots\dots\dots (11)$$

$$\mathbf{V} = (0.15 \ 0.15 \ 0.15 \ 0.15 \ 0.15 \ 0.15)^T \dots\dots\dots (12)$$

表－5に， $\alpha = 0.95 \sim 1.05$ について設計値 $\bar{x}_1$ と安全性指標の変化の設計値への影響 δ および破壊確率への影響 γ を示す。

表－3 ケース1～9の ν ， δ

ケース番号			1	2	3	4	5	6	7	8	9
	β_D	α	NN	LL	NL	LN	NE	LE	WE	NB	BB
ν	2.85	0.95	3.92	2.94	3.84	2.73	3.84	3.00	3.05	4.00	2.80
	3.00	1.00	4.47	3.12	4.38	2.87	4.34	3.19	3.23	4.56	2.89
	3.15	1.05	5.21	3.30	5.06	3.01	5.06	3.39	3.42	5.31	2.98
δ	2.85	0.95	0.88	0.94	0.88	0.95	0.88	0.94	0.92	0.88	0.97
	3.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	3.15	1.05	1.16	1.06	1.16	1.05	1.17	1.06	1.08	1.16	1.03

表－4 ケース1～9の実際の β

ケース番号			1	2	3	4	5	6	7	8	9
	β_D	α	NN	LL	NL	LN	NE	LE	WE	NB	BB
β	3.00	1.00	3.00	2.98	2.94	3.04	2.93	2.98	3.06	3.01	2.91

このように実際の多変数の非線形破壊基準関数の場合でも、これまで指摘したようなこと、すなわち“安全性指標のもつ誤差は、それがもたらす破壊確率の誤差のような極端な影響を設計には与えず、高々誤差と同程度かやや上回る程度の影響しか与えない”と言える。しかもケース10では、個々の確率変数をすべて正規分布としても、ケース1のような現象は起きていない。このケース10では、強度項 x_1, x_2, x_3 を R とし、荷重影響項 $(x_4 + x_5) x_6$ を S として、これらの変動係数 V_R, V_S をモンテカルロ法で求めると、0.26, 0.18であった。そこでこれらの R, S を正規分布とすると $1/V_R$ が3.85であり、 $\beta_D = 4.0$

表-5 ケース10, 11の $\bar{x}_1, \delta, \gamma$

ケース番号	β_D	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
	α	0.950	0.975	1.000	1.025	1.05
	γ	2.28	1.52	1.0	0.65	0.42
10	$\bar{x}_1$	3.81	3.97	4.13	4.31	4.50
	δ	0.92	0.96	1.0	1.05	1.09
11	$\bar{x}_1$	3.37	3.47	3.59	3.70	3.82
	δ	0.94	0.97	1.0	1.03	1.07

では設計不可能となる。また設計可能な $\beta_D = 3.5$ としても、ケース1から推定されるように、安全性指標の変化の影響は極めて大きくなる。しかるにケース10ではその影響は前述の通り非常に小さい。これはたとえ個々の確率変数が正規分布であっても、その非線形関数である強度項 x_1, x_2, x_3 はもはや正規分布でないことによっている。したがって、通常強度項は多数の確率変数の非線形関数であるから、強度項としてまとめた時、それを正規分布とするのは不合理である。先に指摘したように、“幾ら強度を高めても安全性はある限度以上にはならない”という非常識な結果となるのは、実際には正規分布ではないのに正規分布を仮定したことから起きているのである。つまり、個々の確率変数が正規分布であるということと、荷重項としてまとめた時、それが正規分布であるということとは違うのである。

2. 5 ケース12, 13

曲げモーメントが作用する単鉄筋長方形はり断面の破壊基準関数³⁾は次のように表される。

$$g(\mathbf{x}) = [x_1 x_2 \{x_3 - (x_1 x_2) / (1.7 x_4 x_5)\}] x_6 - (x_7 + x_8) x_9 \quad (13)$$

ここに、 x_1 は鉄筋断面積（平均値 $\bar{x}_{1D}$ 、変動係数0.03）、 x_2 は鉄筋の降伏点（平均値3300kgf/cm²、変動係数0.04）、 x_3 は有効高さ（平均値84.92cm、変動係数0.05）、 x_4 は断面の幅（平均値100cm、変動係数0.05）、 x_5 はコンクリートの円柱供試体の強度（平均値288 kgf/cm²、変動係数0.2）、 x_6 は強度項の修正係数（平均値1.0、変動係数0.1）、 x_7 は死荷重曲げモーメント（平均値60.61tm、変動係数0.05）、 x_8 は活荷重曲げモーメント（平均値25.64 tm、変動係数0.35）、 x_9 は荷重項の修正係数（平均値1.0、変動係数0.1）とする。すべての確率変数を正規分布とした場合をケース12、対数正規分布とした場合をケース13として、設計目標安全性指標 β_D が2.5～5.5の範囲の鉄筋断面積の設計値 $\bar{x}_{1D}$

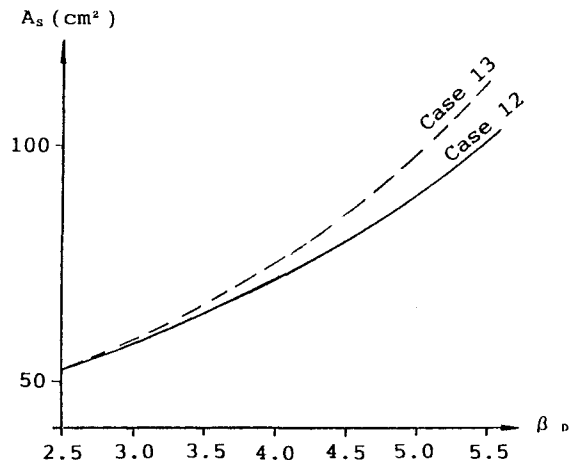


図-14 設計値と目標安全性指標の関係

(平均値)を図-14に示す。この図より、 β_D の範囲を例えば1程度に限ると、設計結果は安全性指標にほぼ比例する。一方これに対応する破壊確率は対数的な変化をする。

3. まとめ

以上を要約すると次のようである。

- (1)全確率分布安全性指標から標準正規確率分布関数を用いて計算した破壊確率が、正確な破壊確率と比較的合致するとは必ずしも言えない。
- (2)むしろ、全確率分布安全性指標が、正確な破壊確率から標準正規確率分布逆関数で計算された標準正規変数の符号を逆にした値と、比較的よく合致すると言った方が良い。
- (3)しからば全確率分布安全性指標は指標としての有効性に欠けるかということそうではない。通常の設計問題では、破壊確率が直接設計に影響を与えるのではなく、むしろ安全性指標のようなものが設計に直接的な影響を与える。
- (4)このことを、幾つかのケースについて具体的に数値を示して検討した。その結果“安全性指標のもつ誤差は、それがもたらす破壊確率の誤差のような極端な影響を設計結果には与えず、せいぜい誤差と同程度かやや上回る程度の影響しか与えない”と言える。つまり設計に直接影響を与えるのは、設計用安全性指標そのものである。このことと、統計的データが必ずしも十分でなくて、破壊確率そのものの精度に問題がある現状を考え合わせると、設計の問題では、破壊確率よりも安全性指標で議論した方が实际的で簡便であると言える。
- (5)破壊基準関数の強度項をまとめて一つの変数とする時、その確率分布を正規分布と仮定するのは、場合によっては誤った結論を導く懸念があり、注意を要する。

参考文献

- 1) Rackwitz, R. and Fießler, B., “Note on Discrete Safety Checking when using Non-normal Stochastic Models for Basic Variables”, Sonderforschungsbereich 96, Technical University of Munich, pp.85-100, 1976 .
- 2) Ang, A.H-S. and Tang, W.H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II John Wiley and Sons Inc., pp.353-426, 1984 .
- 3) 長尚：安全性指標に関する若干の考察，土木学会論文報告集，第 324号，pp.41-50. 1982.
- 4) 長尚：相関がある場合の全確率分布安全性指標，構造工学論文集，Vol.32A，pp.485-494，1987.
- 5) 長尚：構造物の信頼性解析に用いる信頼性指標について，JCQSSAR’87論文集，Vol. 1，pp.335-340，1987.
- 6) 長尚：斜面安定解析問題の信頼性解析，土と基礎，Vol.36，No. 5，pp.25-30，1988.
- 7) 長尚，鈴木宏明：全確率分布安全性指標による設計，昭和63年度土木学会中部支部研究発表会概要集，1989.

(1989年10月12日受付)