

定量的非破壊評価 (QNDE) と フラクチャーメカニクス

QUANTITATIVE NON-DESTRUCTIVE EVALUATION (QNDE) AND FRACTURE MECHANICS

広瀬 壮一

by Sohichi Hirose*

QNDE is a new developing technique to assess the material state. Primary interest lies in detecting and characterizing microscopic or macroscopic flaws that would ultimately lead to failure. QNDE is, therefore, closely related with fracture mechanics. In the former part of this paper, the correlations between QNDE and fracture mechanics are demonstrated with some successful examples. In the latter part, dynamic crack analyses, which provide basic valuable information for QNDE, are reviewed with some numerical examples. Particular emphasis is placed on crack analyses by the boundary integral equation method.

1. QNDEとフラクチャーメカニクス

非破壊評価 (NDE: Non-Destructive Evaluation) とは、構造物を壊すことなく構造物内部にある欠陥を検出するもので、各種構造物あるいは構造物材の余寿命の推定には不可欠なものである。現在においてはNDE技術として様々な計測法が開発されつつある。例えば、超音波探傷法、アコースティック・エミッション法 (AE法)、渦電流法、電磁気法、レーザー法、X線透過法などがある。これらの中で、フラクチャーメカニクスと深い関係を持つ計測法は超音波探傷法とAE法であろう。これら二つの方法は、固体内を伝播する弾性波 (超音波) を媒介として構造物内のクラックやボイドなどの欠陥を検出するもので、マイクロメカニクスや弾性波動論などと共にフラクチャーメカニクス、特に動的フラクチャーメカニクスと深い関わりを持っている。

超音波探傷法は、Fig.1(a)に示すように物体表面から弾性波を入射し、内部欠陥によって反射・屈折した波動を物体表面で検出して欠陥の位置や大きさなどを明らかにするものである。一方、AE法は、Fig.1(b)に示すように、微小クラックの破壊により放射された弾性波 (AE) を検出して構造物の安全性を診断したり、内部クラックの性状を明らかにするものである。前者の超音波探傷法がアクティブ法であるのに対し、後者のAE法はパッシブ法と言える。

1960年代までのNDEは、波動の到達時間だけに注目して、構造物内の欠陥の有無の調査や位置の決定を行うものであった。しかし、1970年代に入ると、より多くの情報が得られる定量的非破壊評価 (QNDE: Quan-

* 正員 工博 岡山大学 助手 工学部土木工学科 (〒700 岡山市津島中3-1-1)

titative Non-Destructive Evaluation) の必要性が認識され始めた。すなわち、波動の到達時間だけでなく、振幅の大小やフーリエ成分なども活用して欠陥の大きさ、形状、方向、分布などの定量的パラメータの決定が試みられるようになったのである。こうしたNDEからQNDEへの移行の背景には、1960年代までに飛躍的に発展したフラクチャーメカニクスの影響があった。当時、フラクチャーメカニクスでは破壊力学パラメータとしてのK値の有用性が認められ、様々な方法でK値を求める試みがなされた。しかし、従来のNDEではK値を決定できるだけの情報（欠陥の大きさ、形状、方向など）は全く得られなかったのである。この意味で、フラクチャーメカニクスはQNDEに対する研究の起爆剤あるいは促進剤となったわけである。

以下においては、いくつかの具体例を挙げながら、QNDEとフラクチャーメカニクスの関係について述べていく。

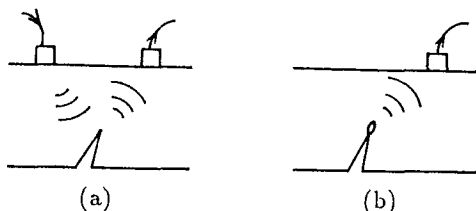


Fig.1 (a) Ultrasonics and (b) AE method.

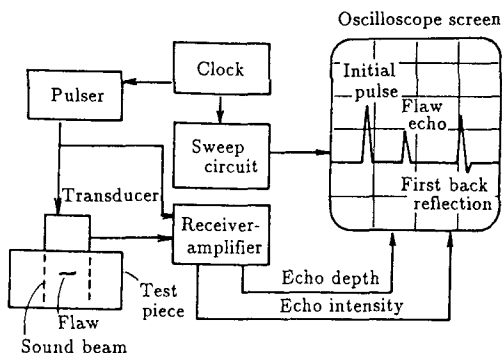


Fig.2 Typical system of pulse-echo method.

〔例-1〕 従来のNDEの一例

まず最初に、従来のNDEの例を紹介しよう。Fig.2はパルス-エコー法によるAスキャン装置の典型的なダイアグラムである。供試体表面に設置された変換子から超音波を入射して、同じ変換子により欠陥からの反射波を検出する。横軸に時間、縦軸に振幅をとり、表示すれば反射波の到達時間から欠陥の深さを決定することができる。しかし、この方法では欠陥の大きさや方向などフラクチャーメカニクスを適用するだけの十分な定量的情報は得られない。

最近では、変換子を一次的に走査させるBスキャンや二次的に走査させるCスキャン、あるいはアレー配置された変換子などが開発され、欠陥の断面図や正面図などが明かになりつつある。しかしながら、これらの研究においてはフラクチャーメカニクスなどの力学的アプローチを基礎とするものは少なく、超音波検出技術や画像処理などの開発に力点が置かれているようである。

〔例-2〕 円板状クラックによる散乱パターン

遠方における散乱波の散乱パターンはQNDEにおいて重要な情報を提供する。Fig.3は、無限弾性体内にある円板状クラックに垂直に調和平面P波が入射したときの無限遠方における散乱パターンの理論解を示したものである¹⁾。クラックは $\theta=0^\circ$ 面内にあり、 ak_T (a : クラックの半径、 k_T : S波の波数) $=0.2, 1.4$ の2つの波数に対して計算されている。P波、S波のそれぞれの散乱波に対して特徴的な散乱パターンが得られていることがわかる。言い換えれば、超音波探傷によりクラックからの散乱パターンを求めればクラックの方向が決定できるのである。同様な試みがAE法においても行われている。地震学の分野ではよく用いられる方法であるが、P波初動の押し引きのパターンからAE源のクラックの向きと破壊形式を決定するものである^{2), 3)}。

遠方における散乱パターンは、様々なクラックに対して理論的に求められている。例えば、二次元クラックに対しては、Mal⁴⁾、Hijden & Neerhoff^{5), 6)}、Boström⁷⁾の研究、三次元クラックに対しては、上述のMal¹⁾の他にKrenk & Schmidt⁸⁾、Lin & Keer^{9), 10)}、Budreck & Achenbach¹¹⁾などの研究がある。

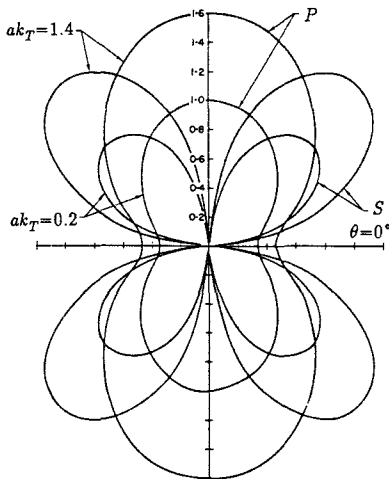


Fig.3 Radiation far-field of P and S waves scattered by a penny-shaped crack¹⁾: incident P wave.

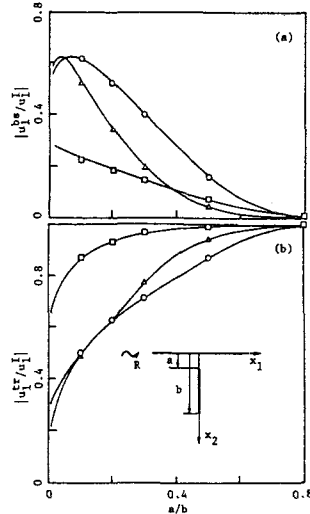


Fig.4 Far-field amplitudes of (a) reflected and (b) transmitted Rayleigh waves¹²⁾. (-□-: $bk_L=1$, -○-: $bk_L=3$, -△-: $bk_L=5$)

【例-3】 半無限弾性体中のクラックによるRayleigh波の散乱

次に遠方における散乱波の振幅を利用したQNDEの一例を紹介する。Fig.4に示すような半無限弾性体中の二次元クラックによるRayleigh波の散乱を考えよう。クラックは $a < x_2 < b$ の x_2 軸上にある。Fig.4は、無限遠方における反射あるいは透過Rayleigh波の振幅を理論的に求め、横軸に a/b なる比をとってプロットしたものである¹²⁾。ただし、 bk_L (k_L : P波の波数)=1, 3, 5の3通りの波数について計算されている。この図より、遠方におけるRayleigh波の振幅はほぼ a/b と一対一の関係にあることがわかる。従って、超音波探傷によってRayleigh波の振幅が求められれば一意的に a/b なる比が決定できる。

類似したアプローチが周期的に分布したクラックやボイドの解析にも適用されている。すなわち、周期的に配列されたクラックやボイドによる波動の反射係数、透過係数あるいは分散曲線などを求め、逆に欠陥の大きさや分布を明らかにしようとするもので、Achenbachを中心とした研究者によって精力的に研究が行われている¹³⁾⁻¹⁸⁾。

【例-4】 IBA (Inverse Born Approximation)

例2、3で紹介したQNDEでは欠陥の形状や方向がある程度前もって既知でなければならない。いわば特殊な幾何形状のもとでのQNDEである。それに対して、一般的な欠陥の性状を明らかにする逆散乱問題もいくつかの方法によって解析されている。ここでは、その一解析法であるIBAを紹介する。IBAはもともと弱い散乱特性を示す欠陥に対して誘導されたものであったが¹⁹⁾、最近ではボイドやクラックなどの強い散乱特性を示す欠陥に対しても盛んに応用されている²⁰⁾⁻²²⁾。例えば、Fig.5に示すような空洞Dによる散乱問題を考えよう。領域D内の任意の点 x における散乱波の変位 $u^S(x)$ は厳密に次式で表される。

$$u^S(x) = \int_{\partial D} T(x,y) u(y) dS_y \quad (1)$$

但し、 T は二重層核、 u は全変位であり、定常調和振動を仮定している。さて、式(1)にBorn近似（境界上の全変位 u を入射波の変位 u^i で近似するもの）を導入して、 $\hat{e}^s$ の方向の遠方における散乱P波 u_p^s を表すと次のような形にかけらる。

$$u_p^s(\hat{e}^s, \hat{e}^I; k_L) = \Psi(\hat{e}^s, \hat{e}^I; k_L) \int_D e^{-ik_L(\hat{e}^s - \hat{e}^I) \cdot \mathbf{y}} dV_y \quad (2)$$

ただし、 Ψ は適当な関数である。上式の右辺の積分項は領域 D に対する特性関数 $\gamma(\mathbf{x})$ ($\gamma(\mathbf{x})=1 \quad \mathbf{x} \in \bar{D}$, $\gamma(\mathbf{x})=0 \quad \mathbf{x} \in D$) のフーリエ変換像 $\gamma(\xi)$ ：

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= \int_{D+\bar{D}} \gamma(\mathbf{x}) e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} dV_x \\ &= \int_{\bar{D}} e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}} dV_x \end{aligned} \quad (3)$$

と同じ形をしている。従って、式(2)、(3)より様々な方向 ($\hat{e}^s - \hat{e}^I$) とある周波数域において検出された散乱波を逆フーリエ変換すれば特性関数 $\gamma(\mathbf{x})$ が得られ、欠陥の形状が決定できる。Fig.6は理論的に求められた遠方での散乱波をデータとして得られた空洞の特性関数の分布を図示したものである²³⁾。ほぼ本来の空洞の形状が再現できている。

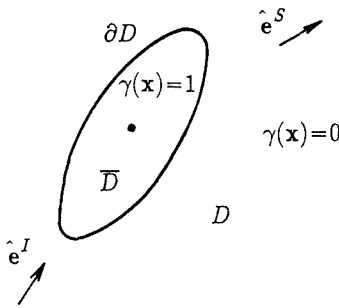


Fig.5 Geometry of scattering problem and characteristic function.

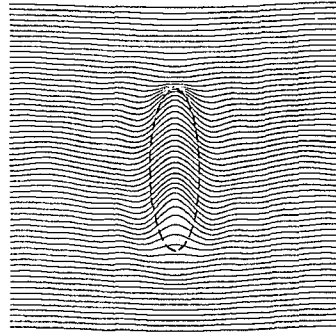


Fig.6 Reconstructed characteristic function of a cavity²³⁾.

Niwa & Hirose²³⁾ はIBAの精度を上げるために修正IBAを提案している。これは、IBAで求められた欠陥形状を第一次近似として散乱問題を解き、Born近似で無視された項を式(2)の左辺に付加してもう一度特性関数 γ を求めるもので、簡単な問題ではかなり精度が上がる事が確かめられている。修正IBAを実験データに応用するには数多くの解決すべき問題が残っているが、その場合、修正IBAは実験と理論のハイブリッド法となり、動的フラクチャーメカニクスの立場からも興味深い解法であると言えよう。

一般的な逆散乱問題の解法としてはIBAの他にいくつかの解法がある。POFFIS (Physical Optics Far Field Inverse Scattering) 法^{24), 25)} はその一つである。この方法はphysical optics近似を用いて空洞による逆散乱問題を解くもので、そのアルゴリズムはIBAと同様に遠方での散乱波の逆フーリエ変換を評価するものである。しかしながら、POFFISではIBAにおける特性関数の代わりに特性関数の法線方向微係数の分布が求められる。また、AchenbachらはKirchhoff近似をクラックによる散乱データに適用したり²⁶⁾、Ray Theoryを用いた逆散乱解析も行っている^{27), 28)}。

ここでは数多くあるQNDEのごく一部を紹介した。QNDEの詳しいレビューは文献29)、30)を参照されたい。さて、以上の例からも明らかなように、QNDEとフラクチャーメカニクスには深い関係がある。QNDEは構造物あるいは材料の表面からその内部の欠陥の性状を把握するものであるから、Fig.7に示すようにフラクチ

ャーメカニクスから得られるfar-field解（遠方における散乱パターン、振幅値、位相など）が重要な意味を持つ。もちろん、QNDEにより欠陥の大きさや形状、方向、分布などが明らかになればそれらの情報はフラクチャーメカニクスにフィードバックされて、K値や開口変位などのnear-field解が計算され、構造物の安全性診断、余寿命の推定などが行われる。

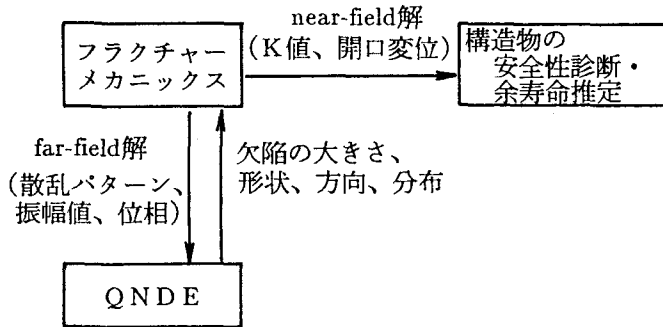


Fig.7 Correlation between QNDE and fracture mechanics.

2. クラックの動的解析

前章の例からもわかるようにクラックの動的解析は動的フラクチャーメカニクスの主テーマであると同時にQNDEの基礎をなすものである。ここでは、クラックの動的解析、特にクラックによる波動散乱問題に関する研究のレビューを行うと共に、最近の解析結果をいくつか紹介する。

クラックによる波動散乱問題の解析は1960年代後半より盛んに行われるようになった。例えば、二次元クラックに対してはLoeber & Sih³¹⁾、Sih & Loeber³²⁾、Mal⁴⁾による研究、三次元クラックに対しては、Filipczynski³³⁾、Robertson³⁴⁾、Mal^{1), 35)-37)}、Sih & Loeber^{38), 39)}、Jain & Kanwal⁴⁰⁾などによる研究が先駆的である。最近では、Krenk & Schmidt⁸⁾、Martin & Wickham⁴¹⁾によって三次元クラックの解析が行われている。これらの研究はいずれも適当な積分変換を用いて問題を一次元Fredholm型積分方程式に帰着させて解くものである。従って、クラックの幾何形状は簡単なものに限られ、二次元問題ではGriffithクラック、三次元問題では円板状クラックが解析されている。なお、三次元円板状クラックの解析についてはMartin & Wickham⁴¹⁾によってかなり詳細なレビューがなされているので参照されたい。

一般にクラックによる散乱問題を積分方程式により定式化すると得られる方程式は特異積分方程式となる。Erdogan & Gupta⁴²⁾はこのような特異積分方程式に対して非常に巧妙な数値解法を提案した。彼らの方法は選点法の一つであるが、非常に応用性が広く、様々なクラックの散乱問題に適用されている。例えば、Stone et al.⁴³⁾、Ryan & Mall⁴⁴⁾は半無限弾性体中のクラックによる二次元面外波の散乱問題を解いており、Achenbachを中心としたグループは、半無限弾性体の表面クラックによる二次元面内波の散乱問題^{45), 46)}、半無限弾性体中の内部クラックによる二次元面内波の散乱問題^{12), 47), 48)}、三次元半無限体における動的クラック問題^{49), 50)}、インターフェース近傍の動的クラック問題⁵¹⁾と数多くの問題を解析している。また、Yang & Bogy⁵²⁾はインターフェースにおけるクラックによる散乱問題を解析し、Angel⁵³⁾は表面クラックによるLove波の散乱問題を解いている。

一方、Hijden & Neerhoffはクラック開口変位をチェビシエフ多項式で近似して、一種のGalerkin法により特異積分方程式を線形代数方程式に変換してクラックによる散乱問題を解いている。彼らは、二次元無限弾性体中のクラック⁵⁾、半無限弾性体中のクラック^{6), 54)}、インターフェースにおけるクラック⁵⁵⁾などを解析している。また、Boström⁷⁾は類似の解法によりインターフェースにおけるクラックの動的問題を解析してい

る。

1980年代に入ると計算機の進歩と共に数値解法が急速に発達した。これに伴ってクラックによる散乱問題も様々な方法により解析が行われるようになった。例えば、Visscher^{56), 57)}はMOOT(Method of Optimal Truncation)を三次元クラックやボイドによる波動散乱問題に適用しており、Visscher⁵⁸⁾⁻⁶⁰⁾とBoström & Olsson⁶¹⁾はT-matrix法を用いて二次元あるいは三次元平面クラックや曲面状クラックの動的解析を行っている。また、Bouchon⁶²⁾はDWN(Discrete Wavenumber)法を用いて二次元Griffithクラックによる波動散乱問題を解いている。

さて、様々な数値解法の中で、最近最も注目され、発展している解法は境界積分方程式法(BIEM: Boundary Integral Equation Method)であろう。クラック問題におけるBIEMでは超特異性を有する積分方程式を解かなければならないが、最近、超特異性の処理法に関する研究が急速に進展して、様々な問題の解析が可能となった。BIEMに関する全般的なレビューは文献63)を参照されたいが、ここではBIEMによるクラックの動的解析に関する研究をレビューする。

BIEMによるクラックの解析は、周波数域での解析にとどまらず、時間域での解析も行われている。また、対象とするクラックも二次元クラックや三次元クラックなど様々である。二次元クラック問題においては、広瀬・丹羽⁶⁴⁾、西村・小林⁶⁵⁾、Gross & Zhang⁶⁶⁾、Zhang & Achenbach⁶⁷⁾、Krishnasamy et al.⁶⁸⁾などが周波数域における解析を行っており、Nishimura et al.⁶⁹⁾⁻⁷¹⁾やZhang & Achenbach⁷²⁾が時間域において解析を行っている。三次元動的クラック問題に対して最初にBIEMの定式化を示したのはBudiansky & Rice⁷³⁾であった。彼らは正則化の方法により巧みに積分方程式の特異性を下げることに成功している。その後、BIEMは様々な三次元問題に適用されることになった。例えば、周波数域においては、Lin & Keer^{9), 10)}、Niwa & Hirose⁷⁴⁾、Budreck & Achenbach¹¹⁾、Nishimura & Kobayashi⁷⁵⁾などにより解析が行われ、時間域においてはSládek & Sládek⁷⁶⁾、Nishimura et al.⁷¹⁾、Hirose & Achenbach^{77), 78)}などにより解析が行われている。

最後にBIEMによる解析例をいくつか紹介しよう。

[例-5] 二次元クラックによるP波の散乱⁷⁰⁾

まず、二次元クラックに平面P波が入射したときの散乱問題を時間域におけるBIEMを用いて解析した例を示そう。Fig. 8に示すようにクラックは長さ $2a$ の直線クラックであり、応力がステップ時間関数である平面P波がクラック法線に対して 30° の角度で入射するものとする。応力マグニチュードは p_0 とし、ポアソン比は

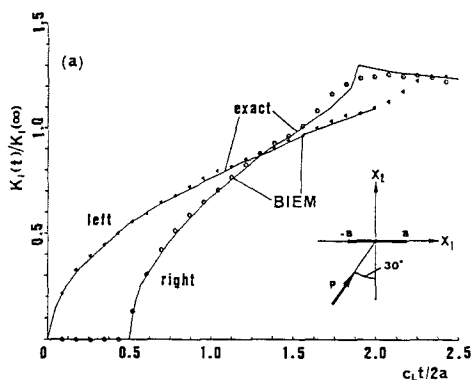


Fig.8 Variation of the stress intensity factor K_I as a function of time⁷⁰⁾.

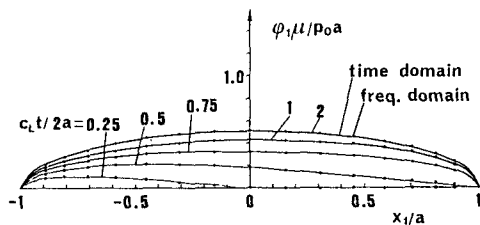


Fig.9 Variation of the crack opening displacement ϕ_1 with x_1/a for various values of time $c_1 t / 2a$ ⁷⁰⁾.

0.25とした。Fig.8はモードIの応力拡大係数 K_I の経時変化を示したものである。BIEMによる結果はThau & Lu⁷⁹⁾による解析解とよく一致していることがわかる。Fig.9は x_1 方向のクラック開口変位 ϕ_1 の時間的変化をプロットしたものである。この問題は周波数域で求められた解をフーリエ逆変換することによっても解くことができる。Fig.9より時間域BIEMによる解と周波数域BIEMによる解はよく一致していることがわかる。

【例-6】 界面クラックによる散乱問題⁸⁰⁾

Fig.10に示すような無限弾性体中の球状散乱体(inclusion)に平面調和P波が入射したときの散乱問題を考える。但し、球状散乱体と無限弾性体の界面は一部がバネで接触しており、残りの部分は剥離してクラックを形成しているものとする。Fig.10(a)は、球面の下半面がクラックで、上半面がバネで接触している球体の後方における x_3 軸上の散乱波の垂直方向変位の実部と虚部をプロットしたものである。一方、Fig.10(b)は(a)の場合とは逆に、上半面がクラックで下半面がバネで接触する球体の場合である。いずれの場合も材料定数は $\bar{c}_L/c_L=1/\sqrt{2}$ 、 $\bar{\nu}=\nu=1/4$ 、 $\bar{\rho}/\rho=1$ (c_L :P波の速度、 ν :ポアソン比、 ρ :密度、 $\bar{\cdot}$ は散乱体に関する量、 $\cdot$ なしは無限弾性体に関する量)で、 $k_L d=1$ (d :球の半径)なる波数に対して計算されている。また、用いたバネ定数は、球座標において $R_r/R_\theta=R_\phi/R_\theta=100$ ($R_\theta=c_L/d$)と与えられている。Fig.10(a)と(b)の比較より界面遠方では振幅はほぼ等しいものの位相が約 $1/4\pi$ ずれていることがわかる。当然ながら、界面近くでは両者の散乱波の挙動は大きく異なっている。

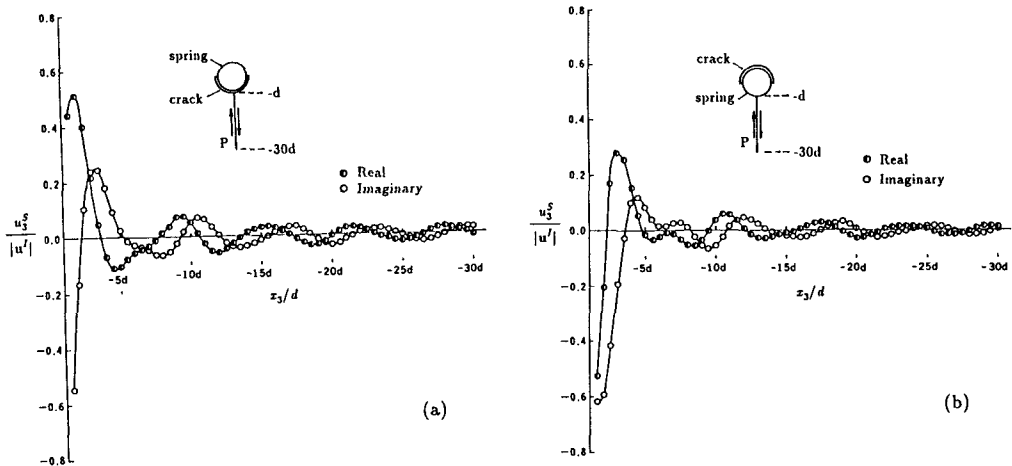


Fig.10 Real and imaginary parts of the backscattered displacement for the case (a) of a crack at the insonified side and the case (b) of a crack at the shadow side of the inclusion⁸⁰⁾

【例-7】 円板状クラックの動的破壊問題⁸¹⁾

最後に時間領域でのBIEMを三次元円板状クラックの動的破壊問題に適用した例を示す。まず、 $t < 0$ の初期状態においてクラックは半径 a の円板状クラックで、無限遠方で一様な引張応力 p_0 を受けて釣り合っているとす。しかし、 $t=0$ の瞬時にクラックが破壊してクラックの半径が a から $b(b>a)$ へと拡大し、それに伴って弾性波(AE)が放射されたとしよう。Fig.11はその時のクラック開口変位の経時変化を示したものである。但し、 $a=0.5b$ 、ポアソン比は0.25である。クラックの瞬時の破壊に伴うクラック開口の様子がよくシミュレートされている。また、時刻 $c_t/b=9$ においてはほぼ静的解に収束していることがわかる。Fig.12は無限遠方における放射波の半径方向成分 Ω_R の経時変化を表したものである。初動部分に小さいうねりを伴って大きく振動しながら0に漸近している。初動部分の小さいうねりはクラック面上の解放された初期応力が不均一であったた

めに生じたものである。

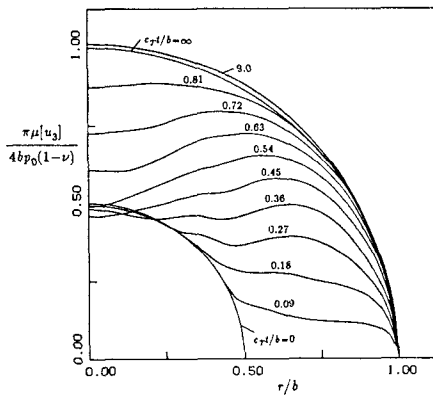


Fig.11 Variation of the crack opening displacement with $r/b^{8.1})$

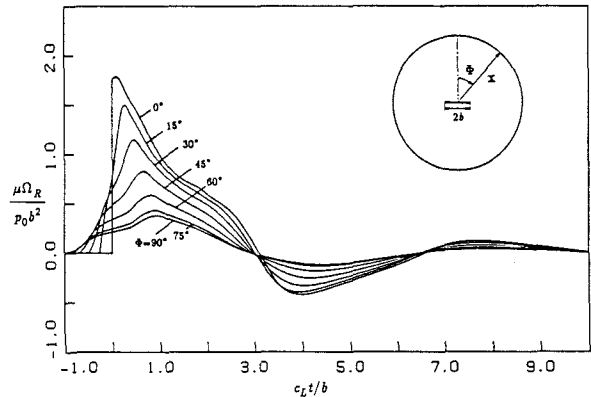


Fig.12 Variation of the radial component of the far-field radiated wave as a function of time^{8.1)}

3. おわりに

一般に散乱問題は大きく直接散乱問題（内部欠陥の幾何あるいは材料条件が与えられたもとで散乱波を求める問題）と逆散乱問題（散乱波が与えられた時に内部欠陥の性状を明らかにする問題）に大別できる。例5-7で見たように、直接散乱問題は最近の数値解析法の進展によりかなり複雑なクラックの解析も可能になってきた。一方、QNDEは本来逆散乱問題である。例2-4に示したようなQNDEの解析の成功例はあるが、逆散乱問題はかなり難しい問題であり、一般的問題を解くまでには至っていない。今後、動的フラクチャーメカニクスをより発展させると共に、今まで得られた知識を集積して難問なるQNDEへの適用を図ることが必要である。

参考文献

- 1) A.K.Mal, Int.J.Eng.Sci.,8,381-388,1970.
- 2) M.Ohtsu, J.Acoustic Emission,1,103-112,1982.
- 3) M.Ohtsu, Struct.Eng./Earthq.Eng.,5 (2),275s-283s,JSCE,1988.
- 4) A.K.Mal, Int.J.Eng.Sci.,8,763-776,1970.
- 5) J.H.M.T.van der Hijden and F.L.Neerhoff, J.Appl.Mech.,51,646-651,1984.
- 6) J.H.M.T.van der Hijden and F.L.Neerhoff, J.Acoust.Soc.Am.,75,1694-1704,1984.
- 7) A.Boström, J.Appl.Mech.,54,503-508,1987.
- 8) S.Krenk and H.Schmidt, Phil.Trans.R.Soc.Lond.,A308,167-198,1982.
- 9) W.Lin and L.M.Keer, Proc.R.Soc.Lond.,A408,277-294,1986.
- 10) W.Lin and L.M.Keer, J.Acoust.Soc.Am.,82,1442-1448,1987.
- 11) D.E.Budreck and J.D.Achenbach, J.Appl.Mech.,55,405-412,1988.
- 12) J.D.Achenbach and R.J.Brind, J.Sound Vib.,76,43-56,1981.
- 13) Y.C.Angel and J.D.Achenbach, J.Appl.Mech.,52,33-41,1985.
- 14) Y.C.Angel and J.D.Achenbach, Wave Motion,7,375-397,1985.

- 15) J.D.Achenbach and Z.L.Li, Wave Motion,8,371-379,1986.
- 16) Y.C.Angel and J.D.Achenbach, Wave Motion,9,377-385,1987.
- 17) J.D.Achenbach and M.Kitahara, J.Acoust.Soc.Am.,80,1209-1214,1986.
- 18) J.D.Achenbach and M.Kitahara, J.Acoust.Soc.Am.,81,595-598,1987.
- 19) R.T.Prosser, J.Math.Phys.,10 (10),1819-1822,1969.
- 20) J.H.Rose and J.A.Krumhansl, J.Appl.Phys.,50 (4),2951-2952,1979.
- 21) D.K.Hsu, J.H.Rose and D.O.Thompson, J.Appl.Phys.,55 (1),162-168,1983.
- 22) J.H.Rose, J.Pure Appl.Geophys.(to appear).
- 23) Y.Niwa and S.Hirose, Struct.Eng./Earthq.Eng.,3 ,267s-275s,JSCE,1986.
- 24) N.Bleistein and J.K.Cohen, Wave Motion,1,153-161,1979.
- 25) N.Bleistein and J.K.Cohen, Wave Motion,2,75-81,1980.
- 26) J.D.Achenbach, K.Viswanathan and A.Norris, Wave Motion,1,299-316,1979.
- 27) J.D.Achenbach, A.Norris and K.Viswanathan, Bull.Seism.Soc.Am.,72 (3),779-792,1982.
- 28) A.N.Norris and J.D.Achenbach, J.Acoust.Soc.Am.,72 (1),264-272,1982.
- 29) R.B.Thompson, J.Appl.Mech.,50,1191-1201,1983.
- 30) D.O.Thompson and D.E.Chimenti(eds.), Review of Progress in Nondestructive Evaluation,1(1982)
-8(1989),Plenum Press,New York.
- 31) J.F.Loeber and G.C.Sih, J.Acoust.Soc.Am.,44,90-98,1968.
- 32) G.C.Sih and J.F.Loeber, Q.Appl.Math.,27,193-213,1969.
- 33) L.Filipczynski, Proc.Vib.Problem,2,41-56,1961.
- 34) I.A.Robertson, Proc.Camb.phil.Soc.,63,229-238,1967.
- 35) A.K.Mal, Q.Appl.Math.,26,231-238,1968.
- 36) A.K.Mal, Int.J.Eng.Sci.,6,725-733,1968.
- 37) A.K.Mal, Int.J.Eng.Sci.,6,623-629,1968.
- 38) G.C.Sih and J.F.Loeber, J.Acoust.Soc.Am.,46,711-721,1968.
- 39) G.C.Sih and J.F.Loeber, J.Acoust.Soc.Am.,44,1237-1245,1968.
- 40) B.L.Jain and R.P.Kanwal, Q.Appl.Math.,30,283-297,1972.
- 41) P.A.Martin and G.R.Wickham, Proc.R.Soc.Lond.,A390,91-129,1983.
- 42) F.Erdogan and G.D.Gupta, Q.Appl.Math.,29,525-534,1972.
- 43) S.F.Stone, M.L.Ghosh and A.K.Mal, J.Appl.Mech.,47,359-362,1980.
- 44) R.L.Ryan and S.Mall, Int.J.Solids Struct.,18,1145-1152,1982.
- 45) D.A.Mendelsohn, J.D.Achenbach and L.M.Keer, Wave Motion,2,277-292,1980.
- 46) J.D.Achenbach, L.M.Keer and D.A.Mendelsohn, J.Appl.Mech.,47,551-558,1980.
- 47) R.J.Brind and J.D.Achenbach, J.Sound Vib.,78,555-563,1981.
- 48) L.M.Keer, W.Lin and J.D.Achenbach, J.Appl.Mech.,51,65-70,1984.
- 49) Y.C.Angel and J.D.Achenbach, J.Acoust.Soc.Am.,75,313-319,1984.
- 50) Y.C.Angel and J.D.Achenbach, J.Elasticity,15,89-102,1985.
- 51) W.C.Luong, L.M.Keer and J.D.Achenbach, Int.J.Solids Struct.,11,919-925,1975.
- 52) H.J.Yang and D.G.Bogy, J.Appl.Mech.,52,42-50,1985.
- 53) Y.C.Angel, J.Appl.Mech.,53,587-592,1986.
- 54) F.L.Neerhoff and J.H.M.T.van der Hijden, J.Sound Vib.,94,1984.
- 55) F.L.Neerhoff, Appl.Sci.Res.,35,265-315,1979.

- 56) J.L.Opsal and W.M.Visscher, J.Appl.Phys.,58,1102-1115,1985.
- 57) W.M.Visscher, Wave Motion,3,49-69,1981.
- 58) W.M.Visscher, Wave Motion,5,15-32,1983.
- 59) W.M.Visscher, J.Appl.Phys.,56,713-725,1984.
- 60) W.M.Visscher, J.Appl.Phys.,57,1538-1550,1985.
- 61) A.Boström and P.Olsson, Wave Motion,9,61-76,1987.
- 62) M.Bouchon, J.Acoust.Soc.Am.,81,1671-1676,1987.
- 63) 西村、広瀬、堀井、北原、構造工学論文集、35A,1989.
- 64) 広瀬、丹羽、境界要素法論文集、2,125-130,JASCOME,1985.
- 65) 西村、小林、境界要素法論文集、3,33-38,JASCOME,1986.
- 66) D.Gross and Ch.Zhang, Int.J.Solids Struct.,24,41-49,1987.
- 67) Ch.Zhang and J.D.Achenbach, J.Appl.Mech.,55,104-110,1988.
- 68) G.Krishnasamy, T.J.Rudolphi, L.W.Schmerr and F.J.Rizzo, in:Boundary Element Methods in Applied Mechanics,227-237,Pergamon Press,Oxford,1988.
- 69) N.Nishimura, S.Kobayashi and M.Okada, in:Theory and Applications of Boundary Element Methods ,85-94,Pergamon Press,Oxford,1987.
- 70) N.Nishimura, Q.C.Guo and S.Kobayashi, in:Boundary Elements IX,2,279-291,Springer,Berlin, 1987.
- 71) N.Nishimura, Q.C.Guo and S.Kobayashi, in:Boundary Element Methods in Applied Mechanics,245 -254,Pergamon Press,Oxford,1988.
- 72) Ch.Zhang and J.D.Achenbach, Report NU-SML-TR-88-1,Northwestern Univ.,Evanston,IL,1988.
- 73) B.Budiansky and J.R.Rice, Wave Motion,1,187-192,1979.
- 74) Y.Niwa and S.Hirose, in:Recent Applications in Computational Mechanics,1-15,ASCE,New York, 1986.
- 75) N.Nishimura and S.Kobayashi, Comput.Mech.(to appear)
- 76) J.Sládek and V.Sládek, Int.J.Num.Meth.Eng.,23,919-928,1986.
- 77) S.Hirose and J.D.Achenbach, in:Boudary Element Methods in Applied Mechanics,255-264,Pergamon Press,Oxford,1988.
- 78) S.Hirose and J.D.Achenbach, Int.J.Num.Meth.Eng.(to appear).
- 79) S.A.Thau and T.-H.Lu, Int.J.Solids Struct.,7,731-750,1971.
- 80) M.Kitahara, K.Nakagawa and J.D.Achenbach, in:Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation,8,Plenum Press,New York,1989(to appear).
- 81) 広瀬壮一、第38回応用力学連合講演会講演予稿集、1988.

(1989年10月12日受付)