構造工学論文集 Vol.35A (1989年3月) 土木学会

最大荷重設計と最小重量設計の等価性と効率性

EQUIVALENCE AND COMPUTATIONAL EFFICIENCY OF MAXIMUM LOAD AND MINIMUM WEIGHT DESIGNS

長谷川彰夫* 古川浩平** 坂下克之***
By Akio HASEGAWA, Kohei FURUKAWA and Katsuyuki SAKASHITA

Mathematical models of constrained maximization and minimization problems are formulated and the conditions of equivalence for both presentations are given in a general way. This principle is applied for structural optimization and the equivalence between maximum load and minimum weight designs is clarified.
For some simple beam problems, computational efficiency between both optimum design methods is examined and it is concluded that the maximum load design is superior to the minimum weight design in its efficiency with some sacrifice of convergence accuracy.

1. まえがき

数理的最適化の手法が、数理計画法の一環として開発されて以来、構造工学の分野において構造設計を最適化問題として捉え、計算機を用いて最適解を得ることが広く行われるようになった。その際、構造要素の最適設計の手法としては、最小重量設計が主として用いられ現在に至っている。最小重量設計とは、’荷重一定のもとで、重量（コスト）を最小化する’ような設計であり、その場合、重量が目的関数となり、応力や変形に関する設計条件が不等式制約条件となる。しかし、不等式制約条件をもつ最小化問題は、一般に制約条件なしの問題に比べて、複雑な計算が要求され、計算効率が劣ることが予測される。そこで、構造物の最適化問題を制約条件なしの最大最小問題に変換すべく、最近行われ始めているのが、最大荷重設計である。最大荷重設計とは、最小重量設計と全く逆の立場をとり、’重量（コスト）一定のもとで、適用荷重を最大’にするように設計を行う手法である。

ここで問題となるのは、最大荷重設計および最小重量設計によって得られた最適解が一致するか否かである[1)2)]。双方とも最適解であることに変わりがないが、もし、２つの解の間に食い違いが生じた場合、実際の構造設計においてどちらの手法による解を採用するかは問題となる。また、同じ構造物を作るのに設計法によって異なる解を得ること自体、非常に不合理である。さらにこれらの両設計手法の効率性に関しても、その研究[3)]は少なく、未だ十分には明確にされていない。

* 工博 東京大学教授 工学部土木工学科 （〒113 東京都文京区本郷7-3-1）
** 工博 山口大学教授 工学部土木工学科 （〒755 山口県宇部市常盤台2557）
*** 大成建設(株) エンジニアリング本部 （〒160 東京都新宿区西新宿1-25-1）

本論文では、まず両者の解の等価性を理論的に述べた後、不静定ばりを対象として種々の荷重状態における最適化の例から、両者の解の等価性、計算効率の違いを検討する。

2．　最大計画問題と最小計画問題

与えられた実関数ｆ（$\mathbf{X}$）、ｇ（$\mathbf{X}$）に対して、次の一対の問題を考える。

問題①：　ｇ（$\mathbf{X}$）$\leqq$ａ　のもとで、ｆ（$\mathbf{X}$）を最大化

問題②：　ｆ（$\mathbf{X}$）$\geqq$ｂ　のもとで、ｇ（$\mathbf{X}$）を最小化

ここにａ、ｂは定数、$\mathbf{X}$は一般にm次元ベクトルとする。問題①において、ａの有限な定義域をA、ある固定されたａ$\in$Aに対しｆ（$\mathbf{X}$）の最大値を与える解の集合を｛$\mathbf{X}_a$｝、そのｆ（$\mathbf{X}$）の最大値をγ_a、ａが領域Aを動くとき、γ_aのとり得る領域をR_aとする。また問題②において、ｂの有限な定義域をB、ある固定されたｂに対しｇ（$\mathbf{X}$）の最小値を与える解の集合を｛$\mathbf{X}_b$｝、そのｇ（$\mathbf{X}$）の最小値をγ_b、ｂが領域Bを動くとき、γ_bのとり得る領域をR_bとする。ここで、問題①に対して、次の条件(1)〜(3)を設ける。

条件(1)：$\forall$ａ$\in$Aに対して、問題①の解は存在する。

条件(2)：問題①において、$\forall \mathbf{X}_a \in$｛$\mathbf{X}_a$｝に対し、ｇ（$\mathbf{X}_a$）＝ａ

条件(3)：問題②のｂの定義域B＝問題①のｆ（$\mathbf{X}$）の最大値の領域R_a

条件(2)はａとγ_aが１対１に対応することと等価であり、さらにこのときγ_aはａの単調増加関数となる。条件(1)〜(3)が成り立つことによって、次に示す問題①と問題②の等価性定理(0)〜(3)が成立する。

定理(0)：問題②において、ｂ＝γ_aとしたとき、｛$\mathbf{X}_b$｝＝｛$\mathbf{X}_a$｝、γ_b＝ａ

定理(1)：$\forall$ｂ$\in$Bに対して、問題②の解は存在する。

定理(2)：問題②において、$\forall \mathbf{X}_b \in$｛$\mathbf{X}_b$｝に対し、ｆ（$\mathbf{X}_b$）＝ｂ

定理(3)：問題①のａの定義域A＝問題②のｇ（$\mathbf{X}$）の最小値の領域R_b

証明）

定理(0)：空間$\mathbf{X}$の２つの領域｛$\mathbf{X}$｜ｇ（$\mathbf{X}$）$\leqq$ａ｝、｛$\mathbf{X}$｜ｆ（$\mathbf{X}$）$\geqq \gamma_a$｝は、｛$\mathbf{X}_a$｝においてのみ共有点をもつ。なぜなら、他に共通点$\mathbf{X}_a$'があるとすると、ｇ（$\mathbf{X}_a$'）$\leqq$ａ、ｆ（$\mathbf{X}_a$'）$\geqq \gamma_a$となり、｛$\mathbf{X}_a$｝が問題①の解であることに反するからである。このことと、条件(2)により、ｇ（$\mathbf{X}_a$）＝ａであることから、ｂ＝γ_aとした場合の問題②の解は｛$\mathbf{X}_a$｝であり、ｇ（$\mathbf{X}$）の最小値はａである。

定理(1)：条件(1)、(3)より、任意のｂは問題①のあるａに対するｆ（$\mathbf{X}$）の最大値となっているから、ｂ＝　γ_aとおけば、定理(0)により、解｛$\mathbf{X}_a$｝、最小値ａを得る。

定理(2)：定理(0)により、ｂ＝γ_aのとき、ｆ（$\mathbf{X}_b$）＝ｆ（$\mathbf{X}_a$）＝γ_a＝ｂ

定理(3)：定理(0)、(1)により、（ａ，｛$\mathbf{X}_a$｝，γ_a）、（γ_b，｛$\mathbf{X}_b$｝，ｂ）は完全に同じ集合を構成することが分かる。従って、R_b＝Aは明らかである。

3．　最大荷重設計と最小重量設計

単一固定荷重の場合の最大荷重設計と最小重量設計において、解の一致が成り立つために保たれるべき諸条件について考察する。単一固定荷重とは、載荷位置が固定された１つの荷重、また広義には１つのパラメータによって比例変動する複数荷重をさす。

実際の設計における制約条件は、次のように書き表せる[4)]。

$$D_j(P,\mathbf{X}) \leqq C_j(P,\mathbf{X}) \quad j=1,\cdots,n \tag{1}$$

ここに$\mathbf{X}$は求めるべき幾何学的変数、Pは適用荷重、D_jは設計関数と呼ばれ、設計事項ｊに関して応力、変位など要素の挙動を表すもの、C_jはｊに関して与えられる制限値で、規定関数と呼ばれる。いずれも特に

断わらない限り以下正の値とし、議論する。

構造解析関数A_jと状態能力関数P_jを次のように定義する。

$$A_j(P, \mathbf{X}) \equiv D_j(P, \mathbf{X}) / P \tag{2}$$

$$P_j(P, \mathbf{X}) \equiv C_j(P, \mathbf{X}) / A_j(P, \mathbf{X}) \tag{3}$$

線形解析を基本とする設計においては、C_jとA_jはともにPに無関係となり、従って状態能力関数P_jもPによらなくなる。例外的に非線形効果（例えば座屈後の有効幅公式）を考慮するため、Pを変数として含む場合でも、その依存度は小さいため、一般にP_jは$\mathbf{X}$のみの関数とみてよい。式(2)を式(1)に代入すると次式となる。

$$A_j(\mathbf{X}) \cdot P \leqq C_j(\mathbf{X}) \tag{4}$$

式(3)を用いることにより式(1)の制約条件は

$$P_j(\mathbf{X}) \geqq P \qquad j=1, \cdots, n \tag{5}$$

と書くことができる。さらに、

$$P_{min}(\mathbf{X}) = \min P_j(\mathbf{X}) = \min_j \{C_j(\mathbf{X}) / A_j(\mathbf{X})\} \tag{6}$$

とおけば、式(5)は１つの式

$$P_{min}(\mathbf{X}) \geqq P \tag{7}$$

と書き直せる。

一定の適用荷重pのもとで、重量W（$\mathbf{X}$）を最小にするのが最小重量設計（Minimum Weight Design）、一定の重量wのもとで、適用荷重Pを最大にするのが、最大荷重設計（Maximum Load Design）である。最大荷重設計の「適用荷重Pを最大」という記述はそのまま式に直せば、「$P_j(\mathbf{X}) \geqq P$をみたすPを最大化」となるがこれは、「$P_{min}(\mathbf{X})$を最大化」ということに他ならない。

両設計法は、

最大荷重設計：　$W(\mathbf{X}) = w$　のもとで　$P_{min}(\mathbf{X})$　を最大化

最小重量設計：　$P_{min}(\mathbf{X}) \geqq p$　のもとで　$W(\mathbf{X})$　を最小化

と定式化できる。即ちこれは２．において、$f(\mathbf{X}) \rightarrow P_{min}(\mathbf{X})$，$g(\mathbf{X}) = W(\mathbf{X})$，$a \rightarrow w$，$b \rightarrow p$としたものである。

ここで、最大荷重設計の「$W(\mathbf{X}) = w$のもとで」を「$W(\mathbf{X}) \leqq w$のもとで」とすると、最大荷重設計、最小重量設計はそれぞれ問題①、問題②に対応する形となる。

２つの問題の解が一致するには、等価性が成り立てばよい。等価性が成り立つためには、いくつかの条件が必要であった。それらの諸条件を実際の設計法に対応させて言い換えてみる。最大荷重設計の、与えられたwに対する解の集合を$\{\mathbf{X}_w\}$，$P_{min}(\mathbf{X})$の最大値をP_wとする。両者の解が一致するためには、条件(1)～(3)に対応する次の条件(1)'～(3)'が成り立てばよい。

条件(1)'：$w > 0$　である任意のwに対して、最大荷重設計の解は存在する。

条件(2)'：最大荷重設計において$\forall \mathbf{X}_w \in \{\mathbf{X}_w\}$に対して$W(\mathbf{X}_w) = w$

条件(3)'：最小重量設計においてpを考える範囲は、最大荷重設計においてP_wのとり得る範囲と同じである。

それぞれの条件について詳しく検討する。

まず条件(1)'であるが、これは解が存在する場合のみを議論しているのであるから検討の余地はない。

条件(2)'は総重量w以下で最大荷重設計を行う場合、最大適用荷重を与える総重量はwである　というものである。これが成り立つものとすれば、最大荷重設計を「$W(\mathbf{X}) = w$　のもとで」としても、「$W(\mathbf{X}) \leqq w$　のもとで」の場合と同じ解を与える。このことは設計に使用する重量を増やせば、最大適用荷重を必ず増やせることを意味する。しかも条件(1)'(3)'が成り立てば、最小重量設計との解の一致が結論づけられ

る。条件(1)'～(3)' は実際の構造設計で認めてよい条件と考えられるので、最大荷重設計と最小重量設計の解が一致することが保証される。最大荷重設計は最小重量設計の「P_{min}（x）≧p」のような不等式制約条件がなく、しかも「W（$\mathbf{X}$）＝w」より変数を１つ消去できるので、計算効率がよいことが予測される。

最小重量設計では、制約条件をわざわざ式(7)のような形に変形せず、式(1)を直接使うのが普通である。しかし、式(1)と式(7)は同値であるので、式(1)を使って計算しても、今までの議論はそのまま成り立つ。

4. 数値計算例および考察

数種の不静定ばりを対象にして最大荷重設計および最小重量設計による解の一致度および計算の効率性を数値的に検討する。以下、各計算法のアルゴリズムを簡単に述べる。

- 最大荷重設計

総重量wを与える。

幾何学的変数は$\mathbf{X}$＝（$x_1,\cdots,x_m$）のm個であるが、そのうちの１つはW（$\mathbf{X}$）＝wによって、残りのm－１個の変数で表されるので、計算上の変数はm－１個となる。

制約条件：$x_1,\cdots,x_m \geqq 0$

（制約条件の数はm個）

のもとで、P_{min}（$x_1,\cdots,x_{m-1}$）を最大化する。

- 最小重量設計

適用荷重pを与える。

変数は$\mathbf{X}$＝（$x_1,\cdots,x_m$）のm個

制約条件：$x_1,\cdots,x_m \geqq 0$

D_j（P，$\mathbf{X}$）≦C_j（$\mathbf{X}$）　　$j=1,\cdots,n$

（制約条件の数はm＋n個）

のもとで、W（$x_1,\cdots,x_m$）を最小化する。

制約条件として両方に$x_1,\cdots,x_m \geqq 0$が入っているのは、幾何学的変数として部材の断面積をとっているので、最適状態において、断面積のうちのいくつかが、ゼロになる場合を考え、負の側に収束または発散させないようにするものである。

最適化アルゴリズムとして、不等式制約条件つき最大最小化手法の１つであるDavidon-Fletcher-PowellによるＳＵＭＴ法（東大大型計算機センターライブラリープログラム♯389ＣＴ－ＳＵＭＴ）[5]を両計算に用いた。制約条件のないはずの最大荷重設計にＳＵＭＴ法を用いた理由は、前述したように$x_1,\cdots,x_m \geqq 0$の制約が実際上必要であることと、本研究は両設計法の計算の効率性を比較することが目的であるので、最適化手法が異なると、最適化手法そのものの効率性の違いが現れる可能性があり、設計法の違いによる計算効率の比較にならなくなるからである。その意味で、両設計の計算の条件はできる限り等しくする必要があるため、各式、精度、収束判定条件などはすべて同一のものを用いた。

計算に用いた収束判定の定数は次のようなものである。

ε_1：（目的関数の勾配に関する収束性）

ＤＦＰ法において

$$\frac{\| g_i \|}{\| g_0 \|} < \varepsilon_1 \quad (g_i = \nabla F(x_i,\ r)) \quad \text{Fは修正目的関数}$$

の時、ステップ数ｉ回で解が得られたことを示す。

ε_2：（独立変数に関する収束性）

黄金分割法の収束を判定するのに使う定数で、何回か関数を評価したときの区間幅が、もとの区

間幅に対して十分小となったとき、収束したとする。

ε_3：（目的関数の絶対量に関する収束性）

修正目的関数Fと目的関数Oの値がほとんど等しくなったとき、本プログラムにおいて、最適値が得られたとする。

数値の精度はすべて倍精度を用いた。

（1）数値実験1：単一固定荷重の場合

Fig.1に示す不静定ばりについて、断面積A_1～A_5の最適化を行う。計算にあたっては、以下に示す無次元化を行った。

$$A_i^* = A_i / L^2$$
$$P^* = P / \sigma_a L^2$$
$$\sigma^* = \sigma / \sigma_a \tag{8}$$
$$W^* = A_1^*/4 + A_2^*/2 + A_3^*/2 + A_4^*/2 + A_5^*/4$$

ここに、A_iは断面積、Lは部材長、Pは荷重、σは応力度、σ_aは許容応力度、*は無次元化した量を表す。

断面2次モーメントI_i^*、断面係数W_i^*はA_i^*によって次のように決定する[6]。

$$I_i^* = \left(\frac{A_i^*}{0.93} \right)^2 \qquad W_i^* = \left(\frac{A_i^*}{1.03} \right)^{3/2} \tag{9}$$

制約条件としては、曲げモーメントによる応力制約のみを考え、せん断力、変位などは考慮に入れない。

設計事項としての応力照査はFig.2に示す①～⑥点に対して次のとおりとする。

1：点①のA_1側の縁応力　　5：点④の縁応力
2：点②の縁応力　　6：点⑤のA_4側の縁応力
3：点③のA_2側の縁応力　　7：点⑥のA_5側の縁応力
4：点③のA_3側の縁応力

この時、変数として扱う数値A_i^*、P^*などは、通常10^{-3}以下の値となる。SUMT法で変数としてこのような数値を扱った場合、収束が非常に悪くなることが認められたため、各無次元化した値を大きくして計算を行った。その上で、収束判定は最大荷重設計、最小重量設計とも

$$\varepsilon_1 = 10^{-4}, \quad \varepsilon_2 = 10^{-5}, \quad \varepsilon_3 = 10^{-8} \tag{10}$$

とした。

最大荷重設計の結果をTable 1に、最小重量設計の結果をTable 2に示す。応力度とはσ/σ_aの値で、正のモーメントによる応力を正とする。この計算にあたって、初期値を変化させて数種の計算を行ったが、初期値の違いによる最適値の変動がほとんどなかったため、最大荷重設計、最小重量設計とも1通りの解のみを示す。Table 1のw^*は総重量、P^*は最大適用荷重、Table 2のp^*は適用荷重、W^*は最小総重量である。両Tableから分かるように、最大荷重設計で得られた最大適用荷重P^*を最小重量設計の適用荷重p^*とすると両

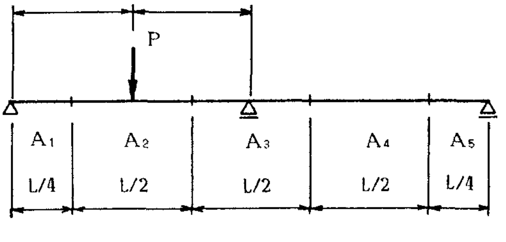

Fig.1　数値実験1で用いた不静定ばり

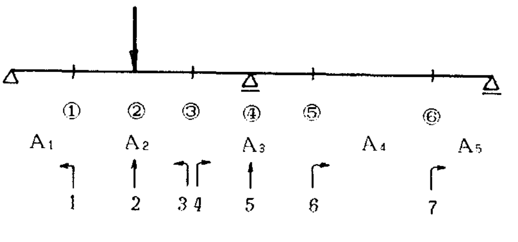

Fig.2　数値実験1の応力照査箇所

者の解は目的関数および幾何変数ともに一致する。計算時間は最小重量設計の方が最大荷重設計より２倍以上長く要していることが分かる。

（２）数値計算例２：付加等分布荷重のある場合

Fig.1と同様なはりにFig.3のように　$q=$一定　の荷重を加えた場合を考える。qの無次元化は　$q^*=q/\sigma_a L$　となる。この場合、Ｐとは別個に、qによる応力、変位などの挙動を表す設計関数D_jが既に存在している。また、規定関数C_jは一般に正負の値をとることも考慮すると、式(1)の制約条件は次式となる。

$$C'_j(\mathbf{X}) \leqq A_j(\mathbf{X}) \cdot P + D_j(\mathbf{X}) \leqq C_j(\mathbf{X}) \tag{11}$$

ここに、C_j（>0）は正の制限値、C'_j（<0）は負の制限値である。式(11)を次のように変形する。

$A_j(\mathbf{X})>0$　のとき

$$(C'_j(\mathbf{X})-D_j(\mathbf{X}))/A_j(\mathbf{X}) \leqq P \leqq (C_j(\mathbf{X})-D_j(\mathbf{X}))/A_j(\mathbf{X}) \tag{12}$$

$A_j(\mathbf{X})<0$　のとき

$$(C_j(\mathbf{X})-D_j(\mathbf{X}))/A_j(\mathbf{X}) \leqq P \leqq (C'_j(\mathbf{X})-D_j(\mathbf{X}))/A_j(\mathbf{X}) \tag{13}$$

Table 1　最大荷重設計による数値実験１の結果（$w^*=2.0$）

		ケース１	
		初期値	最適解
断面積	A_1^*	1.0	1.2954
	A_2^*	1.0	2.0565
	A_3^*	1.0	1.2954
	A_4^*	1.0	0.0003
	A_5^*	1.0	0.0000
制約	照査項目	応力度	
	1	1.000	
	2	1.000	
	3	0.500	
	4	1.000	
	5	0.000	
	6	0.000	
	7	-0.002	
$P^*=11.284$			
計算時間＝4 s			

Table 2　最小重量設計による数値実験１の結果（$p^*=11.28$）

		ケース１	
		初期値	最適解
断面積	A_1^*	3.0	1.2951
	A_2^*	3.0	2.0559
	A_3^*	3.0	1.2951
	A_4^*	3.0	0.0000
	A_5^*	3.0	0.0000
制約	照査項目	応力度	
	1	1.000	
	2	1.000	
	3	0.500	
	4	1.000	
	5	0.000	
	6	-0.005	
	7	0.000	
$W^*=1.999$			
計算時間＝10 s			

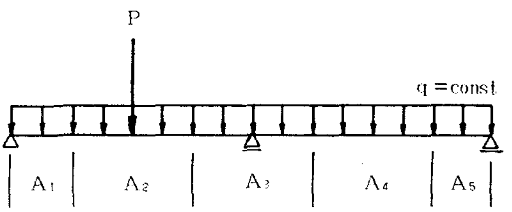

Fig.3　数値実験２で用いた不静定ばり

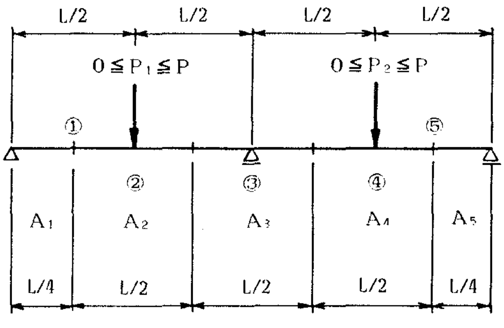

Fig.4　数値実験３で用いた不静定ばり

となる。このとき、式(12)、(13)の左辺が正になると、Pが正の範囲で下限をもつという不合理な結果となり、右辺が負になると、Pの値が負となってしまい、これも不適である。従って、式(12)、(13)の左辺は負、右辺は正でなければならなく、そのためには、

$$C'_j(\mathbf{X}) \leqq D_j(\mathbf{X}) \leqq C_j(\mathbf{X}) \tag{14}$$

であることが、必要十分条件となる。

応力照査はFig.2に示す点に対して、次のように行う。

1～7：数値実験1における照査1～7の式(11)に対応する制約

8：点⑥のA_4側の縁応力の式(14)に対応する制約

9：点⑥のA_5側の縁応力の式(14)に対応する制約

ここで、式(14)に対応する照査を点⑥でしか行っていないのは、activeな制約条件となるのは、これ以外に考えられないからである。

最大荷重設計による結果をTable 3に、最小重量設計による結果をTable 4に示す。1～7の応力度とは、式(11)を

$$C'_j(\mathbf{X}) - D_j(\mathbf{X}) \leqq A_j(\mathbf{X}) \cdot P \leqq C_j(\mathbf{X}) - D_j(\mathbf{X}) \tag{15}$$

と変形した場合の$A_j(\mathbf{X}) \cdot P$の値であり、応力制限値とは $A_j(\mathbf{X}) > 0$のときは、$C_j(\mathbf{X}) - D_j(\mathbf{X})$の値、$A_j(\mathbf{X}) < 0$のときは、$C'_j(\mathbf{X}) - D(\mathbf{X})$ の値を表す。8と9の応力度、応力制限値はそれぞれ、式(14)の$D_j(\mathbf{X})$と$C(\mathbf{X})$の値である。一定荷重は$q^*=1.0$ とした。収束判定は最大荷重設計、最小重量設計とも

$$\varepsilon_1 = 10^{-4}, \quad \varepsilon_2 = 10^{-5}, \quad \varepsilon_3 = 10^{-8} \tag{16}$$

を用いた。

数値実験2ではA_4、A_5は値をもち、応力照査9がactiveであるので、式(14)の制約が意味をもつことがわかる。照査3、4、7の応力制限値の絶対値が、1より大きくなっているのはqによる応力とPによる応力の符号が逆だからである。またいくつかの応力が応力制限値に達していない。その理由は、A_1～A_5の各値はそれぞれ1つのactiveな照査によって決定されているからである。この例の場合では、照査1はA_1、照査2はA_2、照査4はA_3、照査6はA_4、照査9はA_5の断面を決定する制約条件である。従って、それ以外の照査はA_1～A_5のどの断面も決定せずnon-activeとなっている。最大荷重設計と最小重量設計で解はTable 3のケース3を除けば、ほとんど一致している。Table 3,4の計算時間を比較すると、最小重量設計の計算時間は最大荷重設計の3倍程度となっており、最大荷重設計の方が効率性が高いことを示している。

（4）数値実験3：複数荷重の場合

数値実験1と同様なはりに、Fig.4のような複数荷重を載荷したときの最適設計を行う。

応力照査は次のとおりとする。

1：$P_1=P$　$P_2=0$　のときの点①のA_1側の縁応力

2：$P_1=P$　$P_2=P$　　〃

3：$P_1=P$　$P_2=0$　のときの点②の縁応力

4：$P_1=P$　$P_2=P$　　〃

5：$P_1=P$　$P_2=P$　のときの点③の縁応力

6：$P_1=P$　$P_2=P$　のときの点④の縁応力

7：$P_1=0$　$P_2=P$　　〃

8：$P_1=P$　$P_2=0$　のときの点⑤のA_5側の縁応力

9：$P_1=0$　$P_2=P$　　〃

明らかに不要と思われる応力照査、例えば「$P_1=P$，$P_2=0$のときの点③の縁応力」などは省いた。

Table 3　異なった初期値を用いた場合の最大荷重設計による
数値実験２の結果（$w^*=2.0$）

	ケース 1			ケース 2			ケース 3		
断面積		初期値	最適解		初期値	最適解		初期値	最適解
	A_1^*	1.0	1.2228	A_1^*	0.5	1.2230	A_1^*	1.5	1.2269
	A_2^*	1.0	1.9097	A_2^*	0.5	1.9096	A_2^*	1.5	1.9082
	A_3^*	1.0	1.1117	A_3^*	1.5	1.1117	A_3^*	0.5	1.1113
	A_4^*	1.0	0.3094	A_4^*	1.5	0.3094	A_4^*	0.5	0.3092
	A_5^*	1.0	0.1156	A_5^*	0.5	0.1156	A_5^*	1.5	0.1156
制約	照査項目	応力度	応力制限値	照査項目	応力度	応力制限値	照査項目	応力度	応力制限値
	1	0.9709	0.9709	1	0.9707	0.9709	1	0.9649	0.9711
	2	0.9950	0.9950	2	0.9950	0.9950	2	0.9950	0.9950
	3	0.4738	1.0296	3	0.4738	1.0296	3	0.4738	1.0296
	4	1.0666	1.0666	4	1.0666	1.0667	4	1.0660	1.0667
	5	-0.1069	-0.7997	5	-0.1069	-0.7997	5	-0.1068	-0.7996
	6	-0.5460	-0.5460	6	-0.5460	-0.5461	6	-0.5457	-0.5458
	7	-0.7970	-1.9999	7	-0.7971	-2.0000	7	-0.7958	-2.0000
	8	0.2283	1.0000	8	0.2283	1.0000	8	0.2283	1.0000
	9	1.0000	1.0000	9	1.0000	1.0000	9	1.0000	1.0000
	$P^*=10.2875$			$P^*=10.2869$			$P^*=10.2752$		
	計算時間＝5 s			計算時間＝5 s			計算時間＝5 s		

Table 4　異なった初期値を用いた場合の最小重量設計による
数値実験２の結果（$p^*=10.287$）

	ケース 1			ケース 2		
断面積		初期値	最適解		初期値	最適解
	A_1^*	3.0	1.2228	A_1^*	4.0	1.2229
	A_2^*	3.0	1.9097	A_2^*	4.0	1.9098
	A_3^*	3.0	1.1118	A_3^*	4.0	1.1117
	A_4^*	3.0	0.3094	A_4^*	4.0	0.3094
	A_5^*	3.0	0.1156	A_5^*	4.0	0.1156
制約	照査項目	応力度	応力制限値	照査項目	応力度	応力制限値
	1	0.9709	0.9709	1	0.9708	0.9709
	2	0.9950	0.9950	2	0.9949	0.9950
	3	0.4737	1.0296	3	0.4737	1.0296
	4	1.0665	1.0666	4	1.0666	1.0666
	5	-0.1069	-0.7997	5	-0.1069	-0.7997
	6	-0.5460	-0.5460	6	-0.5460	-0.5460
	7	-0.7971	-2.0000	7	-0.7969	-2.0000
	8	0.2283	1.0000	8	0.2284	1.0000
	9	1.0000	1.0000	9	1.0000	1.0000
	$W^*=2.00000$			$W^*=2.00006$		
	計算時間＝15 s			計算時間＝14 s		

Table 5　異なった初期値を用いた場合の最大荷重設計による
数値実験３の結果（$w^*=2.0$）

		ケース 1			ケース 2			ケース 3	
断面積		初期値	最適解		初期値	最適解		初期値	最適解
	A_1^*	1.0	0.7049	A_1^*	1.5	0.7050	A_1^*	1.5	0.8196
	A_2^*	1.0	1.1192	A_2^*	1.5	1.1191	A_2^*	1.0	1.1103
	A_3^*	1.0	1.0571	A_3^*	1.0	1.0567	A_3^*	0.5	1.0273
	A_4^*	1.0	1.1189	A_4^*	1.0	1.1191	A_4^*	0.5	1.1047
	A_5^*	1.0	0.7049	A_5^*	0.5	0.7050	A_5^*	2.5	0.6959
制約	照査項目	応力度		照査項目	応力度		照査項目	応力度	
	1	1.0000		1	1.0000		1	0.7884	
	2	0.7705		2	0.7706		2	0.6100	
	3	0.9997		3	1.0000		3	1.0000	
	4	0.7703		4	0.7706		4	0.7737	
	5	-0.9996		5	-1.0000		5	-1.0000	
	6	0.7706		6	0.7706		6	0.7796	
	7	1.0000		7	1.0000		7	1.0000	
	8	0.7706		8	0.7706		8	0.7796	
	9	1.0000		9	1.0000		9	0.9999	
$P^*=5.5682$				$P^*=5.5694$			$P^*=5.4558$		
計算時間＝2 s				計算時間＝3 s			計算時間＝2 s		

Table 6　異なった初期値を用いた場合の最小重量設計による
数値実験３の結果（$p^*=5.57$）

		ケース 1			ケース 2	
断面積		初期値	最適解		初期値	最適解
	A_1^*	3.0	0.7051	A_1^*	1.0	0.7051
	A_2^*	3.0	1.1192	A_2^*	2.0	1.1192
	A_3^*	3.0	1.0567	A_3^*	3.0	1.0567
	A_4^*	3.0	1.1192	A_4^*	3.0	1.1193
	A_5^*	3.0	0.7051	A_5^*	3.0	0.7051
制約	照査項目	応力度		照査項目	応力度	
	1	1.0000		1	0.9999	
	2	0.7706		2	0.7706	
	3	1.0000		3	1.0000	
	4	0.7707		4	0.7707	
	5	-1.0000		5	-1.0000	
	6	0.7706		6	0.7706	
	7	1.0000		7	1.0000	
	8	0.7706		8	0.7706	
	9	1.0000		9	0.9999	
$W^*=2.00013$				$W^*=2.00015$		
計算時間＝16 s				計算時間＝12 s		

このとき、P_1とP_2に対して、荷重の最大値Pと最小値ゼロの組合せだけを考えれば十分であるかどうかの疑問が生じる。しかし、構造物が弾性応答をする場合を考えると、重ね合わせの原理より応答が最大となるのはP_1またはP_2がPかゼロの時であることは明らかなので、上記の照査で十分である[7)]。

収束判定は最大荷重設計、最小重量設計とも

$$\varepsilon_1=10^{-4},\quad \varepsilon_2=10^{-5},\quad \varepsilon_3=10^{-8} \tag{17}$$

とした。

最大荷重設計による結果をTable 5に、最小重量設計による結果をTable 6に示す。数値実験３では、応力照査２、４、６、８がnon-activeとなっている。このことは、この問題を単一固定荷重と同じ方法で解いたのでは、つまり、$P_1=P$、$P_2=P$の場合のみを考えたのでは、正しい解を与えないことを示している。この場合は、照査１、３、５、７、９がそれぞれA_1 A_2 A_3 A_4 A_5 を決定し、それ以外の照査がnon-activeとなる。これもTable 5のケース３を除けば、だいたい一致している。この場合も最小重量設計の計算時間は最大荷重設計のそれの４～８倍となっており、最大荷重設計の方が計算効率の良いことは明かである。このように本研究で取り上げた全ての例で、同じ手法、同じ収束判定条件を用いた計算時間は、最小重量設計の方が最大荷重設計の２倍以上を要している。

以上の考察は最適解への収束精度が両設計法で同じと考えた場合である。収束精度の良否の判定を数量的に比較することは難しく、設計者の勘で判断するしかないが、その目安は２つある。１つは、目的関数の初期値による変動がいかに小さいか、ということ、もう１つは応力照査がactiveになるべきところで、応力がいかに許容応力に近づいているか、ということである。例えば、Table 5を見るとケース１、２では照査１の応力が許容応力に達しているが、ケース３では達していない。これはうまく収束していないことを表す。実際ケース３の最大適用荷重はケース１、２と比べて小さい値にとどまっている。数値実験１では両者の収束性は似かよっているので比較は困難であるが、数値実験２、３においては、最小重量設計が初期値によるWの値の変動がほとんどなく、応力もavtiveになるべきであると予測されるところでは、許容応力に一致しているのに対し、最大荷重設計ではP^*の値にややバラツキがあり、他のケースでは許容応力に至っているところの応力が、許容応力に至っていないものがある。この１つの例がTable 5のケース３である。

このようなことを考慮すれば一般に次のことが言える。最大荷重設計と最小重量設計をＳＵＭＴ法で計算条件（プログラム中の式、数値の精度、収束判定定数など）を等しくして行った場合、最大荷重設計は最小重量設計よりわずかに収束精度は劣るが、計算時間は半分以下である。すなわち、最大荷重設計は最小重量設計より計算効率はかなり良好であるが、収束精度が少し劣るといえる。最大荷重設計の収束精度が悪いのは、目的関数が複雑なためであり、最小重量設計の計算時間が長いのは、多くの不等式制約条件が存在するためであろう。

そこで次のような試みを行った。最小重量設計の収束判定を甘くし、収束を早めた場合の計算時間はどうなるかの計算を試みた。数値実験２について、$\varepsilon_1=10^{-3}$, $\varepsilon_2=10^{-3}$, $\varepsilon_3=10^{-2}$を用いて計算した結果をTable 7に示す。これをTable 3,4と比較した場合、avtiveな応力照査のところでも、

Table 7　異なった収束条件を用いた場合の最小重量設計による数値実験２の結果（p^*=10.287）

		ケース１	
断面積		初期値	最適解
	A_1^*	3.0	1.2294
	A_2^*	3.0	1.9156
	A_3^*	3.0	1.1142
	A_4^*	3.0	0.3126
	A_5^*	3.0	0.1172
制約	照査項目	応力度	応力制限値
	1	0.9629	0.9710
	2	0.9900	0.9949
	3	0.4711	1.0293
	4	1.0619	1.0660
	5	-0.1080	-0.8009
	6	-0.5450	-0.5558
	7	-0.7909	-1.9832
	8	0.2258	1.0000
	9	0.9832	1.0000
W^*=2.00786			
計算時間=6 s			

応力度はほとんど応力制限値に至っておらず、最適解もTable 3,4の５つの計算値とやや異なっている。この最小重量設計は、Table 3の最大荷重設計よりも、かなり収束が悪い状態で終わっていることは、一見して明かである。それにもかかわらず、計算時間は６秒と、やはり最大荷重設計より長くかかっている。この例でもわかるように、最小重量設計は一般に制約条件式が多いため、最大荷重設計よりも計算時間がかかると考えられる。また、最大荷重設計の収束精度の問題もここに示した程度なら現実問題として許容できると考えられ、この例のような比較的変数の少ない構造最適化の問題では、最大荷重設計の方が効率的であるといえる。このような考え方から、設計変数の少ない部材断面レベルの最適化には効率的な最大荷重設計を使い、変数が多くなる構造全体では最小重量設計とすることにより、効率的で、かつ一般的な骨組構造物の最適化手法も提案されている[8]。

このように、骨組構造物の最適化においては、最大荷重設計と最小重量設計の解は一致し、最大荷重設計の方が最小重量設計より一般に効率的であるといえる。ただし、この効率性に関する結論は、最適化手法としてＳＵＭＴ法を同一計算条件下で適用した場合の結果である。最適化計算の効率は、解くべき最適化問題の性質と採用する最適化手法の組合せにより多様に変化するものであり、一概に効率性に関する結論を出すには問題もあろう。しかし、一般の設計技術者にそれらの最適組合せの選択を委ねることは難しく、その意味で本数値計算例で得た結論は示唆に値するものである。

５．　あとがき

本研究は最大荷重設計と最小重量設計の解の等価性と効率性について検討を試みたものである。本研究ではまず最大荷重設計が最小重量設計と同じ解を与えるために必要な条件を示した。そして、それらの条件は構造設計問題では一般に認められるものばかりであることから、両者の解が現実的には一致することが保証された。

数種の不静定ばりの数値実験により、最大荷重設計と最小重量設計は同じ解を与えること、および最大荷重設計の方が最小重量設計よりも、ＳＵＭＴ法による同一計算条件下での比較という範囲で計算効率がよいことが明らかになった。もちろん本研究で用いた例は構造設計のほんの一部にすぎず、しかも最も計算が単純な部類に属するものである。しかし、現実に行われている複雑な計算も本質的にはこれと変わりがないと考えられ、計算の効率性の違い、解の等価性はそのまま保存されるものと思われる。

参考文献

１）　長谷川彰夫，坂下克之，西野文雄：最大荷重設計と最小重量設計の等価性と効率性，第38回土木学会年次学術講演会講演概要集第1部，pp.427～428，昭和58年9月．

２）　山田善一，古川浩平，大本　修：構造物の最適設計における双対性に関する一考察，土木学会中国四国支部第35回学術講演会一般講演概要集，pp.37～38，昭和58年5月．

３）　橋本克己，杉本博之：可変計量法を用いた最大荷重設計法と最小重量設計法との比較，土木学会北海道支部論文報告集，第40号，pp.31-34，1984年．

４）　長谷川彰夫，小桜義隆，松浦　聖：最大荷重設計による２軸対称プレートガーダーの最適化、土木学会論文報告集，第310号，pp.45～56，1981年6月．

５）　東京大学大型計算機センター：センターニュース，Vol.6，Supplement.1，ライブラリプログラム，pp.34～37，1974年2月．

６）　長谷川彰夫，坂上精希，松浦　聖：最大荷重設計による骨組構造の最適化，土木学会論文報告集，第321号、pp.29～36，1982年5月．

７）　坂下克之：最大荷重設計と最小重量設計の等価性と荷重条件の一般化，東京大学卒業論文，1983年3月．

8） 杉本博之，橋本克己：断面最適化に最大荷重設計法を用いる骨組構造物の最小重量設計について，土木学会北海道支部論文報告集，第41号，pp.125～130，1985年.

（１９８８年１０月１２日受付）