

相補掃出法を用いた立体骨組構造の ホロノミック弾塑性解析

HOLONOMIC ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF SPACE FRAMES
BY COMPLEMENTARY PIVOTING ALGORITHM

三原徹治* 北小路雅倫** 石川信隆*** 太田俊昭****

By Tetsuji MIHARA, Masamichi KITAKOJI, Nobutaka ISHIKAWA and Toshiaki OHTA

This paper presents an efficient holonomic elastic-plastic analysis method of space frames using a complementary pivoting algorithm. The necessary and sufficient conditions for the holonomic elastic-plastic analysis of space frames are firstly derived as a linear complementarity problem by applying the Khun-Tucker condition. Then, the sequential linearized yield condition is adopted so that the plastic capacity of each section under combined stresses may be estimated as correctly as possible. The complementary pivoting algorithm is applied to solve the linear complementarity problem of the elastic-plastic analysis using the sequential linearized yield condition. Two space structures are analyzed to illustrate the validity and the scope of application of this approach. It is found that this method is very efficient and useful for the holonomic elastic-plastic analysis of space frames under combined stress.

1. 緒 言

近年、大地震を受ける建築構造物や土石流を受ける鋼製砂防構造物などを対象として、部材の塑性領域までを考慮した極限設計法に関する検討が行われている¹⁾²⁾。そこで、先に著者ら³⁾は、トラス構造を対象として弾塑性変形量を制約条件とする最適弾塑性設計法を開発し、種々の検討を行ってきた。その手法は、弾塑性解析、感度解析、双対法による最適化という3つの部分に明確に区分することにより、設計計算の効率化が図られているが、さらに組合せ応力を受ける立体骨組構造へ適用可能とするためには、特に、必要計算容量、計算時間において効率的で、しかも構造物の弾塑性挙動を比較的正確に求めることのできる立体骨組に対する弾塑性解析法の開発が必要である。

組合せ応力を受ける立体骨組構造の弾塑性挙動は一般に非常に複雑になるため、作用荷重量を逐次増加させ降伏関数値や変形量などを追跡する、いわゆる弾塑性増分解析を用いると、多大な繰返し計算を必要とし、設計への適用はきわめて困難であることが予想される。一方、効率的な材料非線形解析法として、最適化手法を用いた解法、例えば、エネルギー原理に基づく解法⁴⁾や最適化手法によるホロノミック弾塑性解析法³⁾などが提案されているが、これらは、いずれもトラス構造やはり構造など単一応力の場合を対象としており、

* 工博 九州共立大学講師 工学部土木工学科 (〒807 北九州市八幡西区自由ヶ丘1-8)

** 防衛大学校理工学研究科学生 (〒239 横須賀走水1-10-20)

*** 工博 防衛大学校教授 土木工学教室 (同上)

**** 工博 九州大学教授 工学部土木工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

組合せ応力を受ける場合については未だ開発されていない。

本研究は、上記のような観点から、組合せ応力を受ける立体骨組構造物を対象として、相補掃出法を用いた効率的かつ比較的正確な弾塑性解析法の開発を企図したものである。すなわち、まず、部材の非線形降伏条件を比較的正確に評価し、計算量を小さくするために、算定される部材内力状態に応じて逐次線形近似する手法を提示した。次に、この逐次線形近似降伏条件を用いて、設計への適用が可能なホロノミック弾塑性解析の解析基本式を、線形相補問題 (Linear Complementarity Problem, LCP)⁵⁾として定式化した。さらに、その解法には、相補掃出法 (Lemke法)⁵⁾を適用して計算の効率化を図り、最後に、直角はりおよび立体ラーメン構造の計算例によって、本法の妥当性と応用性について検討した。

なお、本研究では次の仮定を用いた。

- (1) 各部材の内力と内変形の関係は、完全弾塑性型とする。
- (2) つり合い条件は変形前において求められるものとし、微小変形理論にしたがう。
- (3) 作用荷重は比例的に変化するものとする。

2. 基本式

(1) ホロノミック弾塑性解析の必要十分条件⁶⁾⁷⁾

弾塑性解析には、全変形理論に基づき過去の荷重履歴とは無関係に、ある荷重レベルでの構造物の弾塑性変形状態を求めるホロノミック解析と、ひずみ増分理論に基づき荷重経路に依存し、除荷の影響を考慮しながら逐次荷重～変位関係を追跡する増分解析とがある。ホロノミック弾塑性解析は、除荷の影響を無視しているため弾塑性増分解析法に比較すると解の厳密性に欠ける場合があるが、設計問題への平易な適用が可能である。よって、本研究では設計問題への適用性から、弾塑性解析の基本式としてホロノミック弾塑性解析を採用する。

応力法によるコンプレメンタリーエネルギー最小化の方法によれば、ホロノミック弾塑性解析の基本式は、次のような2次計画問題として定式化される⁶⁾⁷⁾。

$$\begin{array}{ll}
 \text{未知数} & : \quad \mathbf{Q} \\
 \text{目的関数} & : \quad \Pi_c = \mathbf{Q}^T \mathbf{k}^{-1} \mathbf{Q} \rightarrow \min \quad \text{----- (1)} \\
 \text{制約条件} & : \quad \text{(E)} \quad \mathbf{C}^T \mathbf{Q} = \alpha \mathbf{F} \quad \text{----- (2)} \\
 & \quad \text{(Y)} \quad \Phi = \mathbf{N}^T \mathbf{Q} - \mathbf{R} \leq \mathbf{0} \quad \text{----- (3)}
 \end{array}$$

ただし、 $\mathbf{Q}$ は内力ベクトル、 Π_c はコンプレメンタリーエネルギー、 $\mathbf{k}^{-1}$ は集合柔性マトリックス、 $\mathbf{C}$ は適合マトリックス、 α は荷重係数、 $\mathbf{F}$ は基準とする外力ベクトル、 Φ は降伏関数ベクトル、 $\mathbf{R}$ は塑性容量ベクトル、 $\mathbf{N}$ は線形化降伏面に対する単位外向法線マトリックスであり、記号Tおよび -1 はそれぞれ転置および逆マトリックスを示す。

ここで、上式は、式(2)に示す部材要素に作用する内力 $\mathbf{Q}$ と構造物の各節点に作用する外力ベクトル $\alpha \mathbf{F}$ が常につり合うという平衡条件式(E)と、式(3)に示す組合せ応力下での降伏条件(Y)を満足させたいので、式(1)のコンプレメンタリーエネルギーを最小にする2次計画問題を表している。この問題にKuhn-Tucker条件を適用すれば、ホロノミック弾塑性解析の必要十分条件が次式のように得られる。

$$\begin{array}{ll}
 \text{(E):} & \mathbf{C}^T \mathbf{Q} - \alpha \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{----- (2)} \\
 \text{(Y):} & -\Phi = -\mathbf{N}^T \mathbf{Q} + \mathbf{R} \geq \mathbf{0} \quad \text{----- (3)} \\
 \text{(C):} & -\mathbf{k}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{C} \mathbf{u} - \mathbf{N} \lambda = \mathbf{0} \quad \text{----- (4)} \\
 \text{(P):} & (-\Phi_i) \lambda_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, I) \quad \text{----- (5)} \\
 \text{(N):} & \lambda \geq \mathbf{0} \quad \text{----- (6)}
 \end{array}$$

ただし、 $\mathbf{u}$ は節点変位ベクトル、 Φ_i は部材断面*i*の降伏関数、 λ_i は断面*i*の塑性乗数、*i*は断面の番号を

示す記号、 I はその総数である。式(2)および式(3)は前述のとおりであるが、新たに得られた式(4)は弾塑性変形(内変形) $\mathbf{k}^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{N} \lambda$ が構造物の独立な節点変位(外変形) $\mathbf{u}$ と幾何的に結合するという弾塑性変形適合条件式(C)を表し、式(6)は非負条件(N)で、塑性乗数ベクトル λ の要素が正または0であることを示している。また、式(5)は断面 i において、降伏関数 $\Phi_i = 0$ のとき塑性乗数 $\lambda_i \geq 0$ (塑性変形が発生する)、あるいは $\Phi_i < 0$ のとき $\lambda_i = 0$ (塑性変形が発生しない) という塑性流れ条件(P)を意味し、これは Φ_i か λ_i のどちらか一方のみは0でなくてはならないという相補条件⁵⁾を示している。

(2) 非線形降伏条件式の逐次線形化

式(2)~(6)で表されるホロノミック弾塑性解析の必要十分条件を後述するLCPアルゴリズムで解くためには、まず、非線形降伏条件を式(3)に示される線形化降伏条件式のように置換する必要がある。従来は、非線形降伏条件を内接する凸多面体で固定的に近似した線形近似降伏条件⁸⁾を用いてきたが、この方法は、塑性容量を安全側に評価するが過小すぎる場合があり、また、非常に大きな計算容量を必要とする。よって、ここでは、内力状態の変化に応じて逐次、非線形降伏条件を線形化することにより塑性容量を比較的正確に評価し、さらに計算容量の縮小化を図ることを試みた。すなわち、この逐次線形化手法は、連続した凸性を有する非線形降伏条件に適用可能であるが、ここでは、Morrisら⁹⁾により提案された組合せ応力に対する降伏条件についての適用を示した。

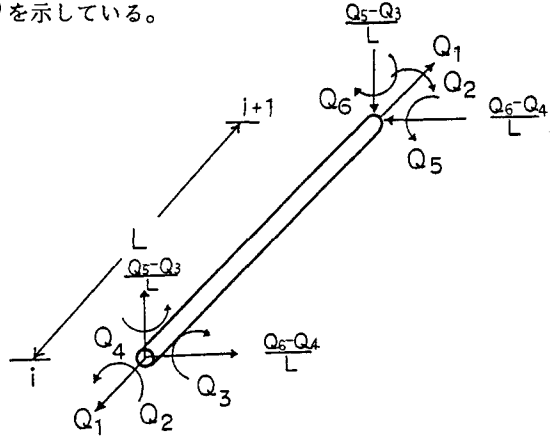


図-1 部材断面力

まず、肩字 j を線形化の繰返し回数を示す記号として未知内力 $\mathbf{Q}^{j+1}$ 、未知塑性乗数 λ^{j+1} 、未知降伏関数 Φ^{j+1} が次のように j 回目の繰返しで得られる既知量と未知変化量(記号 Δ)の和として得られるものとする。

$$\mathbf{Q}^{j+1} = \mathbf{Q}^j + \Delta \mathbf{Q}^{j+1}, \quad \lambda^{j+1} = \lambda^j + \Delta \lambda^{j+1}, \quad \Phi^{j+1} = \Phi^j + \Delta \Phi^{j+1} \quad \text{----- (7)}$$

次に、図-1のように部材内力をとると、ある部材要素の断面 i および $i+1$ の降伏条件式は次式のように表される⁹⁾。

$$\Phi_i = \left(\frac{Q_1}{Q_{P1}}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{Q_{P2}}\right)^2 + \left(\frac{Q_3}{Q_{P3}}\right)^2 + \left(\frac{Q_4}{Q_{P4}}\right)^2 - 1 \leq 0 \quad \text{----- (8a)}$$

$$\Phi_{i+1} = \left(\frac{Q_1}{Q_{P1}}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{Q_{P2}}\right)^2 + \left(\frac{Q_5}{Q_{P5}}\right)^2 + \left(\frac{Q_6}{Q_{P6}}\right)^2 - 1 \leq 0 \quad \text{----- (8b)}$$

ただし、 Q_{Pn} ($n=1, 2, \dots, 6$) は単一の応力を受ける場合の塑性容量であり、図-1における Q_n に対応している。式(8)で表される断面 i および $i+1$ の降伏条件はそれぞれ4次元空間における単位球体を示しており、以下、断面 i のみについて説明する。すなわち、断面 i に関与する内力ベクトル $\mathbf{Q}_i$ とその変化量 $\Delta \mathbf{Q}_i$ および無次元ベクトル(記号 $\mathbf{U}$)は次のように表すことができる。

$$\mathbf{Q}_i = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4], \quad \Delta \mathbf{Q}_i = [\Delta Q_1 \ \Delta Q_2 \ \Delta Q_3 \ \Delta Q_4] \quad \text{----- (9a)}$$

$$\mathbf{U}_i = \left[\frac{Q_1}{Q_{P1}} \ \frac{Q_2}{Q_{P2}} \ \frac{Q_3}{Q_{P3}} \ \frac{Q_4}{Q_{P4}} \right], \quad \Delta \mathbf{U}_i = \left[\frac{\Delta Q_1}{Q_{P1}} \ \frac{\Delta Q_2}{Q_{P2}} \ \frac{\Delta Q_3}{Q_{P3}} \ \frac{\Delta Q_4}{Q_{P4}} \right] \quad \text{----- (9b)}$$

よって、式(8a)の無次元非線形降伏条件を有次元線形近似降伏条件へ置換する方法は以下になる。

まず、図-2に示すように j 回目で得られた無次元既知内力ベクトル $\mathbf{U}_i^j$ に対応する単位外向法線ベクトルは、 $j+1$ 回目の内力ベクトル $\mathbf{U}_i^{j+1}$ に対しても変化しないものと仮定すると、 $j+1$ 回目における無次元近似降伏条件式は次式のように得られる。

$$\Phi^{j+1}_i = \frac{1}{a} \left[\frac{Q_{j1}}{Q_{P1}} \ \frac{Q_{j2}}{Q_{P2}} \ \frac{Q_{j3}}{Q_{P3}} \ \frac{Q_{j4}}{Q_{P4}} \right] \left[\frac{\left\{ \frac{Q_{j1} + \Delta Q_{j+1,1}}{Q_{P1}} \right\}}{\frac{Q_{j1}}{Q_{P1}}} \ \frac{\left\{ \frac{Q_{j2} + \Delta Q_{j+1,2}}{Q_{P2}} \right\}}{\frac{Q_{j2}}{Q_{P2}}} \ \frac{\left\{ \frac{Q_{j3} + \Delta Q_{j+1,3}}{Q_{P3}} \right\}}{\frac{Q_{j3}}{Q_{P3}}} \ \frac{\left\{ \frac{Q_{j4} + \Delta Q_{j+1,4}}{Q_{P4}} \right\}}{\frac{Q_{j4}}{Q_{P4}}} \right] - 1 \leq 0 \quad \text{----- (10)}$$

$$\text{ただし、} a^2 = \left(\frac{Q_{P1}^j}{Q_{P1}^2}\right)^2 + \left(\frac{Q_{P2}^j}{Q_{P2}^2}\right)^2 + \left(\frac{Q_{P3}^j}{Q_{P3}^2}\right)^2 + \left(\frac{Q_{P4}^j}{Q_{P4}^2}\right)^2$$

次に、有次元内力ベクトル $\mathbf{Q}^{j+1}_i$ に対応する有次元線形近似降伏条件式は、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Phi^{j+1}_i &= \frac{1}{a} \left[\frac{Q_{P1}^j}{Q_{P1}^2} \frac{Q_{P2}^j}{Q_{P2}^2} \frac{Q_{P3}^j}{Q_{P3}^2} \frac{Q_{P4}^j}{Q_{P4}^2} \right] \left[\begin{array}{c} Q_{j1}^{j+1} + \Delta Q_{j1}^{j+1} \\ Q_{j2}^{j+1} + \Delta Q_{j2}^{j+1} \\ Q_{j3}^{j+1} + \Delta Q_{j3}^{j+1} \\ Q_{j4}^{j+1} + \Delta Q_{j4}^{j+1} \end{array} \right] - 1 \\ &= (\mathbf{N}^j_i)^T (\mathbf{Q}^j_i + \Delta \mathbf{Q}^{j+1}_i) - R_i \leq 0 \end{aligned} \quad \text{----- (11)}$$

$$\text{ただし、} (\mathbf{N}^j_i)^T = \frac{1}{a} \left[\frac{Q_{P1}^j}{Q_{P1}^2} \frac{Q_{P2}^j}{Q_{P2}^2} \frac{Q_{P3}^j}{Q_{P3}^2} \frac{Q_{P4}^j}{Q_{P4}^2} \right], \quad R_i = 1$$

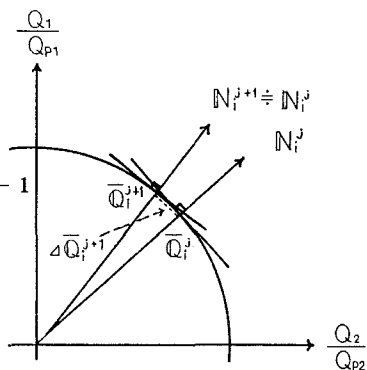


図-2 無次元降伏条件
(2次元の場合)

ここに、 $\mathbf{N}^j_i$ は 1 断面に対して 1 ベクトルで表されるため、構造全体の法線マトリックス $\mathbf{N}^j$ は次式に示すように非常にコンパクトになり、また既知内力 $\mathbf{Q}^j$ の変化に応じて逐次近似するため、より正確に降伏関数値を評価することができる。

$$\mathbf{N}^j = \text{diag}_k \mathbf{N}^j_k, \quad \mathbf{N}^j_k = [\mathbf{N}^j_i \quad \mathbf{N}^j_{i+1}]^T_k \quad \text{----- (12)}$$

ただし、 k は部材番号を示す記号である。

(3) 逐次線形化降伏条件を用いた LCP 基本式

式(12)に示す $\mathbf{N}^j$ を用いたホロノミック弾塑性解析の必要十分条件は、式(2)～(6)における $\mathbf{N}$ を $\mathbf{N}^j$ に、他の変数については、例えば $\mathbf{u}$ を $\mathbf{u}^{j+1}$ のようにそれぞれ置換したうえで、式(7)を代入して以下のように得られる。

$$(E): \quad \mathbf{C}^T (\mathbf{Q}^j + \Delta \mathbf{Q}^{j+1}) - \alpha \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{----- (13)}$$

$$(Y): \quad -\Phi^{j+1} = -(\mathbf{N}^j)^T (\mathbf{Q}^j + \Delta \mathbf{Q}^{j+1}) + R \geq 0 \quad \text{----- (14)}$$

$$(C): \quad -\mathbf{k}^{-1} (\mathbf{Q}^j + \Delta \mathbf{Q}^{j+1}) + \mathbf{C} \mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{N}^j (\boldsymbol{\lambda}^j + \Delta \boldsymbol{\lambda}^{j+1}) = \mathbf{0} \quad \text{----- (15)}$$

$$(P): \quad (-\Phi^{j+1})^T \Delta \boldsymbol{\lambda}^{j+1} + (-\Delta \Phi^{j+1})^T \boldsymbol{\lambda}^j = 0 \quad \text{----- (16)}$$

$$(N): \quad \Delta \boldsymbol{\lambda}^{j+1} \geq \mathbf{0} \quad \text{----- (17)}$$

式(13), (15)を内力変化量 $\Delta \mathbf{Q}^{j+1}$ について解けば、平衡条件および変形適合条件を満足する $\Delta \mathbf{Q}^{j+1}$ は塑性乗数の変化量 $\Delta \boldsymbol{\lambda}^{j+1}$ の関数として次式のように得られる。

$$\Delta \mathbf{Q}^{j+1} = (\mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{k} - \mathbf{k}) \mathbf{N}^j \Delta \boldsymbol{\lambda}^{j+1} \quad \text{----- (18)}$$

ただし、 $\mathbf{K} (= \mathbf{C}^T \mathbf{k} \mathbf{C})$ は構造物の集合剛性マトリックスである。

式(18)を式(14)に代入すると、平衡条件、適合条件を満足した降伏条件が、次式のように得られる。

$$-\Phi^{j+1} = -(\mathbf{N}^j)^T (\mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{k} - \mathbf{k}) \mathbf{N}^j \Delta \boldsymbol{\lambda}^{j+1} - (\mathbf{N}^j)^T \mathbf{Q}^j + R \geq 0 \quad \text{----- (19)}$$

また、式(16)に示す塑性流れ条件の第2項 $(-\Delta \Phi^{j+1})^T \boldsymbol{\lambda}^j$ は未知量であるが、各断面について以下の場合に分けて考えることができる。

i) j 回目の繰返しにおいて弾性領域と判定される場合: $\Phi^{j+1}_i < 0$, $\lambda^{j+1}_i = 0$ より $\Delta \Phi^{j+1}_i$ の値にかかわらず $(-\Delta \Phi^{j+1}_i) \lambda^{j+1}_i = 0$ ----- (20a)

ii) j 回目および $j+1$ 回目においてともに降伏と判定される場合: $\Phi^{j+1}_i = 0$, $\Phi^j_i = 0$ であるから $\Delta \Phi^{j+1}_i = \Phi^{j+1}_i - \Phi^j_i = 0$ より $(-\Delta \Phi^{j+1}_i) \lambda^{j+1}_i = 0$ ----- (20b)

iii) j 回目には降伏、 $j+1$ 回目には弾性領域と判定される場合: $(-\Delta \Phi^{j+1}_i) \lambda^{j+1}_i$ は確定できないので、場合 i), ii) と同様に次の関係を仮定する。 $(-\Delta \Phi^{j+1}_i) \lambda^{j+1}_i = 0$ ----- (20c)

式(19), (20)より、逐次線形化降伏条件を用いたホロノミック弾塑性解析の基本条件は次のようにまとめることができる。

$$\begin{aligned}
\text{未知数} &: \Phi^{j+1}, \Delta \lambda^{j+1} \\
(P) &: (-\Phi^{j+1})^T \Delta \lambda^{j+1} = 0 \quad \text{-----} (21a) \\
(E)+(C)+(Y) &: D^j \Delta \lambda^{j+1} + (-\Phi^{j+1}) = -B^j \quad \text{-----} (21b) \\
(N) &: \Delta \lambda^{j+1} \geq 0 \quad \text{-----} (21c) \\
(N) &: (-\Phi^{j+1}) \geq 0 \quad \text{-----} (21d) \\
\text{ただし、} & B^j = (N^j)^T Q^j - R \quad \text{-----} (22a) \\
& D^j = (N^j)^T (k C K^{-1} C^T k - k) N^j \quad \text{-----} (22b)
\end{aligned}$$

ここに、式(21a)は2つの未知数のうち一方を非負の値として定めれば他方は必然的に0の値をとるという相補条件を意味し、また、式(21c), (21d)はともに未知数の非負条件を示し、式(21b)は未知数の数が式の数のちょうど2倍になっている線形方程式である。よって、式(21)は線形相補問題(LCP)の条件⁵⁾を備えており、次節に述べるLCPの解法を用いて解くことができる。

3. 解 法

(1) LCPの解法

前述のように、線形方程式(式(21b))は未知数の数が式の数よりも多いので、これ自身では不定解となる。しかし、これに非負条件(式(21c)と式(21d))と相補条件(式(21a))とを満足させれば解が唯一存在することになり、これがLCP問題である。LCP問題は、従来のLPを繰返し用いる方法¹⁰⁾により解くこともできるが、ここでは特に、計算の効率化のために相補掃出法(Lemke法)⁵⁾による解法を用いる。相補掃出法を用いれば、LCPの解が有限回の反復演算で得られるという解の保証性が示されている。以下2次元で表示できる例題について解法の概要を述べる。

図-3(a)は先の線形方程式(式(21b))を形成する5本のベクトル D_1, D_2, e_1, e_2 および $-B$ の一例をX-Y座標に展開したものである(ただし、変化量を示す記号 Δ および肩字 j は省略している)。

式(21b)が「不定解となる」とは、

図-3(a)において $-B$ ベクトルが($D_1,$

D_2), (D_1, e_1), (D_1, e_2), (D_2, e_1), (D_2, e_2), (e_1, e_2)という6組の任意のベクトルの1次結合により表されることであり、非負条件および相補条件を考慮しないときは、この6組のベクトルの組の1次結合係数はすべて式(21b)の解とみなすことができる。ここで、非負条件とはそれぞれの結合係数が0または正であることを示し、さらに、相補条件は、例えば D_1 と e_1 のような同じ断面番号をもつ2つのベクトルを組合せとして選ばない、つまり、1次結合係数 λ_1 と $-\Phi_1$ のうち一方は必ず0でなければならないことを意味する。

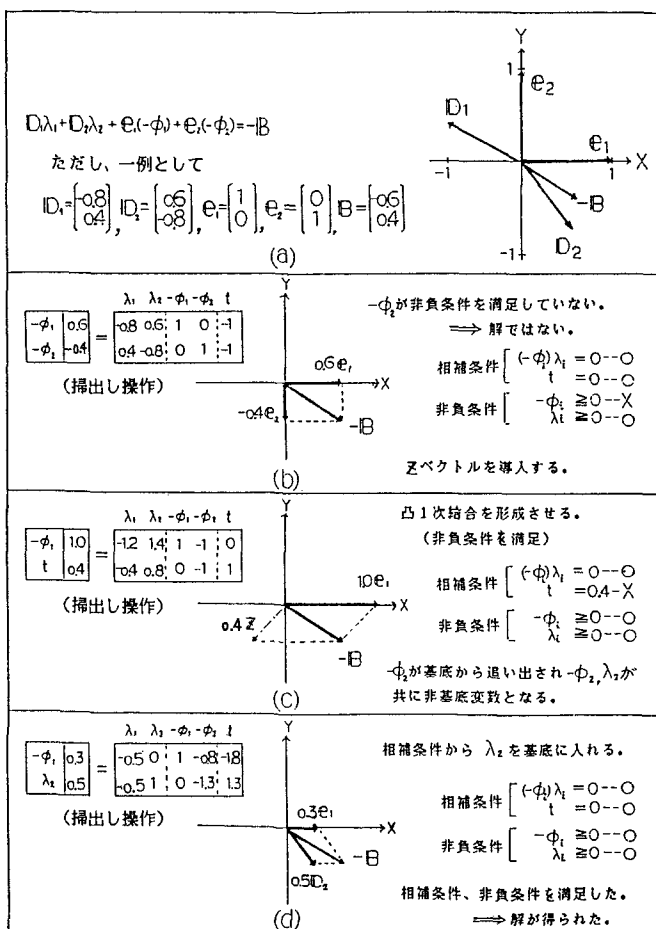


図-3 相補掃出法の概要

さて、このベクトルの組の中から当初の段階で非負条件と相補条件を同時に満足するものを見つけ出すことは困難であるので、相補掃出法では、まず、図-3(b)のように単位ベクトル $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ を用いて $-\mathbf{B}$ ベクトルを表すことを考える。すなわち、各単位ベクトルの1次結合係数 $-\Phi_1$ と $-\Phi_2$ を基底変数とするように掃出し操作を行う。このとき、単位ベクトル $\mathbf{e}_2$ に対応する1次結合係数 ($-\Phi_2$) が -0.4 となり、負の値をとる。すべての1次結合係数を0または正とするために (非負条件を満足させるために)、単位ベクトル $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ の合成ベクトルと全く逆向きの人為ベクトル $\mathbf{Z}$ (ここでは、 $[-1, -1]^T$) を導入して、図-3(c)のように $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{e}_1$ によって $-\mathbf{B}$ ベクトルを表すことを考える。すなわち、人為ベクトル $\mathbf{Z}$ の1次結合係数 (人為変数) t と単位ベクトル $\mathbf{e}_1$ の1次結合係数 $-\Phi_1$ を基底変数として掃出し操作を行う。ここで、 $t=0$ となればLCPの解が得られるが、 $t>0$ のときは、さらに、相補条件にしたがって図-3(d)のように $\mathbf{e}_2$ と相補関係にある $\mathbf{D}_2$ と $\mathbf{e}_1$ によって $-\mathbf{B}$ ベクトルを表すことを考える。すなわち、基底を変更して $-\Phi_2$ と相補関係にある λ_2 を基底に入れて掃出し操作を行う。最終的には、 $t=0$ になったとき、求める解が得られる。

以上の解法手順は、一般化され、多次元問題においても成立するので、相補掃出法によるホロノミック弾塑性解析の解析フローチャートは図-4のように表すことができる。すなわち、

①まず、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ を与える。 $-\mathbf{B}$ の要素がすべて正であれば $\Phi = \mathbf{B}$ ($\mathbf{B}$ は単位ベクトル $\mathbf{e}_i$ ($i=1, 2, \dots, I$) の非負1次結合ベクトルであり、全部材は弾性) として解が得られる。

② $-\mathbf{B}$ の要素に負の数が含まれていれば、いずれかの部材が降伏していることになる。よって、全部材が降伏していることを意味する単位ベクトルの負1次結合ベクトル $\mathbf{Z}$ を人為的に導入し (つまり、構造物の過崩壊状態を想定し)、その1次結合ベクトル (人為変数) t を基底に入れ、以後常に非負条件を満足する状態をつくる。

③非負条件が常に満足される状態で、基底から落ちた Φ_i に対応する λ_i を基底に取り入れる掃出し操作を行う。

④ $t=0$ を満足したとき、相補条件および非負条件が満足され、構造物の弾塑性状態が確定して計算を終了する。

⑤ そうでないとき ($t>0$)、③へ戻る。

本法を用いれば、単純な掃出し計算を行うだけで次々に元の線形方程式の解が得られ、しかも、相補条件から掃出しのためのピボット要素は自動的に選択されるため、わずかな計算量でLCPを解くことができる。

(2) 相補掃出法と逐次線形化降伏条件を用いた

ホロノミック弾塑性解析の解法

相補掃出法を適用すれば、逐次線形化降伏条件を用いたホロノミック弾塑性解析の解法は以下の手順となる。

①まず初期内力 $\mathbf{Q}^0$ として、降伏面を考慮しない弾性内力を与える。

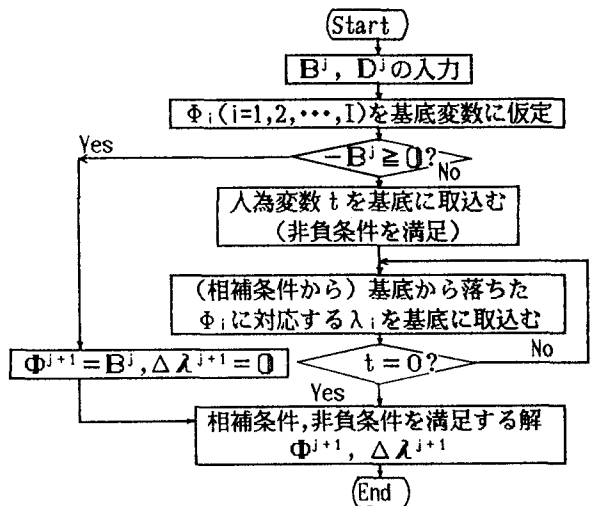


図-4 相補掃出法によるLCPの解法

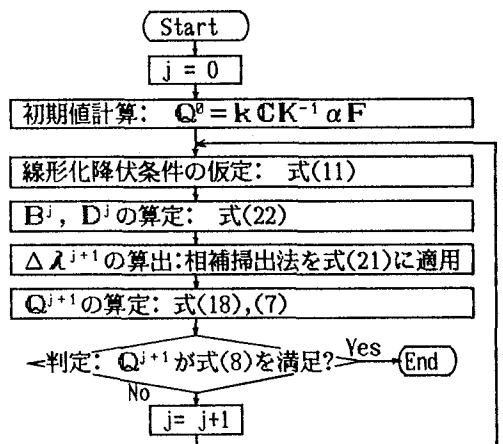


図-5 解析手順

②得られた内力状態を基に、式(11)に示す線形化降伏条件を仮定する。

③式(22)により求めた $\mathbf{B}^j$ 、 $\mathbf{D}^j$ に対するLCP(式(21))を相補掃出法を適用して解き、塑性乗数の未知変化量 $\Delta \lambda^{j+1}$ を求める。

④得られた $\Delta \lambda^{j+1}$ を式(18)に代入して内力の改良量 $\Delta \mathbf{Q}^{j+1}$ を算出し、式(7)を用いて $\mathbf{Q}^{j+1}$ を求める。この $\mathbf{Q}^{j+1}$ が非線形降伏条件(式(8))をすべて満足すれば、計算を終了する。

⑤そうでなければ、②に戻る。

この解析手順をフローチャートに示せば図-5のようになる。

4. 計算例

(1) 計算例1：直角はり

まず、図-6に示す曲げとねじりを受ける直角はりの解析を行い、既往の解¹¹⁾との比較から本法の妥当性を検証する。解析においては、断面特性は一定、作用荷重 $\alpha F = 2.565 M_P/L$ (崩壊荷重)、さらに文献11)に示される降伏曲げモーメント M_P と降伏ねじれモーメント T_P の比、 $T_P/M_P = 2/\sqrt{3}$ から、次のような正規化降伏条件を用い、解析条件を文献11)と整合させた。

$$\Phi_i = \left(\frac{T_i}{T_P} \right)^2 + \left(\frac{M_i}{M_P} \right)^2 - 1 = -\frac{3}{4} \left(\frac{T_i}{M_P} \right)^2 + \left(\frac{M_i}{M_P} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad (23)$$

表-1 計算例1：断面力の比較

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9
本法	0.272	-0.972	0.375	-0.375	0.272	0.946	-0.375	0.946	-0.946
文献11)	0.273	-0.972	0.375	-0.375	0.273	0.946	-0.375	0.946	-0.946

(× M_P)

表-1に得られた $Q_1 \sim Q_9$ の内力量(M_P 単位)の比較を示す。本法と既往の解はよく一致しており、本法の妥当性が認められる。また、本法を用いれば、極限解析では得ることができない弾塑性変形量を容易に求めることができる。図-7は、せん断弾性係数 G と弾性係数 E の比を、 $G/E = 0.381$ としたときの変形状態(鉛直変位は $M_P L^2/EI$ 単位、回転角は $M_P L/EI$ 単位)を示しており、載荷点よりもはり部材の接合点で大きな変形が生じていることがわかる。黒丸は塑性ヒンジが発生した断面を表しており、①、④、⑥断面が降伏して塑性崩壊に至っていることがわかる。なお、節点④に塑性ヒンジが発生しているにもかかわらず $\lambda_4 = 0.0$ となっているのは、節点④が最後に降伏してちょうど崩壊メカニズムが形成されるためであり、節点④には塑性変形が生じないことを示している。

図-8は、降伏断面①、④、⑥の降伏関数値と解析の繰返し回数との関係を示したもので、 Φ_1 、 Φ_4 、 Φ_6 が繰返し回数とともに $\Phi_i = 0$ に漸近していることから、本法の安定した収束性が認められる。

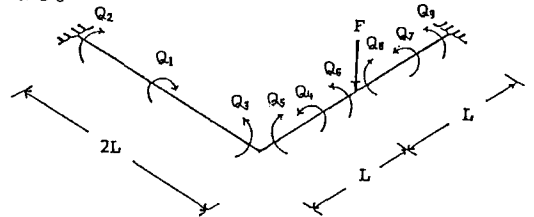


図-6 計算例1：構造・载荷形式

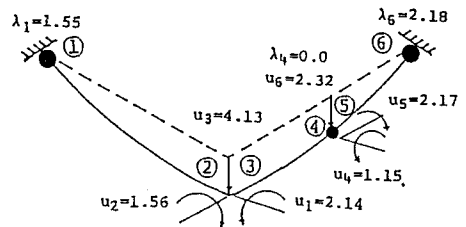


図-7 計算例1：変形図

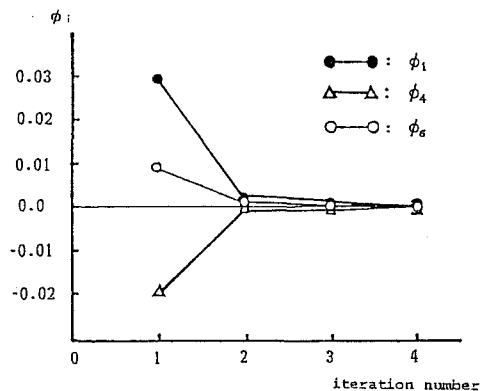


図-8 計算例1：収束状況

(2) 計算例2：大規模で複雑な立体ラーメン

次に、かなり大規模で複雑な立体骨組構造物への応用例として図-9に示すA～Cの断面形状（単位cm）をもつ構造形式⁸⁾（ $L = 475.0\text{cm}$ ）に対して、軸力、ねじり、2軸曲げの断面力を考慮して式(8)に示す降伏条件式を用いた解析を行った。载荷条件は、図-10に示すように鉛直荷重として等価な節点集中荷重に置換した等分布荷重、水平荷重として鉛直荷重の20%の荷重が地震時荷重として加わるものとした。また、基準とする荷重 W には、弾性限界荷重 W_0 が102.3tと別途得られたので、それを越える120.0tを与えた。

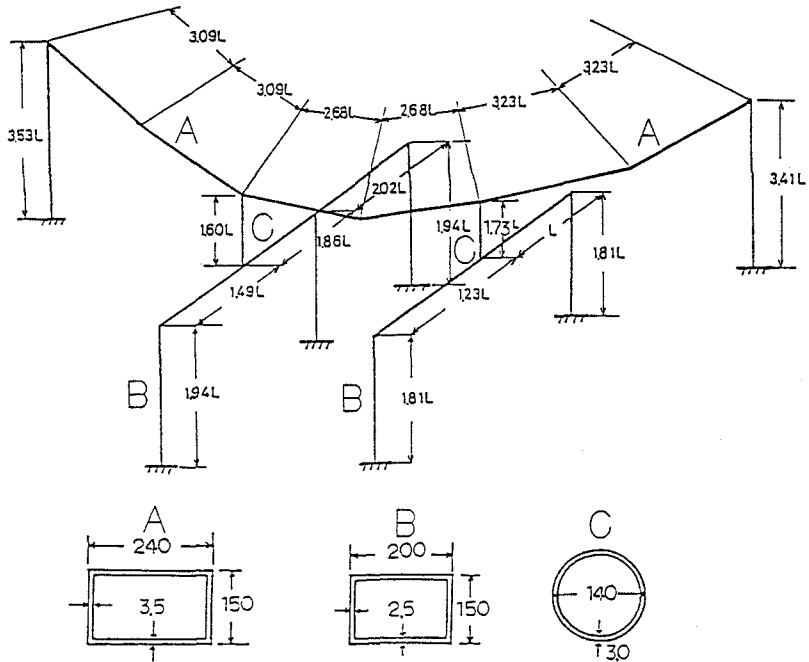


図-9 計算例2：断面形状と構造形式

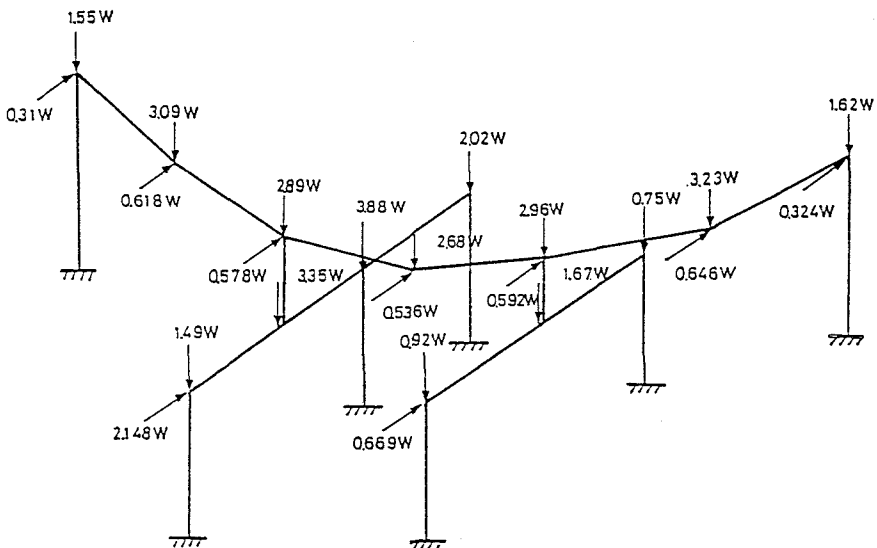


図-10 計算例2：载荷形式

解析結果を図-11の変形図に示す。図-11において、変形量はcm単位、1～14は節点番号、黒丸は塑性ヒンジが発生した断面を示している。門型脚（節点9）に唯一の塑性ヒンジが生じ、その直上に位置する節点3の鉛直変位は3.83cmであることがわかる。

また、降伏条件の逐次線形化を用いた本法が塑性容量を比較的正確に評価でき、しかも効率的であることを確認するため、非線形降伏面を内接する凸16面体で固定的に線形近似⁸⁾する解法（固定近似法）による解析結果との比較を行った。図-12に、固定近似法により得られた節点3の鉛直変位と降伏と判定された断面を黒丸で示す。図-11と比較すると、鉛直変位は大きく算定され、降伏判定断面は1断面から3断面に増加している。これは、本来の非線形降伏条件に対して安全側の近似が改善されることなく固定されたまま用いられているためであり、本法の方が比較的正確に塑性容量を評価できていることがわかる。表-2に本法および固定近似法に要する計算時間、計算容量を示す。本法の計算容量が固定近似法に比べて約1/15であるのは、構造全体の法線マトリックスが、式(12)に示すようにコンパクトに定式化されたためである。計算容量が小さくてすむことは計算時間に対しても効果的な影響を与え、4回のLCP計算を必要とした本法の計算時間は、1回だけLCPを適用した固定近似法に比較して約1/5である。よって、本法が非常に効率的な弾塑性解析法であることも認められる。

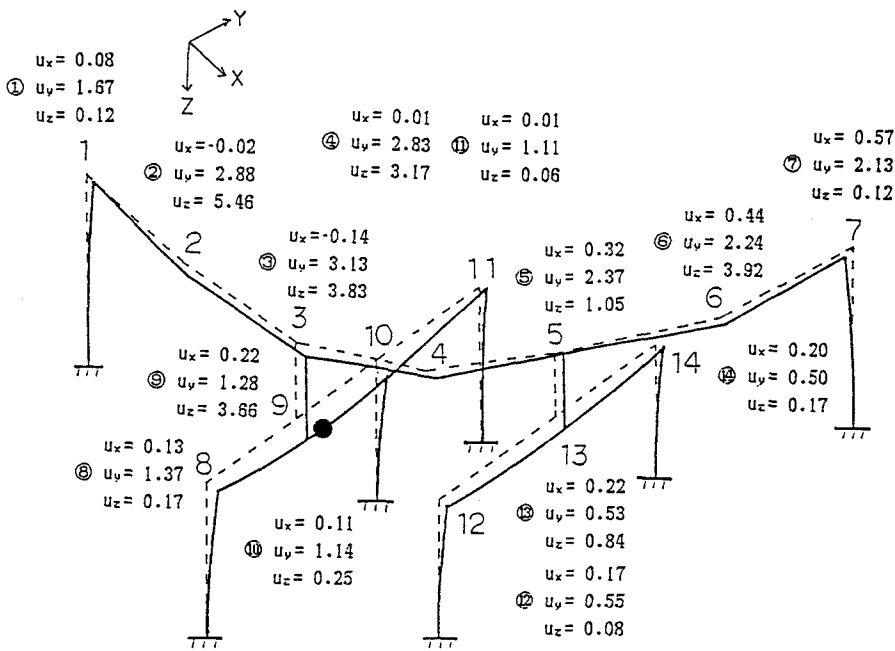


図-11 計算例2：変形図

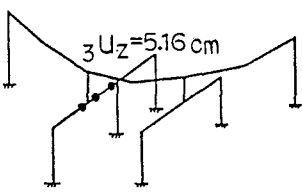


図-12 計算例2：固定近似法による解

表-2 計算例2：計算容量・時間の比較

	計算容量	計算時間
本法	413 KB	11.26 sec
固定近似法	6230 KB	60.06 sec

5. 結 言

本研究は、組合せ応力を受ける立体骨組構造物に対する一つの効率的な弾塑性解析法の確立を目的としたもので、逐次線形化降伏条件を適用したホロノミック弾塑性解析基本式を線形相補問題(LCP)として定式化し、相補掃出法のアルゴリズムによる解法を提示したものである。本研究の成果を列挙すれば以下のようになる。

- (1) 非線形降伏条件に対する逐次線形化手法を適用したホロノミック弾塑性解析基本式を、LCPとして定式化することができた。
- (2) 上記問題に対して、解の保証が得られている相補掃出法を用いて立体骨組構造物の弾塑性解析法を開発した。
- (3) 本法による解は既往の結果とも一致しており、組合せ応力を受ける骨組構造物に対する本法の妥当性が認められた。
- (4) 本法は繰返し計算を必要とするが、その収束性は良好であることを数値計算により確認した。
- (5) 逐次線形化手法を用いれば、固定した線形化降伏条件を用いる場合より塑性容量を比較的正確に評価することが可能になった。
- (6) 本法は、計算時間および計算容量において効率的であり、任意の荷重レベルにおける大規模な立体骨組構造物の弾塑性変形量を算定する有力な手法であると考えられる。

なお、本計算には、防衛大学校電子計算機HITAC M-200Hを使用した。

参 考 文 献

- 1) 日本建築学会：建築耐震設計における保有耐力と変形性能，1981.6.
- 2) 砂防・地すべりセンター鋼製砂防構造物研究会：鋼製砂防構造物に関する研究，pp.3～23，1983.12.
- 3) 三原徹治，北小路雅倫，石川信隆，太田俊昭：感度解析を用いたトラス構造物の最適弾塑性設計法とその応用例，土木学会論文集，第392号/I-9，pp.249～258，1988.4.
- 4) 大久保禎二，藤脇敏夫：最小コンプリメンタリーエネルギー原理による連続ばりの材料非線形解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第12巻，pp.127～132，1988.7.
- 5) 今野浩，山下浩：非線形計画法，日科技連，pp.299～306，1978.3.
- 6) 石川信隆，三原徹治，香月智：最適化手法による骨組構造物の弾塑性解析に関する一考察，土木学会第37回年次学術講演会講演概要集第1部，pp.33～34，1982.10.
- 7) De Donato, O.: Fundamentals of Elastic-Plastic Analysis, Engineering Plasticity by Mathematical Programming, edited by Cohn, M.Z. and Maier, G., Pergamon Press, pp.325～350, 1979.
- 8) 石川信隆，大野友則，岡元北海：立体骨組構造物の最適塑性設計に関する一考察，土木学会論文報告集，第279号，pp.45～59，1978.11.
- 9) Morris, G.A. and Fenves, S.J.: Approximate Yield Surface Equations, Proceedings of ASCE, Vol. 95, No.EM4, 1969.
- 10) 北小路雅倫，三原徹治，石川信隆：最適化手法を用いた組合せ応力を受ける構造物のホロノミック弾塑性解析，土木学会第41回年次学術講演会講演概要集第1部，pp.261～262，1986.11.
- 11) 田中尚：構造物の極限解析，彰国社，pp.87～91，1973.11.

(1988年10月12日受付)