

骨組構造物の最適設計における応力近似モデルについて

ON STRESS APPROXIMATE MODEL FOR OPTIMUM DESIGN OF FRAMED STRUCTURES

杉本博之* 山村和人**

By Hiroyuki Sugimoto and Kazuto Yamamura

Several approximation methods for dealing with stress constraints in the optimum design of framed structures are studied. Previous method is to approximate the actual stress constraints with respect to the reciprocal variables. And recently another method to approximate the finite element nodal force with respect to direct variables is proposed as new approximation method. In this paper, the approximate formulas by (1) stress approximation, (2) force approximation and (3) displacement approximation are deduced analytically with respect to direct variables, reciprocal variables and other variables related to sectional sizes and compared each other. Several numerical examples are done also and some conclusions to be helpful to create the better approximate model are gained.

1. まえがき

構造物の最適設計において、数理最適設計法と有限要素法とを直接結びつけることは、構造解析の回数が多くなるなどの理由により合理的でなく、構造物の規模が大きくなると適用が困難になることもある。そこで、最適化の過程において、毎回構造解析を行なうのではなく、厳密な構造解析は、構造物の応答を少なくとも現在の設計の近傍で再現する近似モデルの作成にのみ用い、最適化の対象はその近似モデルとするという考え方が、SchmitとMiuraにより提案された¹⁾。これにより、最適設計法の応用の範囲は格段に広がった²⁾。また、この近似の概念はFleuryにより双対法に应用された³⁾が、双対法は特定の近似モデルを効率良く解く方法とも考えることができる。このように近似の概念は、現在、構造最適設計における重要なテーマの一つとなっている。

近似モデルは、構造物の応答を精度良く再現できることと、その計算が簡単であることが要求される。構造物の感度解析において2階の微係数を得ることは困難であるので、近似モデルは1階の微係数を用いる線形式を基本に作成されるのが一般である。そのため計算は簡単であるが精度の点で限界がある。トラス構造物の最適設計における応力の制約条件の近似式は、制約条件、つまり応力をそのまま近似する方法がとられていた。そのとき、変数は部材断面積(順変数)とするよりも部材断面積の逆数(逆変数)とした方が近似モデルの精度が良いといわれている。ところが最近、トラス構造物であれば、応力ではなく軸力を順変数に関して近似し、それを用いて応力を計算する方が効率が良いという報告があり^{4) 5)}、新しい近似モデルとし

* 工博 室蘭工業大学助教授 工学部土木工学科 (〒050 室蘭市水元町27-1)

** 工修 新日本製鐵(株) 設備技術本部 (〒105 北九州市八幡東区枝光1-1-1)

て注目されている。

これらの近似モデルは、それぞれ構造最適設計に用いられその効率を向上させてはいるが、その内容、精度に対する十分な理解なしに用いられているきらいがある。そこで本論文では、骨組構造物の最適設計における応力の近似モデルについて、応力自身の近似による近似式、部材内力の近似による近似式、および節点変位の近似による近似式を、順変数と逆変数（トラス構造物の場合）、あるいは順変数、逆変数、断面2次モーメント、断面係数、およびそれらの逆数（一般の骨組構造物の場合）に関して理論的に誘導し結果を比較した。また、数種類の構造物の計算例において、近似の程度を示す指標を計算し、どの近似式が良いかについても考察を加えた。

2. 最適設計における近似の概念の応用

構造物の設計における近似モデルの利用の概念を説明すると以下ようになる。

まず、原問題は一般に次のように定式化される。

$$\text{目的関数} : O(X) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{制約条件} : \text{応力に関する条件} ; g_i^s(X) = \sigma_i - \sigma_a \leq 0 \quad (i=1 \sim n) \quad (2)$$

$$\text{変位に関する条件} ; g_k^d(X) = \delta_k - \delta_a \leq 0 \quad (k=1 \sim m) \quad (3)$$

$$\text{上下限に関する条件} ; x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i=1 \sim n) \quad (4)$$

$$\text{設計変数} : X = \{x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n\}$$

ここで、 σ_i は i 部材の応力、 σ_a は許容応力度、 δ_k は k 番目の節点変位、 δ_a は許容変位量、 x_i^L 、 x_i^U は設計変数の上下限值である。

この原問題において、式(2)、(3)の g^s 、 g^d の値は構造解析より得られる。この場合の最適化の構成を図-1に示した。図のように、近似モデルを用いない場合は、『最適化』から目的関数と制約条件の値を要求される度に厳密な構造解析を行なう必要がある。

一方、近似モデルを利用する場合は、厳密な構造解析は近似モデルを作成するときのみ用いられ、『最適化』の過程で要求される目的関数と制約条件の値は、近似モデルの計算より得られる。その結果、近似モデルを用いる場合の最適化問題は、次のように定式化されることになる。

$$\text{目的関数} : O(\xi) \rightarrow \min \quad (5)$$

$$\text{制約条件} : \text{応力に関する条件} ; \bar{g}_i^s(\xi) = \bar{\sigma}_i(\xi) - \sigma_a \leq 0 \quad (i=1 \sim n) \quad (6)$$

$$\text{変位に関する条件} ; \bar{g}_k^d(\xi) = \bar{\delta}_k(\xi) - \delta_a \leq 0 \quad (k=1 \sim m) \quad (7)$$

$$\text{上下限に関する条件} ; \xi_i^L \leq \xi_i \leq \xi_i^U \quad (i=1 \sim n) \quad (8)$$

$$\text{設計変数} : \xi = \{\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots \ \xi_n\}$$

ここで、 $\bar{g}^s$ 、 $\bar{g}^d$ は、式(2)、(3)の近似式であり、 $\bar{\sigma}$ 、 $\bar{\delta}$ はそれぞれ応力および変位の ξ に関する近似式である。 ξ は部材断面積と何らかの形で関係づけられる中間変数であり、応力と変位はそれぞれ異なる中間変数に関して近似することができる。近似モデルを用いる場合の最適化の構成を図-2に示した。構造解析は、近似モデルを作るためだけに用いられ、最適化は近似モデルを対象としてなされる。近似モデル

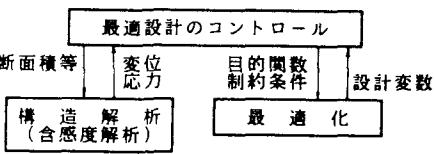


図-1 近似モデルを用いない最適化の構成

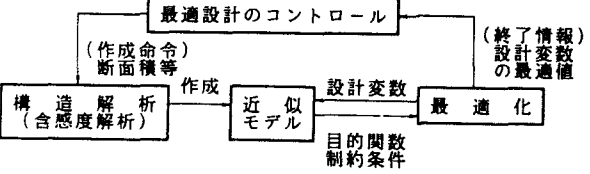


図-2 近似モデルを用いる最適化の構成

ルは、線形式を基本としているので、その最適解を得ることは容易である。この場合、近似モデルの精度が良くない場合は、頻繁に近似モデルを作成する必要がある、効率はそれほど向上しない。一方、精度が良いと、数回の作成で最適解を得ることが可能である。結局、近似モデルの精度が効率の向上に大きく影響することになる。

3. 骨組構造物の解析の定式化

本論文の応力近似モデルは、マトリックス変位法を基本としているので、まずそれらを簡単に説明する。変位法により節点変位 $\mathbf{U}$ が求まったとすると、 i 部材の内力および応力は次式で計算される。

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{s}_i \mathbf{d}_i \mathbf{u}_i \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{c}_i \mathbf{f}_i \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{f}_i$ は部材内力のベクトル（図-3 参照）、 $\boldsymbol{\sigma}_i$ は部材応力のベクトル、 $\mathbf{s}_i$ は部材の断面寸法のみに関するマトリックス、 $\mathbf{d}_i$ は部材両端の節点座標のみに関するマトリックス、 $\mathbf{u}_i$ は部材両端の節点変位に関するベクトル（図-4 参照）、 $\mathbf{c}_i$ は応力を計算するためのマトリックスで、それぞれ次式で与えられる。

$$\mathbf{f}_i = \{F_i \quad M_i^l \quad M_i^r\}^T \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \{\sigma_i \quad \sigma_{M_i^l} \quad \sigma_{M_i^r}\}^T \quad (12)$$

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & 4I_i & -2I_i \\ 0 & -2I_i & 4I_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

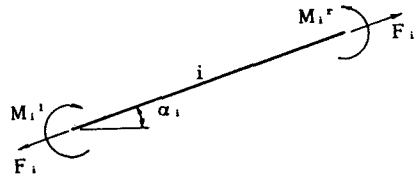


図-3 i 部材の内力の定義

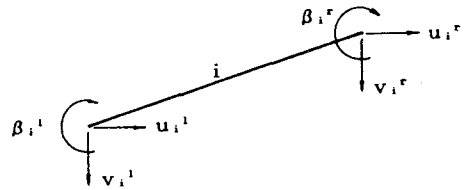


図-4 i 部材の変位の定義

$$\mathbf{d}_i = \frac{E}{\ell_i} \begin{bmatrix} -\cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ \sin \alpha_i / \ell_i & \cos \alpha_i / \ell_i & 1 & -\sin \alpha_i / \ell_i & -\cos \alpha_i / \ell_i & 0 \\ -\sin \alpha_i / \ell_i & -\cos \alpha_i / \ell_i & 0 & \sin \alpha_i / \ell_i & \cos \alpha_i / \ell_i & -1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_i = \{u_i^l \quad v_i^l \quad \beta_i^l \quad u_i^r \quad v_i^r \quad \beta_i^r\}^T \quad (15)$$

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} 1/A_i & 0 & 0 \\ 0 & 1/Z_i & 0 \\ 0 & 0 & 1/Z_i \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここで、 F は部材軸力、 M は部材の両端の曲げモーメント、 σ は部材軸力による垂直応力、 σ_M は曲げモーメントによる垂直応力、 A は部材の断面積、 I は部材の断面2次モーメント、 Z は部材の断面係数、 E は弾性係数、 ℓ は部材長、 α は部材の傾き角、 u は節点の水平変位、 v は節点の垂直変位、 β は節点の回転角を表す。また、下付の i は i 部材、上付の l, r は、それぞれ部材の左節点、右節点を意味する。

4. 3種類の応力近似モデル

本論文は、式(6)の応力の近似式を検討するものである。応力の近似式は、応力自身を近似する近似式と、内力あるいは変位のみを近似し、式(9)あるいは式(10)から応力を計算する近似式が考えられる。変数 ξ_j に関するそれぞれの近似式は次式で与えられる。

応力の近似による応力近似式：

$$\sigma_i \approx \sigma_i^0 + \frac{\partial \sigma_i^0}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^0) \quad (17)$$

内力の近似による応力近似式：

$$\sigma_i \doteq c_i \left\{ f_i^0 + \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^0) \right\} \quad (18)$$

$i \neq j$ の場合は $c_i = c_i^0$ であるので、上式は次のようになる。

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} c_i (c_i^0)^{-1} \left\{ \sigma_i^0 + c_i^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_i} (\xi_i - \xi_i^0) \right\} & (i = j) \\ \sigma_i^0 + c_i^0 \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^0) & (i \neq j) \end{cases} \quad (19a)$$

$$(19b)$$

変位の近似による応力近似式：

$$\sigma_i \doteq c_i s_i d_i \left\{ u_i^0 + \frac{\partial u_i^0}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^0) \right\} \quad (20)$$

$i \neq j$ の場合は $c_i s_i = c_i^0 s_i^0$ であるので、上式は次のようになる。

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} c_i s_i (c_i^0 s_i^0)^{-1} \left\{ \sigma_i^0 + c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \xi_i} (\xi_i - \xi_i^0) \right\} & (i = j) \\ \sigma_i^0 + c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^0) & (i \neq j) \end{cases} \quad (21a)$$

$$(21b)$$

ここで、例えば f_i^0 は、 ξ^0 に対応する f_i の値を意味する。

上式に含まれる応力、内力および変位の感度解析は次節で説明され、各変数に対する式 (17) ～ (21) の詳細およびそれらの比較は 6. で説明される。

5. 感度解析

式 (17) ～ (21) に含まれる変位、内力および応力の感度解析は、 ξ_j が部材断面積 A_j の場合、以下のようになる。

変位の微係数：

全体の剛性マトリックスを K 、変位ベクトルを U とすると、変位の微係数は次式より計算される。

$$\frac{\partial U}{\partial A_j} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_j} U \quad (22)$$

内力の微係数：

内力は式 (9) で与えられ、断面寸法に関するものは s_i および u_i であるから、内力の微係数は次式となる。

$$\frac{\partial f_i}{\partial A_j} = \frac{\partial s_i}{\partial A_j} d_i u_i + s_i d_i \frac{\partial u_i}{\partial A_j} \quad (23)$$

ここで、 $i \neq j$ の場合は、右辺第 1 項の $\partial s_i / \partial A_j = 0$ となるので、式 (23) は次のようになる。

$$\frac{\partial f_i}{\partial A_j} = \begin{cases} \frac{\partial s_i}{\partial A_i} d_i u_i + s_i d_i \frac{\partial u_i}{\partial A_i} & (i = j) \\ s_i d_i \frac{\partial u_i}{\partial A_j} & (i \neq j) \end{cases} \quad (24a)$$

$$(24b)$$

応力の微係数：

応力は式 (10) で表わされるので、 A_j に関する微係数は次式となる。

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} = \frac{\partial c_i}{\partial A_j} f_i + c_i \frac{\partial f_i}{\partial A_j} \quad (25)$$

上式に式 (24) を代入し整理すると、応力の微係数は次のようになる。

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} = \begin{cases} \frac{\partial (c_i s_i)}{\partial A_i} d_i u_i + c_i s_i d_i \frac{\partial u_i}{\partial A_i} & (i=j) \\ c_i s_i d_i \frac{\partial u_i}{\partial A_j} & (i \neq j) \end{cases} \quad (26a)$$

以上は、部材断面積 A_j に関する微係数であったが、部材断面寸法に関する任意の変数 ξ_j に関する微係数は、例えば内力の場合、次式より求めることができる。

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f_i}{\partial A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \xi_j} \quad (27)$$

また以上は、一般の骨組構造物の場合であったが、トラス構造物の場合は、

$$\frac{\partial s_i}{\partial A_i} = 1, \quad \frac{\partial (c_i s_i)}{\partial A_i} = 0, \quad d_i u_i = \sigma_i$$

となるので、以下のように簡単に表現できる。

トラス構造物の内力の微係数 :

$$\frac{\partial F_i}{\partial A_j} = \begin{cases} \sigma_i + A_i d_i \frac{\partial u_i}{\partial A_i} & (i=j) \\ A_i d_i \frac{\partial u_i}{\partial A_j} & (i \neq j) \end{cases} \quad (28a)$$

トラス構造物の応力の微係数 :

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} = d_i \frac{\partial u_i}{\partial A_j} \quad (29)$$

ここで、トラス構造物の場合の d_i は次式である。

$$d_i = \frac{E}{\ell_i} [-\cos \alpha_i \quad \sin \alpha_i \quad \cos \alpha_i \quad -\sin \alpha_i] \quad (30)$$

6. 応力近似モデルの定式化

3種類の応力近似モデルの一般式が式 (17)～(21) で、また感度解析の結果が式 (22)～(26) で既に得られたので、ここではそれぞれの応力近似モデルの定式化を試みる。変数としては、順変数、逆変数および部材断面寸法に関するその他の変数（断面係数、断面2次モーメント）を考慮した。

(1) 応力の近似による応力近似式

a) 順変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} \sigma_i^0 + \left\{ \frac{\partial (c_i s_i)}{\partial A_i} d_i u_i^0 + c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} \right\} (A_i - A_i^0) & (i=j) \\ \sigma_i^0 + c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) & (i \neq j) \end{cases} \quad (31a)$$

b) 逆変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} \sigma_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} \left\{ \frac{\partial (c_i s_i)}{\partial A_i} d_i u_i^0 + c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} \right\} (A_i - A_i^0) & (i=j) \\ \sigma_i^0 + \frac{A_j^0}{A_j} c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) & (i \neq j) \end{cases} \quad (32a)$$

$$(i \neq j) \quad (32b)$$

c) その他の変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} \sigma_i^0 + \frac{\partial A_i^0}{\partial \xi_i} \left\{ \frac{\partial (c_i s_i)^0}{\partial A_i} d_i u_i^0 + c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} \right\} (\xi_i - \xi_i^0) & (i=j) \quad (33a) \\ \sigma_i^0 + \frac{\partial A_j^0}{\partial \xi_j} c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (\xi_j - \xi_j^0) & (i \neq j) \quad (33b) \end{cases}$$

(2) 内力の近似による応力近似式

a) 順変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} c_i (c_i^0)^{-1} \left\{ \sigma_i^0 + c_i^0 \left(\frac{\partial s_i^0}{\partial A_i} d_i u_i^0 + s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} \right) (A_i - A_i^0) \right\} & (i=j) \quad (34a) \\ \sigma_i^0 + c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) & (i \neq j) \quad (34b) \end{cases}$$

b) 逆変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} c_i (c_i^0)^{-1} \left\{ \sigma_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} c_i^0 \left(\frac{\partial s_i^0}{\partial A_i} d_i u_i^0 + s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} \right) (A_i - A_i^0) \right\} & (i=j) \quad (35a) \\ \sigma_i^0 + \frac{A_j^0}{A_j} c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) & (i \neq j) \quad (35b) \end{cases}$$

c) その他の変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} c_i (c_i^0)^{-1} \left\{ \sigma_i^0 + \frac{\partial A_i^0}{\partial \xi_i} c_i^0 \left(\frac{\partial s_i^0}{\partial A_i} d_i u_i^0 + s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} \right) (\xi_i - \xi_i^0) \right\} & (i=j) \quad (36a) \\ \sigma_i^0 + \frac{\partial A_j^0}{\partial \xi_j} c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (\xi_j - \xi_j^0) & (i \neq j) \quad (36b) \end{cases}$$

(3) 変位の近似による応力近似式

a) 順変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} c_i s_i (c_i^0 s_i^0)^{-1} \left\{ \sigma_i^0 + c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0) \right\} & (i=j) \quad (37a) \\ \sigma_i^0 + c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) & (i \neq j) \quad (37b) \end{cases}$$

b) 逆変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} c_i s_i (c_i^0 s_i^0)^{-1} \left\{ \sigma_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0) \right\} & (i=j) \quad (38a) \\ \sigma_i^0 + \frac{A_j^0}{A_j} c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) & (i \neq j) \quad (38b) \end{cases}$$

c) その他の変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} c_i s_i (c_i^0 s_i^0)^{-1} \left\{ \sigma_i^0 + \frac{\partial A_i^0}{\partial \xi_i} c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (\xi_i - \xi_i^0) \right\} & (i=j) \quad (39a) \\ \sigma_i^0 + \frac{\partial A_j^0}{\partial \xi_j} c_i^0 s_i^0 d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (\xi_j - \xi_j^0) & (i \neq j) \quad (39b) \end{cases}$$

以上のように一般の骨組構造物では、 $i = j$ の場合は、式 (31a)、式 (34a) および式 (37a) がそれぞれ異なるように、変数が同じであっても近似の方法により近似式の内容は異なるが、 $i \neq j$ の場合は、変数が同じであれば、例えば式 (31b)、(34b) および (37b) が全く同じになっているように、近似の方法に関係なく同じ内容の近似式となっている。どの近似の方法と変数の組合わせが適当かは、数値計算の結果を検討する必要があるが、これは、 $i \neq j$ であれば (2) の内力の近似が (1) の応力の近似に勝る⁵⁾ ことはなく、全く同じであることを理論的に説明している。

7. トラス構造物の応力近似モデルの定式化

前節で誘導された一般の骨組構造物の場合の近似式は、トラス構造物の場合はより簡単に整理される。式(28)～(29)を参考にすると、それらは以下のように定式化される。

(1) 応力の近似による応力近似式

a) 順変数

$$\sigma_i \doteq \sigma_i^0 + d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) \quad (40)$$

b) 逆変数

$$\sigma_i \doteq \sigma_i^0 + \frac{A_j^0}{A_j} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) \quad (41)$$

(2) 内力の近似による応力近似式

a) 順変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} \sigma_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0) & (i=j) \\ \sigma_i^0 + d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) & (i \neq j) \end{cases} \quad (42a)$$

$$(42b)$$

b) 逆変数

$$\sigma_i \doteq \begin{cases} \frac{A_i^0}{A_i} \left\{ \left(2 - \frac{A_i^0}{A_i} \right) \sigma_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0) \right\} & (i=j) \\ \sigma_i^0 + \frac{A_j^0}{A_j} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) & (i \neq j) \end{cases} \quad (43a)$$

$$(43b)$$

(3) 変位の近似による応力近似式

a) 順変数

$$\sigma_i \doteq \sigma_i^0 + d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) \quad (44)$$

b) 逆変数

$$\sigma_i \doteq \sigma_i^0 + \frac{A_j^0}{A_j} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0) \quad (45)$$

以上の応力近似式の結果をまとめたのが表-1である。表より、まず $i \neq j$ の場合は、近似式は変数の種類にのみ依存し、応力の近似による近似式も、内力の近似による近似式も、あるいは変位の近似による近似式も全く同じである。また、応力の近似による近似式と変位の近似による近似式は、変数の種類に関係なく同じであり、さらに $i = j$ の場合は、内力の近似による順変数に関する近似式は、応力あるいは変位の近似による逆変数に関する近似式と同じになっている。以上より、少なくともトラス構造物においては、内力の近似による順変数に関する近似式が、応力の近似による逆変数に関する近似式より優れている⁵⁾ことはありえず、 $i \neq j$ の場合の結果を考慮すると、逆に劣ることもありうることになる。

これらは、さらに次の数値計算例で検討される。

8. 数値計算結果

6. および7. の定式化により、どの近似式とどの近似式が等しいかなどの基本的な事項について考察を加えることができた。しかし、各近似式の近似の程度は、数値計算結果より検討せざるをえない。

表-1 トラス構造物の応力近似モデルの比較

変 数		A	1/A
i = j	応 力	$\sigma_i^0 + d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0)$	$\sigma_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0)$
	内 力	$\sigma_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0)$	$\frac{A_i^0}{A_i} \{ (2 - \frac{A_i^0}{A_i}) \sigma_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0) \}$
	変 位	$\sigma_i^0 + d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0)$	$\sigma_i^0 + \frac{A_i^0}{A_i} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_i} (A_i - A_i^0)$
i ≠ j	応 力	$\sigma_i^0 + d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0)$	$\sigma_i^0 + \frac{A_j^0}{A_j} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0)$
	内 力	$\sigma_i^0 + d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0)$	$\sigma_i^0 + \frac{A_j^0}{A_j} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0)$
	変 位	$\sigma_i^0 + d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0)$	$\sigma_i^0 + \frac{A_j^0}{A_j} d_i \frac{\partial u_i^0}{\partial A_j} (A_j - A_j^0)$

そこで本論文では、以下の例について計算を行ない、結果を整理して考察を加えた。

ここでは、与えられた初期設計において近似モデルを作成し、変数としての部材断面積（以下、単に変数と書く）を1つずつ初期設計のプラスの方向とマイナスの方向に変化させ、それぞれの変数に対応する厳密な応力と各近似式による応力とを求め、それらを比較する方法をとった。しかしそれでは、例えばトラス構造物の場合、Nの変数に対応するMの部材（ $M \geq N$ ）の応力があり、それらの $N \times M$ の数の図を見なければならなく、全体的な傾向を把握することは難しい。そこで、近似の程度を表わす1つの指標として、各構造ごとに、各変数の有効な範囲の下限値と上限値の平均値を計算し、それらを図に表わすことにした。

各変数の有効な範囲の下限値と上限値は、次のように計算される。図-5は、i-部材の応力 σ_i と変数 A_j の関係を示したものである。 A_j^0 は初期設計であり、 σ_i^0 は、初期設計に対するi部材の初期応力である。太い実線が各 A_j に対する厳密な応力である。細線は、近似式の有効な範囲を示し、

$$\sigma_i \pm \alpha |\sigma_i^0| \quad (46)$$

で与えられる。点線が近似式による応力であり、それが式(46)の有効範囲の中にある下限値が $A_{ij}^{\min}$ 、上限値が $A_{ij}^{\max}$ となる。それらを全ての部材（ $i = 1 \sim M$ ）に関して求め、それぞれの最大値および最小値が変数 A_j の上・下限値になる。つまり、

$$A_j^{\min} = \max_i (A_{ij}^{\min}) \quad (47a)$$

$$A_j^{\max} = \max_i (A_{ij}^{\max}) \quad (47b)$$

それらの平均値、

$$A_j^{\min} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_j^{\min} \quad (48a)$$

$$A_j^{\max} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N A_j^{\max} \quad (48b)$$

を各近似式に対して求め、近似の程度を表わす指標として以降の図に示した。 α は10%、5%および1%をそれぞれ与えた。当然 α の大きいほうが、有効な範囲は広がる。

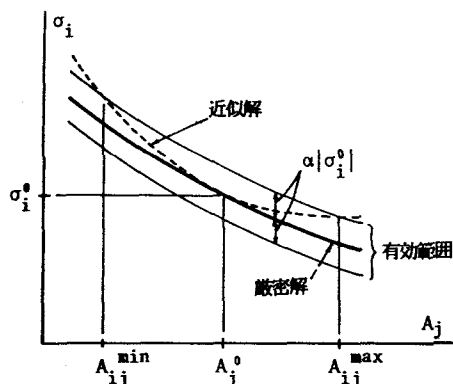


図-5 近似式が有効な部材断面積の範囲

式(48)の指標は、 $A_j^{\min}$ 、あるいは $A_j^{\max}$ のばらつきを考慮していないが、各近似式間の相対的な優劣関係、および変数のおおよその有効範囲を検討するためには十分と考える。

以下に計算例として、5種類のトラス構造物、3種類の骨組構造物を計算の対象とし、(1)応力の近似、(2)内力の近似、(3)変位の近似の3種類の近似法と各変数の組合わせによるそれぞれの近似式の精度を比較、検討した。また(1)～(3)の近似法以外に、内力の近似による順変数と逆変数に関する近似式の平均値、つまり $i=j$ の場合は式(42a)と式(43a)、 $i \neq j$ の場合は式(42b)と式(43b)の平均値を(4)として比較に加えた。

初期値はすべて 100 cm^2 としているが、これにより一般性は失われないと考える。

また、一般の骨組構造物においては、断面2次モーメント、断面係数と断面積の間に次式を仮定した。

$$I = 3 A^2, \quad Z = 1.5 A^{1.5} \quad (49)$$

(1) 3部材トラス

図-6に示す3部材トラスの例である。部材1の応力 σ_1 と部材断面積 A_1 の関係(これは $i=j$ の場合になる)を図-7(順変数)および図-8(逆変数)、部材2の応力 σ_2 と部材断面積 A_1 の関係(これは $i \neq j$ の場合になる)を図-9(順変数)および図-10(逆変数)に示した。

図-7、8では、応力および変位の近似による順変数に関する近似式の精度が悪く、内力の近似、および応力および変位の近似による逆変数に関する近似式の精度が非常に良い。また、図-9、10では、順変数に関する近似式も、逆変数に関する近似式もそれぞれ良くないが、前者は厳密解の下側、後者は上側にある。他の構造でもこのような傾向があったので、上記の(4)を検討の対象に加えた。

この構造系の場合の式(48)の $A^{\min}$ 、 $A^{\max}$ を各 α (10%、5%、1%)ごとに示したのが図-11である。初期設計 100 cm^2 の左右に、幅の広い方が近似の程度が良いことになるが、図より、近似の方法に関係なく、順変数よりも逆変数に関する近似式の方が良く、また(4)の近似度が非常に良いことがわかる。

(2) その他のトラス構造物

その他のトラス構造物として、図-12の10部材トラス、図-14の15部材トラス、図-16の20部材トラスおよび図-18の19部材トラスの解析を行ない、それらの近似の程度を表わす指標をそれぞれ図-13、図-15、図-17、図-19に示した。

これらはやはり、近似の方法に関係なく、順変数よりも逆変数に関する近似式の方がはるかに精度が良いことを示し、中でも、内力の近似による逆変数に関する近似式が優れていることを示している。 α が5%であれば、各部材の断面積を初期設計から、少なくとも 50 cm^2 変化させても良いということになる。

(3) 一般の骨組構造物

一般の骨組構造物として、図-20の水平荷重が作用する3部材ラーメン、図-22のモーメント荷重が作用する3部材ラーメン、および図-24の6部材ラーメンの解析を行ない、それらの近似の程度を表わす指標を図-21、図-23、図-25に示した。なお、これらの構造物では、応力は曲げモーメントによる垂直応力のみ考慮し、軸力による垂直応力は考慮していない。

これらの結果より、トラス構造物の場合と同様に、順変数よりは逆変数、また、断面2次モーメントや断面係数に関しても、それらの逆数に関する近似式の方が精度が良いことが分かる。

また、近似の方法と変数の組合わせでは、逆変数に関する近似式は、どの近似の方法でも良く、次に断面係数の逆数に関する近似式が比較的良いことがわかる。また、(4)の近似式も良い。

これらの結果は、適当な近似式を用いると、各部材の断面積を初期設計から少なくとも 40 cm^2 ($\alpha =$

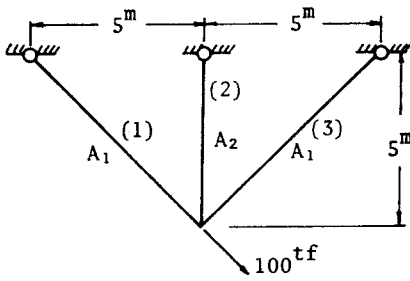


図-6 三部材トラス

		10 %		5 %		1 %	
		0	100 200	0	100 200	0	100 200
(1)	A						
	1/A						
(2)	A						
	1/A						
(3)	A						
	1/A						
(4)	A						
	1/A						

図-11 三部材トラスの各近似式の比較

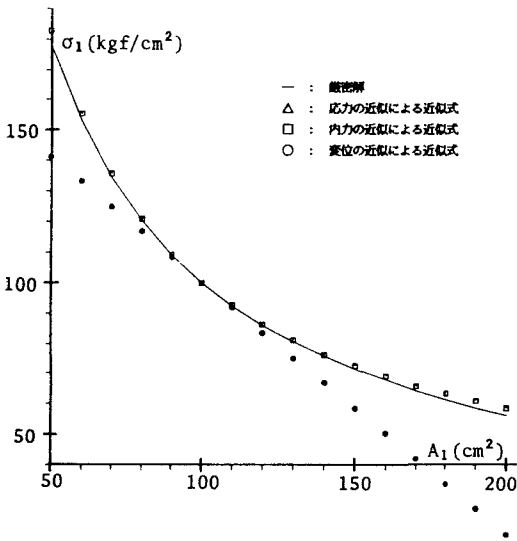


図-7 三部材トラスの σ_1 - A_1 (順変数)

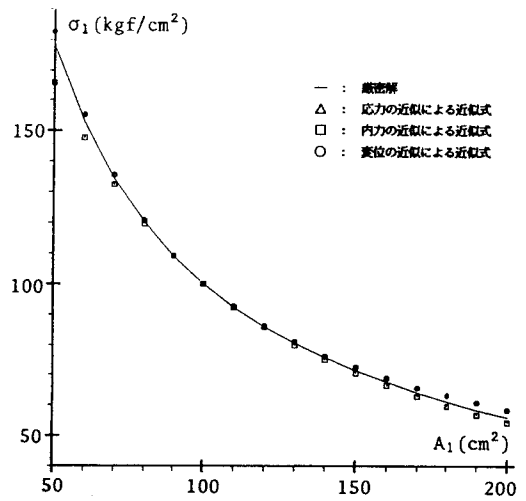


図-8 三部材トラスの σ_1 - A_1 (逆変数)

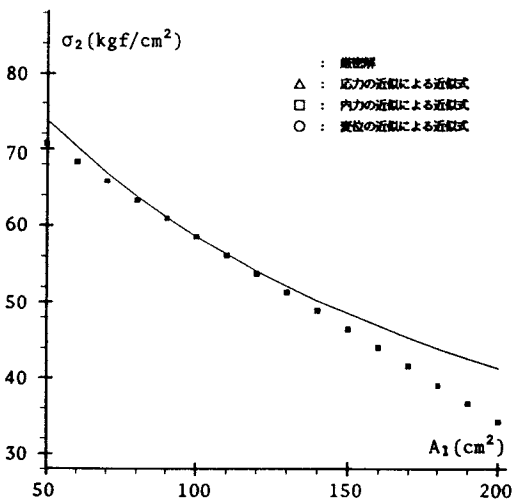


図-9 三部材トラスの σ_2 - A_1 (順変数)

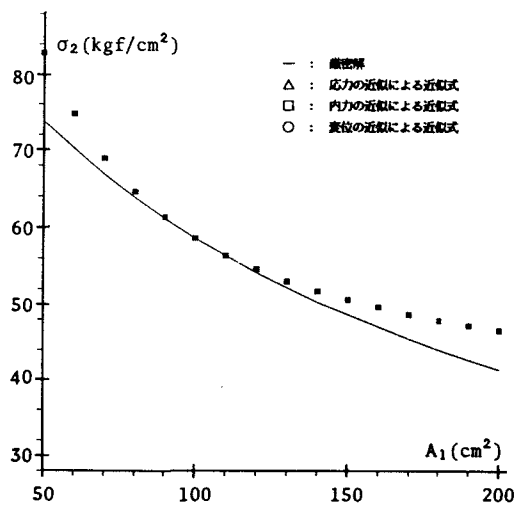


図-10 三部材トラスの σ_2 - A_1 (逆変数)

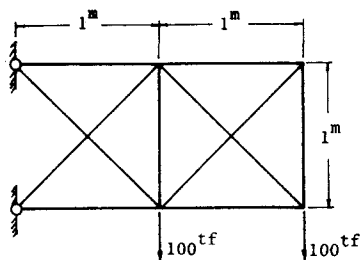


図-12 10部材トラス

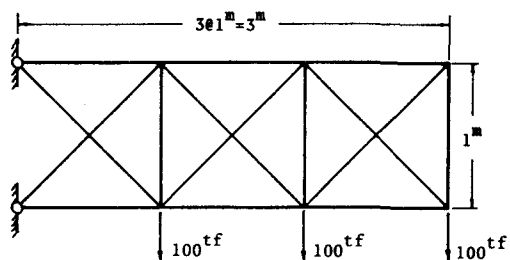


図-14 15部材トラス

		10 %			5 %			1 %		
		0	100	200	0	100	200	0	100	200
(1)	A									
	1/A									
(2)	A									
	1/A									
(3)	A									
	1/A									
(4)	A									

図-13 10部材トラスの各近似式の比較

		10 %			5 %			1 %		
		0	100	200	0	100	200	0	100	200
(1)	A									
	1/A									
(2)	A									
	1/A									
(3)	A									
	1/A									
(4)	A									

図-15 15部材トラスの各近似式の比較

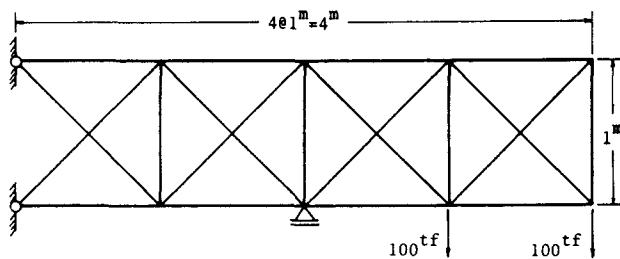


図-16 20部材トラス

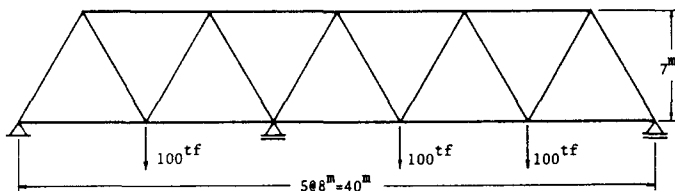


図-18 19部材トラス

		10 %			5 %			1 %		
		0	100	200	0	100	200	0	100	200
(1)	A									
	1/A									
(2)	A									
	1/A									
(3)	A									
	1/A									
(4)	A									

図-17 20部材トラスの各近似式の比較

		10 %			5 %			1 %		
		0	100	200	0	100	200	0	100	200
(1)	A									
	1/A									
(2)	A									
	1/A									
(3)	A									
	1/A									
(4)	A									

図-19 19部材トラスの各近似式の比較

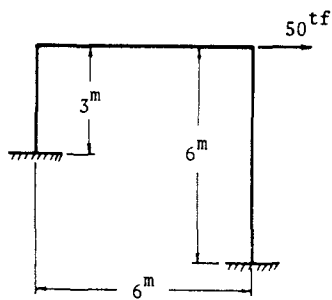


図-20 3部材ラーメン (水平荷重)

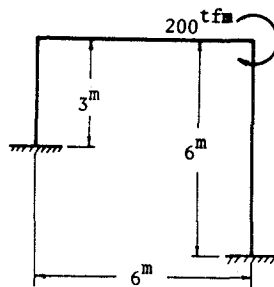


図-22 3部材ラーメン (モーメント荷重)

		10%			5%			1%		
		0	100	200	0	100	200	0	100	200
(1)	A									
	1/A									
	I									
	1/I									
	Z									
	1/Z									
(2)	A									
	1/A									
	I									
	1/I									
	Z									
	1/Z									
(3)	A									
	1/A									
	I									
	1/I									
	Z									
	1/Z									
(4)	A									

図-21 3部材ラーメン (水平荷重) の各近似式の比較

		10%			5%			1%		
		0	100	200	0	100	200	0	100	200
(1)	A									
	1/A									
	I									
	1/I									
	Z									
	1/Z									
(2)	A									
	1/A									
	I									
	1/I									
	Z									
	1/Z									
(3)	A									
	1/A									
	I									
	1/I									
	Z									
	1/Z									
(4)	A									

図-23 3部材ラーメン (モーメント荷重) の各近似式の比較

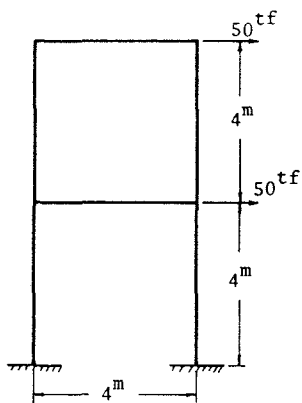


図-24 6部材ラーメン

		10%			5%			1%		
		0	100	200	0	100	200	0	100	200
(1)	A									
	1/A									
	I									
	1/I									
	Z									
	1/Z									
(2)	A									
	1/A									
	I									
	1/I									
	Z									
	1/Z									
(3)	A									
	1/A									
	I									
	1/I									
	Z									
	1/Z									
(4)	A									

図-25 6部材ラーメンの各近似式の比較

5%の場合)変化させても良いことを示している。

これまで考察を加えた近似の程度を表わす指標としての有効な部材断面積の範囲は、式(5)～(8)で定義される近似モデルの最適化において、式(8)の上下限值として用いられる。

9. 結論およびあとがき

骨組構造物の最適設計における、応力に関する制約条件式の近似モデル作成のため、応力の近似式を理論的に求め、それらに対して考察を加えた。得られた事項を箇条書きにすると、以下ようになる。

- (1) 骨組構造物の応力の近似式について、従来用いられている応力の近似による近似式、および内力の近似による近似式以外に、変位の近似による近似式があることを示し、トラス構造物の場合は順変数と逆変数、一般の骨組構造物では、順変数、逆変数およびその他の変数に関する近似式を理論的に誘導した。そのとき、近似される応力と変数が同じ断面に関するものであるかどうかとも考慮した。
- (2) 理論的に導かれた近似式より、一般の骨組構造物の場合、近似される応力と変数が異なる部材に関するとき、同一の種類の変数に関する近似式は、近似の方法に関係なく同じであることが分かった。
- (3) さらに、トラス構造物では、近似される応力と変数が同一の部材に関する場合、内力の近似による順変数に関する近似式は、応力あるいは変位の近似による逆変数に関する近似式と同じであることが証明された。
- (4) (2) および (3) より、内力の近似による順変数に関する近似式が、応力の近似による逆変数に関する近似式に勝ることはないことになり、数値計算結果からもそれが明らかになった。
- (5) 5種類のトラス構造物、3種類のラーメン構造物の数値計算が行なわれ、厳密解に対する各近似式の近似の程度が総合的に検討された。その結果、一般の骨組構造物では、順変数より逆変数、また、断面2次モーメントや断面係数でも、それらの逆数に関する近似式の方が良いことがわかった。
- (6) トラス構造物では、内力の近似による逆変数に関する近似式が優れていた。
- (7) 以上の3種類の近似以外に、内力の近似による順変数と逆変数に関する近似式の平均値も比較検討された。比較的良好な結果を得たが、他の組合わせの可能性もあり、今後さらに検討する予定である。

参考文献

- 1) Schmit, L.A. and Miura, H.: Approximation Concepts for Efficient Structural Synthesis, NASA CR-2552, 1976.
- 2) 三浦宏一: 最適構造設計の方法とその応用について、第5回 MSC/NASTRANユーザー会議論文集、1987.
- 3) Fleury, C.: A Unified Approach to Structural Weight Minimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.20, No.1, pp.17-38, 1979.
- 4) Salajegheh, E. and Vanderplaats, G.N.: An Efficient Approximation Method for Structural Synthesis with Reference to Space Structures, Space Structures 2, pp.165-175, 1987.
- 5) Vanderplaats, G.N. and Salajegheh, E.: A new approximation method for stress constraints in structural synthesis, Proc. 28th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Monterey, pp.314-321, 1987.

(1988年10月12日受付)