構造工学論文集　Vol.35A（1989年3月）　　土木学会

構造最適設計の数理計画法からの脱皮

BRAKING FROM THE MATHEMATICAL PROGRAMMING OF STRUCTURAL OPTIMIZATION

杉本博之*
By Hiroyuki Sugimoto

After the breakdown of the structural optimization at the second half of 1960s, the optimality criterior method followed by the dual method and the approximation concepts were studied. And now the approximation concepts is one of the most advanced subjects in the structural optimization world. This paper presents that the mathematical programming will not play an important part by taking into account the approximation concepts and the structural optimization shall be approached from the structural engineering side. Several optimization techniques are classified and of these, SLP and DUAL are classified as the techniques applying the approximation concepts. It is concluded that, by developing the approximation models unrestricted from the mathematical programming, the structural optimization can break from them.

1．　まえがき

構造最適設計法が、「構造総合（structural synthesis）」という概念の下にSchmit[1]により世に示されてから、すでに３０年近くになるが、現在でも一般に、「難しい」、「わかりずらい」という印象をもたれていることは、残念ながら事実である。その大きな理由としては、最適設計が数理計画法に大きく依存していること、および、実設計問題と数理計画法との結びつきが見えてこないことにあると思われる。数理計画法自身は、たかだか関数の２次の微係数までしか用いず、大学の教養の数学程度の知識があれば十分理解できるものと思われる。確率論に基づく構造信頼性理論、非線形の微分方程式の解法、あるいは弾塑性構造解析の方がより高度な数学的知識を要求しているであろう。数理計画法が、なかなかなじめないのは、大学においてほとんど講義されていないことが理由と考えられる。そのことの是非はともかく、なじみがなければ実設計問題と結びつけることは見えてこず、難しいという印象につながるものと思われる。

構造最適設計の研究者は、筆者も含めて少なからずいるが、我々の中でも、数理計画法は特異な研究対象であった。ある研究では、数理計画法の応用を意識的に避け、また、構造工学と数理計画法の分類があいまいなままに行われる研究もあった。分類があいまいなために、構造最適設計における構造工学的部分（本来我々が最も得意とする分野）への視点が失われていたようにも思われる。

１９６０年代後半、従来の数理最適設計法の限界が明らかになり、そのための１つの対応として１９７０年代にSchmitらにより近似の概念（approximation concepts）[2),3)]が研究された。詳細は、本文中で説明するが、この考え方は、まさに上記の構造最適設計における構造工学的部分に対応する。近似の概念を考慮す

*　工博　室蘭工業大学助教授　工学部土木工学科　（〒050 室蘭市水元町２７－１）

ることにより、従来広い意味で数理計画法と考えられていた手法から、構造工学的部分を分類することができ、構造最適設計における数理計画法のウェイトを少なくすることができる。例えば、現在構造最適設計において有力な手法とされている双対法[4][5]は、原設計問題を特定の分離可能な関数（separable function）に近似し、その近似モデル（approximate model）[6]を数理計画法で解く手法と考えることができる。そこで使われる数理計画法は修正ニュートン法であり、この手法自体平易な古典的なもので、どのテキストにも記述されているものである。ここで近似モデルとは、近似関数から構成される最適化問題と定義される。

本論文は、構造最適設計を構造工学的部分と数理計画法に分類し、数理計画法に比して、構造工学的部分の比重の大きいことを説明する。これにより、構造最適設計法が難しいというイメージを払拭し、構造工学的部分に視点を移すことにより、さらに発展が可能であることを示すものである。

本文は、構造最適設計法の歴史をまず説明する。次に近似の概念の内容、そして、従来の数理計画法を、原設計問題の変換法により分類し、最後に近似モデルの開発について説明する。

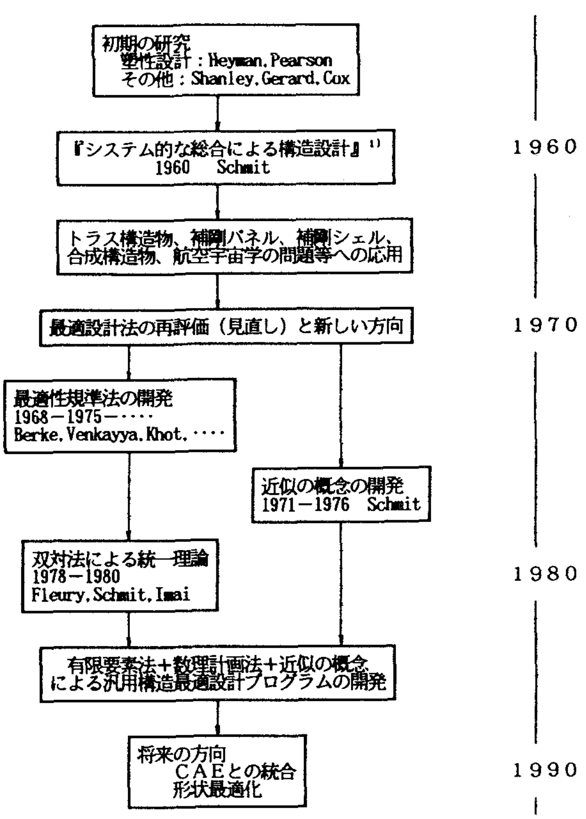
２．　構造最適設計法の歴史

まえがきにも書いたように、構造最適設計の数理計画法からの脱皮のためには、近似の概念の説明が必要である。その前にここでは、構造最適設計法の歴史を簡単に紹介し、近似の概念の必然性を説明する。

構造設計の歴史は、そのまま広い意味での最適設計の歴史をいうことができるが、現代の構造最適設計の流れを図にすると、図－１のようになる。これは、１９８８年３月Santa Barbara で開催されたＥＤＯセミナー「Numerical Optimization Methods and Applications 」で配布された資料より作成したものである。

１９６０年以前にも構造最適設計に関する研究はあったが、全応力設計が必ずしも最適設計ではなく、数理計画法の応用が必要であることを指摘した１９６０年のSchmitの論文[1]が、現在の最適設計の源流といえるであろう。その後、図に示されているような分野への応用が試みられたが、１９６０年代の後半には、実設計への応用の限界が指摘された。それは、それまでの最適設計では構造解析の回数が非常に多くなるためである。具体的に示すと次のようになる。

独立な設計変数の数をＮとし、繰り返し回数をＫとする。Ｋは、問題にもよるが１０～３０であり、１回の繰り返し計算には、１回の（ＳＵＭＴ系の手法では数回の）探索方向の決定と、その方向への１次元探索が含まれる。１次元探索は、最も簡単な２次多項式近似の場合で３回、黄金分割法の場合は１０回程度の構造解析を要する。ここでは、５回として計算してみる。最適設計では、目的関数および制約条件の１次の微係数を求める（感度解析）必要があるが、それを有限差分法（ finite difference ）で行う場合と解析的に



図－１　構造最適設計の歴史

行う場合とがある。それぞれにおいて、必要な構造解析の回数を示す。

i）有限差分法で感度解析を行う場合

各繰り返し計算において、探索方向の決定に（Ｎ＋１）回、１次元探索に５回の構造解析を要するので

$$(N+1)\times K+5\times K = (N+6)\times K \tag{1}$$

がトータルの構造解析の回数である。Ｎが１０で、Ｋが１５であれば２４０回にもなる。

ii）解析的に感度解析を行う場合

各繰り返し計算において、１回の構造解析、探索方向の決定のための１回の感度解析、および１次元探索に５回の構造解析を要するので、

$$K+5\times K = 6K \tag{2}$$

の構造解析とＫ回の感度解析を必要とする。上の例をあてはめると、９０回の構造解析と１５回の感度解析を行うことになる。

実際の設計問題では、設計変数の数が１０よりはるかに大きい場合も当然あるので、上記の計算より、従来の最適設計法がなかなか実用の問題に応用できないのも理解できる。そこで、構造解析の回数をできるだけ少なくして最適設計を得る努力がなされた。その一つの流れが、最適性規準法（optimality criterior method）→双対法（dual method ）という流れになる。これらの解説は、文献７）に詳しい。また一方の流れが、Schmitら[2) 3)]による近似の概念の開発である。後述するように、双対法は近似の概念の１つの応用例と見ることができるが、これらの手法により最適設計を得るための構造解析の回数は飛躍的に減少した。

現在は、有限要素法と数理計画法と近似の概念の３者から構成される汎用的な構造最適設計のためのプログラムが開発中であり、近未来のターゲットとしては、最適設計のためのプレプロセッサーとポストプロセッサを備えた汎用プログラムの開発、および連続体の形状最適化のための汎用プログラムの開発が挙げられている。

１９６０年代後半の構造最適設計の挫折、それを打破するために近似の概念が開発され、今後とも重要なテーマであることを、構造最適設計の歴史のなかで説明した。

３．　近似の概念

広い意味の近似の概念には、設計変数のリンク、制約条件のスクリーニングおよび狭い意味の近似の概念が含まれる。

実際の設計問題に含まれる多くの未知量としての変数の中には、全く同じ値をとる変数、あるいは変数間に何らかの関係があるものがあり、１つの独立変数に複数の変数が従属することがある。変数間の従属な関係を見つけ、独立変数を分類することを設計変数のリンクという。上に説明したように、探索方向の決定の計算量は、設計変数の数に依存するので、設計変数のリンクによる効果は大きい。

例えば、連続体の形状最適化において、応力照査を有限要素法で行う場合、要素の数に比例して照査すべき応力の数が増える。これは、最適設計の定式化では制約条件の数が増えることを意味する。これらの制約条件をすべて、毎回の繰り返し計算のなかで考慮する必要はなく、最後までアクティブにならない制約条件あるいは、少なくとも今後数回の繰り返し計算には必要のない制約条件がかなりある。これらを考慮して、繰り返し計算のあるステージ毎に、所定の条件、例えば、

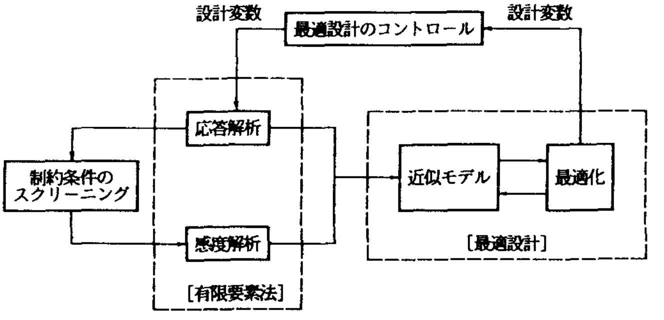
$$g_j \geq -0.5 \tag{3}$$

を満足するような制約条件g_jのみを考慮することを、制約条件のスクリーニングという。明らかに不要な制約条件を無視することは、最適化の効率に良い影響を与えるが、式（３）のような統一した基準を適用するためには、制約条件の何らかの正規化が行われていることが前提である。

以上の設計変数のリンクおよび制約条件のスクリーニングは、従来の構造最適設計の枠組の中でもとらえ

ることができる概念であるが、以下に説明する狭い意味での近似の概念は、従来の構造最適設計の考え方を大きく変えるものである。

従来の構造最適設計は、構造解析を内部にルーチンとして含む原設計問題を、直接最適化の対象としていた。そのために、前節で説明したような膨大な数の回数の構造解析を必要とした。ところが、原設計問題の挙動を、非常に簡単な数式で再現できる近似モデルが作成できれば、あえて原設計問題を対象とせず、その近似モデルを最適化の対象とすれば良いことになる。構造解析は、その作成にのみ用いられることになる。近似の概念を用いる場合の構造最適設計の流れを図－２に示した。



図－２　近似の概念を用いる場合の構造最適設計の流れ

全体の構成は、最適設計のコントロールと、点線で囲われた近似モデルを対象とする最適設計と、構造解析のための有限要素法から構成される。有限要素法は、一般に応答解析のみと考えられがちであるが、有限要素法の汎用プログラムとして標準的なプログラムの１つであるＭＳＣ／ＮＡＳＴＲＡＮには、１９８３年に感度解析の機能が組込まれている。制約条件の感度解析は、スクリーニングされた制約条件のみに対して行う。最適設計のコントロールにおいては、収束の判定、近似モデル作成のためのパラメーターの設定などが行なわれる。

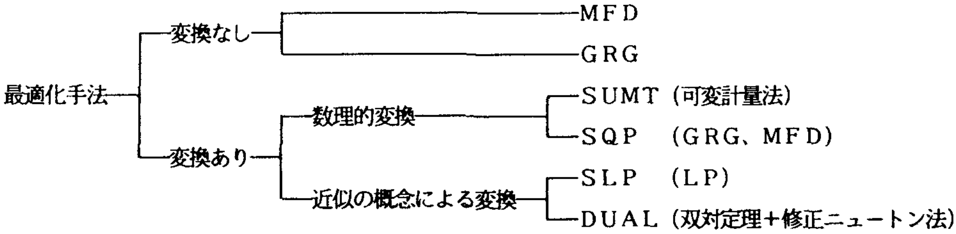
図に示すように、最適化（＝数理計画法）の対象は近似モデルであり、厳密な構造解析（図では有限要素法）は、その作成にのみ用いられる。近似モデルは、図では応答解析と感度解析の結果を利用して作られるようになっているが、１次の微係数を基本に作成される[8]ので、計算は原設計問題に比べてはるかに簡単である。近似モデルは、現在の設計の周囲のある範囲（近似モデルの有効範囲）で、原設計問題の挙動を再現する。有効範囲が広ければ広い程、最適設計の過程の効率は向上する。

図－２の考え方は、比較的新しいシステムであるが、従来、最適化手法、あるいは数理計画法と理解されている手法の中にも、同様な構成になっているものがある。例えば、逐次線形計画法、双対法などである。それらを次に説明する。

４．　最適化手法の分類

構造最適設計に１次的に用いられる最適化手法は、大きく分けて原設計問題を何らかの形に変換してから解く場合と変換せずに直接最適化する手法に分類される。後者に属する手法としては、可能方向法（method of feasible directions、ＭＦＤ）および一般縮約勾配法（generalized reduced gradient method 、ＧＲＧ）がある。また、変換する場合も、純粋に数理的な変換の場合と、構造工学的視点に立った変換（近似の概念）に分類することができる。前者にはペナルティ関数法（sequential unconstrained minimization technique 、ＳＵＭＴ）と逐次２次計画法（sequential quadratic programming、ＳＱＰ）があり、後者に

は、逐次線形計画法（sequential linear programming 、ＳＬＰ）と双対法（dual method 、ＤＵＡＬ）がある。これらの関係を図にしたのが、図－３である。



図－３　最適化手法の分類

変換がある手法の右のかっこ内の手法は、変換された問題を解くために２次的に用いられる数理計画法であり、ＬＰは線形計画法（linear programming）である。図－３に書かれている各手法の内容は、文献７）に詳しい。

ＳＬＰとＤＵＡＬは、一般に数理計画法として理解されるが、ＳＬＰは、構造物の応答をある変数（一般に部材断面積などの設計変数である）に関して線形関数に近似し、線形化された最適化問題をＬＰで解くというプロセスを繰り返す手法であり、用いる数理計画法はＬＰにすぎない。ただ、構造物の応答の線形近似は、近似モデルとしては最も単純なものであり、その有効範囲は狭いので繰り返し回数が多くかかる。

ＤＵＡＬは、構造物の応答を分離可能な関数に近似し、分離可能な関数から構成される最適化問題を双対定理および修正ニュートン法で解くというプロセスを繰り返す手法である。分離可能な関数とは、一般に、

$$f(X) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n) \qquad (4)$$

で定義される関数である。ＳＬＰで線形近似された関数は分離可能な関数であり、線形近似された関数を用いるかぎり、ＤＵＡＬのプロセスはＳＬＰと全く同じになる。また、式（４）の$f_i(x_i)$がx_iに関して複雑な関数であれば、ＤＵＡＬの適用は困難になる。ＤＵＡＬが優れているのは、構造物の応答を逆変数（変数の逆数）に関して線形近似したことによる。その近似モデルは分離可能な単純な関数でとなり、かつ逆変数に関して近似したために、近似モデルの有効範囲が比較的広くなる。そのために少ない繰り返し計算で最適解を得ることができる。

以上より、ＳＬＰとＤＵＡＬの違いは、ＤＵＡＬが離散変数を比較的容易に扱える[9]という特徴を持ってはいるが、基本的には近似モデルの違いであり、両者の効率の差は近似モデルの質の差であることがわかる。しかし、ＤＵＡＬの近似モデルは、単純な形の分離可能な関数であり、数理計画法からの制約を受けたモデルでもある。近似モデルとしては、唯一のものではないし、必ずしも良いモデルとはいえない。ここに、数理計画法に制約を受けない近似モデルの必要性、必然性がある。ＳＬＰの線形関数、ＤＵＡＬの分離可能な関数以外に、より有効な近似モデルの作成は可能であると考えられる[8]。それらのモデルは、線形関数や簡単な分離可能な関数からは構成されないが、表－１に示す種々の数理計画法により最適解を得ることができる。

表－１　近似モデルと数理計画法

近似モデル	適した数理計画法
線形関数から構成されるモデル	ＬＰ
分離可能な関数から構成されるモデル	双対定理＋修正ニュートン法
その他のモデル	GRG、MFD、SQP、SUMT、SLP

５． 近似モデルの開発について

構造最適化手法に用いられる最適化手法の内、ＳＬＰとＤＵＡＬが近似の概念に基づく手法であり、それらが近似モデルと数理計画法の部分から構成されることを説明した。その結果、ＳＬＰとＤＵＡＬの差は、基本的には用いられる数理計画法の差ではなく、近似モデルの差であること、さらに、数理計画法に制約されない近似モデルの開発の必要性を説明した。ＬＰあるいは双対定理は、特定の近似モデルにしか対応しないからである。

有効範囲の広い近似モデルが開発されれば、それらは表－１に示すＧＲＧ、ＭＦＤなどの数理計画法により容易に最適化することができ、効率的な最適化システムを作ることができる。近似モデルの最適化においても、２．で説明したのと同様に多くの回数の解析を必要とするが、近似モデルを用いない場合と根本的に違うのは、１回の解析に要する計算量が全く違う点にある。一方が大規模な連立一次方程式の解法を含む厳密な構造解析であるのに対し、他方は、何らかの変数に関する線形式を基本とする代数式の計算である。そのために、表－１のその他のモデルの数理計画法の中には、従来の構造最適設計にはとても使用できないＳＵＭＴも含めることができる。内力を変数に関して線形近似する近似モデルを提案しているVanderplaatsの論文[10] の価値はこの点にあると思われる。

近似の概念を広く応用することにより、必要な数理計画法は平易な古典的な手法でも十分ということになり、その結果、数理計画法に制約されない良質な近似モデルの作成が可能になる[8]。このことは、材料非線形あるいは幾何的非線形の解析を要する構造物の設計にも最適設計法が実用の道具として用いうることを意味しないだろうか。数理計画法を意識する必要は全く無く、非線形の構造解析は近似モデルの作成に用いるのみで良いからである。これは、正に構造工学のテーマであり、構造最適設計が数理計画法から脱皮できる所以である。

構造物の応答の２次の微係数を得ることは困難であるので、近似モデルは１次の微係数を基本に構成せざるをえない。そのため、近似の方法および変数の選択により良質の近似モデルを模索することになる。構造物の応答の効率的な感度解析の理論の確立[11] が望まれるのはこのためである。また、近似モデルの作成は、あくまでも構造工学的根拠に基づいて行わなければならないと考えられる。

６． あとがき

最適設計法の有用性に対する認識は、国内においても種々の工業設計の分野に徐々にではあるが浸透しているように思われる。色々応用され、効果も上がっている分野もある。

それにもかかわらず、構造最適設計が難しいというイメージはなかなか拭い去れず、また、数理計画法の位置付けがあいまいなために、手法を理解する上で構造工学的視点が欠けていたことも事実である。

しかし、本論文で説明したように、最適化手法が、近似モデルと数理計画法から構成されていると考えると、数理計画法自身は、構造最適設計においては主要なテーマではなく、良質な近似モデルの作成、つまり構造工学的アプローチこそが今後の主要なテーマであるということができる。本文中の図－２の構成が今後の構造最適設計の基本的な構成になると考えられ、近似モデルの最適化に用いられる数理計画法は、ＳＵＭＴからＧＲＧ、ＳＱＰまで自由に選択できることになる。そのとき、最適設計全体の効率は、用いる数理計画法ではなく、近似モデルの質に依存することになる。

さらに、この分野の研究が進むと、現在ほとんど静的かつ線形解析を前提としている構造最適設計も、基本的な考え方は全く変えずに、動的あるいは非線形構造解析が必要な構造物の設計にも応用できるものと思われる。

末筆ではあるが、本論文を投稿する機会を与えてくださった、土木学会構造工学委員会　構造工学論文集

編集小委員会第４分科会の古田均主査に謝意を表する。また、本論文のための資料を提供頂いた新日本製鐵株式会社設備技術本部の山村和人氏に謝意を表する。

参考文献

1） Schmit, L.A.:Structural Design by Systematic Synthesis, Proc. of the 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, pp.105-122, 1960.

2） Schmit, L.A. and Farshi, B.:Some Approximation Concepts for Structural Synthesis, AIAA J., Vol.12, pp.692-699, 1974.

3） Schmit, L.A. and Miura, H.:Approximation Concepts for Efficient Structural Synthesis, NASA CR-2552, 1976.

4） Fleury, C.:Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.14, No.12, pp.1761-1783, 1977.

5） Fleury, C. and Schmit, L.A.:Primal and Dual Methods in Structural Optimization, J. of the Structural Division, ASCE, Vol.106, No.ST5, pp.1117-1133, 1980.

6） 三浦宏一：最適構造設計の方法とその応用について、第５回ＭＳＣ／ＮＡＳＴＲＡＮユーザー会議論文集、1987.

7） 土木学会構造工学委員会構造物最適性研究小委員会：構造工学シリーズ１　構造システムの最適化～理論と応用～、土木学会、 1988.

8） 杉本博之・山村和人：骨組構造物の最適設計における応力近似モデルについて、構造工学論文集、Vol.35Ａ、1989.

9） Schmit, L.A. and Fleury, C.:Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Methods, AIAA J., Vol.18, No.10, pp.1515-1524, 1980.

10） Vanderplaats, G.N. and Salajegheh, E.:A new approximation method for stress constraints in structural synthesis, Proc. 28th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Monterey, pp.314-321, 1987.

11） 菊田征勇・松井邦人・新延泰生：動的領域における構造物の感度解析、構造工学論文集、Vol.33Ａ、pp.703-714、1987.

（１９８８年１０月１２日受付）