

クラック問題に対する 境界積分方程式法の適用

BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD FOR CRACK PROBLEMS

西村直志 広瀬壮一 堀井秀之 北原道弘

by Naoshi NISHIMURA*, Sohichi HIROSE**,
Hideyuki HORII*** and Michihiro KITAHARA****

It is of great importance to know the characteristics of cracks under static and dynamic loading conditions, from view points of fracture mechanics and non-destructive evaluation. The characteristics obtained from the stress state at the tip of cracks and the back- and forward-scattered wave fields play an important role for the structural design and the life cycle evaluation of structures. In this paper, the boundary integral equation method applied for the crack analysis is briefly reviewed and some recent developments for the treatment of traction BIE are summarized with some numerical examples.

1. まえがき

破壊力学とはクラックを有する物体の力学であり、クラックの発生・進展等の破壊現象を記述することをその目的とする。クラックを有する線形弾性体を対象とした線形破壊力学は、金属材料における脆性破壊、疲労破壊に対して有効であり、それらの現象の予測・防止において大きな役割を果たしている。破壊力学における現在の研究の方向としては、延性金属材料における延性破壊、動的な破壊、コンクリート・岩石・セラミックス・複合材料等の非金属材料における破壊などの現象に対して破壊力学を適用することであるといえる。その様な新しい破壊力学の体系化が試みられている一方、線形破壊力学を工学的な問題に適用し、構造物の設計や、安全性の確認、非破壊検査に役立てようという試みも数多くなされている。

線形破壊力学が工学的問題の解決上有効であると考えられる典型的な例として、鉄筋コンクリート梁のせん断強度における寸法効果が挙げられる。近年、材料の進歩、設計施工技術の向上、及び、大型構造物の必要性から、構造物の大型化が計られている。大型化に伴い設計上さまざまな問題が起こっているが、鉄筋コンクリート梁のせん断に対する設計法もその一つである。現在、せん断に対する設計法では、実験結果に基づいて許容値を定めている。ところが、せん断補強をしていない鉄筋コンクリート梁のせん断強度は、寸法比を一定にしても有効高さ d が大きくなると次第に減少することが実験的に明らかにされている。これは、一般に寸法効果と呼ばれているものであるが、その原因についてははっきりしていない。クラック面での骨材の噛み合わせ作用の減少が重要であると考えられているが、寸法効果のメカニズムを明らかにするためには、鉄筋コンクリート梁におけるクラックの進展解析を行いクラッ

* 正員 工博 京都大学 助手 工学部土木工学科 (〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正員 工博 岡山大学 助手 工学部土木工学科 (〒700 岡山市津島中3-1-1)

*** 正員 Ph.D. 東京大学 助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

**** 正員 工博 東海大学 助教授 海洋学部海洋土木工学科 (〒424 清水市折戸3-30-1)

クにおける開口変位・すべり変位の分布の変化を調べ、どの部分で噛み合わせが起こっているのか、せん断伝達によってクラック進展挙動がどの様に変化するのか、具体的にどの様にしてせん断強度の寸法効果が生じているのかといったことを明らかにすることが必要であると考えられる。

これらの研究を行うためには、クラック進展解析に適した解析手法の確立が必要である。大型鉄筋コンクリート梁におけるクラック進展現象においては、荷重の増加とともに多数のクラックがそれぞれ進展する。コンクリートの挙動はほぼ線形、すなわちコンクリート自体の材料非線形性は全体挙動に対して支配的ではなく、クラックの進展、クラック面での応力伝達、せん断すべり等が支配的であると考えられる。このような現象に対する数値解析法としてはクラックを有する線形弾性体に対する境界積分方程式法が有力である^{1),2)}。上に述べたのはクラック問題に対する境界積分方程式法の有効な問題の一例であるが、この他にも適用可能な工学的問題は数多い。

境界積分方程式法とはグリーンの定理と基本解の性質に基づき、偏微分方程式と境界条件からなる境界値問題を境界上での未知量に関する積分方程式に置き換え、それを離散化して数値的に解を求める手法である。有限要素法などの領域型解法を二次元、三次元の問題に適用すると、取り扱う代数方程式の変数の数が大きくなり、入力データの作成が煩雑になる。また、クラック問題の場合には、クラック先端の応力特異性の取扱、メッシュ分割の方法などに工夫が必要であり、クラックを進展させるごとにメッシュ分割をやり直す必要がある。境界積分方程式法は、境界上の未知量に関する積分方程式に基づいており、考えている問題の次元が一つ下がるため、変数の数、入力データ数を減少することができる。また、未知量は境界上で定義されているのでクラックが進展する場合のように境界の幾何形状が変化する問題に対しては有利である。

ここではクラック問題に対する境界積分方程式法の発展の歴史を紹介し、最近の進歩を具体的に述べることににより、境界積分方程式法の要点を示し、特にクラック問題における特徴・問題点を明らかにする。さらに、各種の問題に対する代表的な解析例を紹介する。一人でも多くの研究者が境界積分方程式法に関心を持ち、その適用範囲を広げることに役立てば幸いである。

2. 発展の歴史

弾性論における境界積分方程式法の広い意味での歴史は古く、その起源は、19世紀になされた一連の基本的な仕事：G.Green による特異点法 (method of singularities), Lord Kelvin による集中力に対する解、Betti による相反作用の定理、そして Somigliana による解の表現公式などに見ることができる³⁾。その後も、主にイタリアとロシア (そしてソ連) の研究者による仕事が続き、1950年代に至るまでの成果が Kupradze の著書⁴⁾ にまとめられている。この著書において、Kupradze は弾性ポテンシャルおよびその性質はもちろん、解表現、そして Betti の定理に基づく“境界上の積分方程式”をも導いており、弾性論における境界積分方程式自身の理論的枠組みはこの時点において完成されていると見ることができる。さらに、彼は数値計算をも実行している。この場合の数値計算は境界上の積分方程式を直接解いたものではなく、解の外部表現を1つの関数方程式と見て、この関数方程式 (特異性はない) を数値的に解いたものである。いわゆる仮想境界の方法と呼ばれる方法である。

今日 境界積分方程式法あるいは境界要素法と呼ばれる数値解析の一手法の本質は、特異性のある境界積分方程式を如何にうまく数値解析に乗せるか、という葛藤にある。本節では、この(特異)境界積分方程式の数値解析という意味において、本手法の歴史を簡単に記し、次節3. で述べるクラック問題に対する境界積分方程式の定式化のための足掛かりとする。

2. 1 境界積分方程式法

特異性のある境界上の積分方程式を本格的に数値解析により解こうとする試みは、1960年代の初期

に始まる。1962年に Hess⁵⁾、Shaw と Friedman^{6),7)} による仕事が、1963年には Jaswon, Ponter, Symm のグループ⁸⁾⁻¹⁰⁾、そして Banaugh と Goldsmith^{11),12)} による仕事が発表される。これらの論文において、Hess⁵⁾ は 今日では間接法と呼ばれる手法の1つである 一重層ポテンシャルによる解法を、Shaw と Friedman^{6),7)} は 波動問題において 今日では直接法と呼ばれる解法のうち 時間域の基本解を用いた解法を、数値例と共に示している。Jaswon, Ponter, Symm のグループ⁸⁾⁻¹⁰⁾ は 間接法と直接法の両者を、Banaugh と Goldsmith は 波動問題の直接法のうち 周波数域の基本解を用いた解法の具体例を示している。特に、弾性問題の解析という観点からこれら初期の仕事を見ると、Jaswon⁹⁾ が 重調和問題を解こうと試みている点、Banaugh と Goldsmith¹²⁾ が 変位ポテンシャルの導入により弾性波動問題の解析を行っている点が注目される。

静弾性にせよ動弾性にせよ、変位で表示した Navier 式を直接、積分方程式に変換し、数値解析に持ち込むのが今日の主流である。この意味において、今日の弾性論に対する境界積分方程式法の基礎を築いたのは、1967年の Rizzo 論文¹³⁾ である。この論文で 彼が数値解析に用いた境界上の積分方程式を、本論 3.2 の記法により書き下せば次のようになる。

$$C_{ih}(\underline{x}) u_h(\underline{x}) = \int_{\partial D} \Gamma_{ih} t_h dS - \oint_{\partial D} \Gamma_{lih} u_h dS \quad (1)$$

これが、今日 直接法と呼ばれ、最も多くの場合に用いられる解析法の基本式である。ここで、 ∂D は考えている弾性体の境界であり、 u_h と t_h は ∂D 上の変位と表面力、 Γ_{ih} は基本解、 C_{ih} は境界形状により決まる係数、また $\oint$ は Cauchy の主値積分である。 Γ_{lih} の表現など、詳細は後の 3.2 を参照されたい。境界上の特異積分方程式 (1) の可解性、数値解析法、数値例を具体的に示したのが、この Rizzo 論文¹³⁾ である。その後、Rizzo による区分的非均質問題の解析¹⁴⁾、Cruse による動弾性問題^{15),16)} および最初の3次元静弾性問題¹⁷⁾ の解析が行われる。すべて 1960年代後半のことである。1970年代に入り、Cruse によるクラック問題への取り組みが始まる(次項 2.2)。その後の大きな進展は、1976年の Lachat と Watson¹⁸⁾ による、式(1)を数値的に解くに当たっての、形状関数の導入である。この形状関数の導入が 今日の別名: 境界要素法を連想させ、多くの研究者の注意を引くことになる。この間の事情は Rizzo による私見¹⁹⁾ に詳しい。

2. 2 クラック問題

クラック問題に対する境界積分方程式法の適用を最初に試みたのは Cruse²⁰⁾ であり、1971年のことである。注目すべきは、Cruse は当初から3次元クラックの解析²⁰⁾ を試みている。平面ひずみ状態におけるクラックの解析結果との比較により、3次元効果の把握を意図している。70年代、Cruse による精力的な Crack 問題の解析²¹⁾⁻²⁸⁾ が続くが、解析手法面から彼のこれら一連の仕事を大まかに特徴付ければ、先に示した 式(1) そのもののクラック問題への適用と言える。言い換えれば、本質的にはクラック面上で積分方程式を立てることを避けたクラック問題の解析である。明確を記すために、Cruse が示した解析法²¹⁾⁻²⁸⁾ を以下の4つに分類してみる。

- | | | |
|---------------|---|----------------|
| (a) オープン ノッチ法 | , | (b) 領域分割法 |
| (c) グリーン関数法 | , | (d) トラクションBIE法 |

便宜上、ここで オープン ノッチ法と呼んだ手法は、クラックの上、下面にある幅を持たせて、クラック先端では丸みを付けるなどの処理を行う手法であり、Cruse の初期の論文²⁰⁾⁻²³⁾ は この方法を用いている。このとき、上、下面幅をいくらにすればよいか、クラック先端での解の精度が落ちる、などの問題が生じる。Cruse の次なる試みが、領域分割法であった。これは、クラック面に このクラック

面を一部として含む仮想的な境界を付加し、領域を分割した上で積分方程式を立て、仮想的な境界上では変位と応力の連続性を用いて再度 縫い合わせる方法^{23),25),26),28)}である。このとき、クラック先端での応力特異性をどう考慮するかが問題である。彼が用いた1つの処理法は、FEMにおけるように、1/4 中間節点を有する2次アイソパラメトリック要素の導入²⁸⁾であった。次の試みが、グリーン関数法^{24),27)}である。ここでは、クラック面上の境界条件を満足するグリーン関数が用いられる。このとき、問題はグリーン関数の計算である。陽な表現を得るのは、2次元の簡単なクラック形状およびクラック面上の境界条件の場合に限られる。

Cruise が用いた上記3つの方法では、いずれも積分方程式(1)を利用する。オープン ノッチ法では考えている物体境界とクラックをモデル化したオープン ノッチ上で、領域分割法では 物体境界、クラック面および仮想の境界上で、グリーン関数法では物体境界上である。

Cruise が試みた次なる方法が、トラクションBIE法^{25),27)}であり、1975年²⁵⁾のことである。ここでは、応力あるいは表面力に対する積分表示より、クラックの開口変位を未知量とするクラック面上の積分方程式を得る。注意すべきは、この時点^{25),27)}では、彼はまだ このトラクションBIEの数値解析には成功していない。このトラクションBIEにおける超特異核(有限部分の意味でしか積分に意味がない)の処理法が明らかでなかったためである。1980年代、特に最近、この超特異核の処理法に関する研究が急速に進展することとなり、^{1),2),29)-35)} そのエッセンスが次節3.で紹介される。

3. 定式化

3.1 破壊力学の初期値境界値問題

まず最初に静弾性の場合を考える。考える弾性体は Fig.1 の境界 ∂D (クラックは除く)で囲まれた領域 D を占める。 D 中の曲面 S をクラックと呼び、 S のへりを ∂S とする。 ∂D には D から見て外向きの単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を立てる。 S の片側を正、反対側を負と定め、負 $\rightarrow$ 正の方向を向いた S の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。

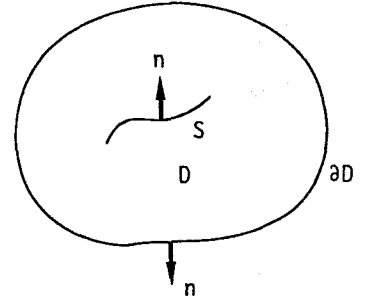


Fig.1 Domain and boundary

静的な破壊力学では、後述の境界条件の下に次式の解を求める：

$$C_{ihkl} u_{k,lh} = 0 \quad \text{in } D \setminus S, \quad (2)$$

$$[u_i(\underline{x})] := u_i^+(\underline{x}) - u_i^-(\underline{x}) \rightarrow 0 \quad \text{as } \underline{x} \rightarrow \underline{x}_0 \quad (\underline{x} \in S, \underline{x}_0 \in \partial S) \quad (3)$$

ここに u_i は変位場、 C_{ihkl} は弾性定数、 u_i^+ 、 u_i^- はそれぞれ S 上での u_i の正、及び負の側からの極限值である。また物体力は省略した。(2)はつりあい式であり、(3)はティップで開口変位が0である事を意味する。境界条件は ∂D 及び S 上の各点でそれぞれ N 、及び $2N$ 個与える事が出来る。ここに、 N は問題の次元 ($N=2$ or 3) である。最も標準的な ∂D 上の境界条件は次の混合条件である：

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \partial D_1, \quad (4)$$

$$t_i := C_{ihkl} u_{k,l} n_h = \bar{t}_i \quad \text{on } \partial D_2, \quad (5)$$

ここに ∂D_1 、 $\partial D_2 = \partial D \setminus \partial D_1$ は ∂D の重なり合わない部分であり、 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{t}_i$ は各々所与の変位及び表面力である。 S 上の境界条件についても S^+ 、 S^- に独立に変位、表面力ないしはその組み合わせを N 個与える。例えば、 S^+ 、 S^- 上で $t_i = 0$ とすれば、クラックは表面力を受けない状態となる。

ただし変位を与える場合には(3)と矛盾しない様にする。

動的問題については、支配方程式は次の運動方程式である：

$$C_{ihkl} u_{k, lh} = \rho \ddot{u}_i \quad \text{in } D \setminus S \times (t > 0), \quad (6)$$

ここに $\dot{} = \partial/\partial t$ 、 t は時間、及び ρ は密度である。これを(3)、静力学と同形の境界条件及び適当な初期条件の下で解く。特に $D = R^N \setminus S$ である場合がよく扱われるが、この場合は ∂D 上の境界条件は、反射波に関する放射条件で置き換えられる。即ち、 u_i^I を与えられた R^N で恒等的に(6)を満足する変位場(物理的には入射波)とし、十分遠方で反射波 $u_i - u_i^I$ が 0 になる事を要求する。 $t = 0$ で u^I が S に到達しない様に時間の原点を選べば初期条件は次のようになる：

$$u_i|_{t=0} = u_i^I|_{t=0}, \quad \dot{u}_i|_{t=0} = \dot{u}_i^I|_{t=0} \quad (7a, b)$$

動的問題の解法は線形問題の常として、時間域又は周波数域で行われる。時間域の定式化では上の問題を直接解く。周波数域の方法は時間に関するFourier変換

$$\widehat{u}_i(\underline{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u_i(\underline{x}, t) dt \quad (8)$$

を用い、次の支配方程式をFourier変換された境界条件の下で解く：

$$C_{ihkl} \widehat{u}_{k, lh} + \rho \omega^2 \widehat{u}_i = 0, \quad (9)$$

ここに簡単のため初期条件は 0 とした。時間域に於ける解は次式で求まる：

$$u_i(\underline{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \widehat{u}_i(\underline{x}, \omega) d\omega. \quad (10)$$

3. 2 解の表現

まず、簡単のため静力学を取り扱う。今、 S を取り巻く閉曲面 S_ε を導入し、 D_ε を ∂D と S_ε で囲まれた領域とする。この時、解 u_i について D_ε での Somigliana の公式を書き下せば

$$u_i = \int_{\partial D} \Gamma_{ih} t_h dS - \int_{\partial D} \Gamma_{lih} u_h dS + \int_{S_\varepsilon} \Gamma_{ih} t_h dS - \int_{S_\varepsilon} \Gamma_{lih} u_h dS \quad (11)$$

となる。ここに Γ_{ih} は弾性学の基本解であり、等方性の場合は次のように求められている：

$$\Gamma_{ih} = \begin{cases} -\frac{1}{8\pi\mu} (\Delta \delta_{ih} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \partial_i \partial_h) |\underline{x}-\underline{y}|^2 \log |\underline{x}-\underline{y}|, & (\text{平面ひずみ}) \\ \frac{1}{8\pi\mu} (\Delta \delta_{ih} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \partial_i \partial_h) |\underline{x}-\underline{y}|, & (3\text{次元}) \end{cases} \quad (12a, b)$$

ここに (λ, μ) は Lamé 定数。また、 Γ_{lih} は二重層核と呼ばれ

$$\Gamma_{lih}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\partial}{\partial y_l} \Gamma_{ik}(\underline{x}, \underline{y}) C_{klmh} n_m(\underline{y}) \quad (13)$$

と定義される。(11)において $\varepsilon = 0$ とすればクラック問題の解表示

$$u_i(\underline{x}) = \int_{\partial D} \Gamma_{ih}(\underline{x}, \underline{y}) t_h(\underline{y}) dS - \int_{\partial D} \Gamma_{lih}(\underline{x}, \underline{y}) u_h(\underline{y}) dS \\ - \int_S \Gamma_{ih}(\underline{x}, \underline{y}) [t_h^+(\underline{y}) - t_h^-(\underline{y})] dS + \int_S \Gamma_{lih}(\underline{x}, \underline{y}) [u_h^+(\underline{y}) - u_h^-(\underline{y})] dS \quad (14)$$

を得る²⁹⁾。ここに S 上の法線ベクトルの選び方は前述の規約に従った。式(14)と境界条件より積分方程式が得られ、これらを何らかの方法で解けば 式(14)によって変位場が求まり、式(14) を微分すれば応力、ひずみも求まる。式(14) から積分方程式を作る場合、境界条件を考えるならば、 ∂D 上で N 個、 S 上で $2N$ 個の方程式が必要である事がわかる。 ∂D では $\underline{x} \rightarrow \partial D$ として次の N 個の方程式を得る：

$$C_{ih}(\underline{x}) u_h(\underline{x}) = \int_{\partial D} \Gamma_{ih} t_h dS - \oint_{\partial D} \Gamma_{lih} u_h dS - \int_S \Gamma_{ih} (t_h^+ - t_h^-) dS \\ + \int_S \Gamma_{lih} (u_h^+ - u_h^-) dS, \quad (15)$$

ここに、 C_{ih} は ∂D の点 $\underline{x}$ 近傍での形状で定まる係数であり、 ∂D が滑らかなら $1/2$ である。 S に於いては式(15)を得た方法と同様にして次の N 個の方程式を得る：

$$[\delta_{ih} - C_{ih}(\underline{x})] u_h^+(\underline{x}) + C_{ih}(\underline{x}) u_h^-(\underline{x}) = \int_{\partial D} \Gamma_{ih} t_h dS - \int_{\partial D} \Gamma_{lih} u_h dS \\ - \int_S \Gamma_{ih} (t_h^+ - t_h^-) dS + \oint_S \Gamma_{lih} (u_h^+ - u_h^-) dS. \quad (16)$$

さらに N 個の方程式を得るためには式(14) から表面力を計算し、その S 上への極限值を評価する。その結果、点 $\underline{x}$ に於いて S が十分滑らかであれば方程式

$$(t_i^+ + t_i^-)/2 = \int_{\partial D} (T \Gamma_{ih}) t_h dS - \int_{\partial D} (T \Gamma_{lih}) u_h dS \\ - \oint_S (T \Gamma_{ih}) (t_h^+ - t_h^-) dS + p.f. \int_S (T \Gamma_{lih}) (u_h^+ - u_h^-) dS \quad (17)$$

が得られる^{1), 2)}。ここに、 $p.f.$ は有限部分、 T は表面力の作用素を表す。たとえば

$$(T \Gamma_{ih})(\underline{x}, \underline{y}) = C_{ipqr} n_p(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial x_q} \Gamma_{rh}(\underline{x}, \underline{y}) \quad (18)$$

応用上最も重要な $D = \mathbb{R}^N \setminus S$, $t^+ = t^- = t$ (given) の場合、積分方程式は式(17) 一本となり、これを解くと $u^+ - u^-$ が求まる。

動的問題も基本的には同様な扱いがなされる。表面力 = 0 のクラックによる入射波散乱問題に於ける結果のみ示せば、時間域及び周波数域ではそれぞれ

$$u_i(\underline{x}, t) = \iint_0^t \int_S G_{lih}(\underline{x}, \underline{y}, t-s) \psi_h(\underline{y}, s) dS_y ds + u_i^I(\underline{x}, t), \quad (19)$$

$$\widehat{u}_i(\underline{x}) = \int_S \widehat{\Gamma}_{lih}(\underline{x}, \underline{y}) \widehat{\psi}_h(\underline{y}) dS_y + \widehat{u}_i^I(\underline{x}), \quad (20)$$

なる解表示を得る。ここに $\psi = u^+ - u^-$ 。また、各々の場合の S 上の積分方程式は

$$0 = p.f. \iint_0^t \int_S (T G_{li})_{ih}(\underline{x}, \underline{y}, t-s) \psi_h(\underline{y}, s) dS_y ds + (T u)_i^I(\underline{x}, t), \quad (21)$$

$$0 = \text{p.f.} \int_S (T \hat{\Gamma})_{ih}(\underline{x}, \underline{y}) \hat{\psi}_h(\underline{y}) dS_y + (T \hat{u})_i^I(\underline{x}) \quad (22)$$

となる。なお $\hat{G}$ 、 $\hat{\Gamma}$ は各々式(6)、(9)の基本解であるが、その陽な形については文献参照³⁶⁾。

3.3 数値解析法

方程式(15)の ∂D 上での取り扱いは従来の積分方程式と同じなので、ここでは $D = \mathbb{R}^N \setminus S$ の場合に限定し、 S 上での積分方程式の数値解析法について考える。式(16)、(17)は基本的には次のような形をしている。

$$\int_S K(\underline{x}, \underline{y}) f(\underline{y}) dS_y = g(\underline{x}) \quad (23)$$

ここに K は核関数、 f は未知関数(即ち $\underline{u}^+ - \underline{u}^-$ または $\underline{t}^+ - \underline{t}^-$)、 g は既知関数である。いま、 S 上に適当な n 個の形状関数 $\Omega^J(\underline{x})$ を導入し

$$f = \sum f^J \Omega^J(\underline{x}) \quad (24)$$

と近似する。ここに f^J は未知パラメータである。このとき S 上に n 個の点 $\underline{x}^I$ ($I=1, \dots, n$)を適当に取れば式(23)は

$$\sum \int_S K(\underline{x}^I, \underline{y}) \Omega^J(\underline{y}) dS_y f^J = g(\underline{x}^I) \quad (25)$$

と離散化される。積分 $\int_S K(\underline{x}^I, \underline{y}) \Omega^J(\underline{y}) dS_y$ を適当な方法で計算すれば、式(25)は f^J に関する代数方程式となり、これを解くと f の近似解が求まる。また、 $[u]$ を近似する形状関数 Ω^I としてクラックティップで $r^{\frac{1}{2}}$ (r : ティップからの距離)に比例する特異性を持つものを導入すれば、応力拡大係数を直接求めることもできる。ただし K は一般に非常に特異性の強い核であり、特に $T \hat{\Gamma}$ の積分は有限部分の意味でのみ収束する^{31), 37)}。それゆえ式(25)の係数評価には注意が必要である。今日用いられている数値解析法もこの係数評価の方法によって、直接積分の方法と正則化の方法に分類される。

3.3.1 直接積分の方法^{1), 2), 31), 34)}

静弾性の場合、 S が平面、線分等の集まりで近似でき、しかも Ω^I として簡単なものを使い得る時は、式(25)の積分を直接解析的に評価する事が出来る。特に2次元静弾性の場合の解析的表現は文献1), 2)に詳しい。また動弾性の場合も、 K の特異性の主要部は静弾性の K と同じなので、静弾性に於ける結果に高々 Gauss 積分で評価可能な項を付け加える事により必要な積分を求める事が出来る。

直接積分の方法は簡単な問題では有効であり、具体例にみるように高精度の解析に成功した例も報告されている。しかし、形状関数として高次のものを選べないこと、及び近似されたクラック形状が滑らかでなくなる事が原因となって、数値解に物理的に意味のない特異性が導入される事になる。この為、解が汚染される可能性があることも指摘されている³⁵⁾。なお、有限部分の数値積分公式を使う方法も試みられている³⁸⁾。

3.3.2 正則化の方法^{29), 30), 32), 33), 35)}

簡単のため、2次元静的面外変形問題を考える。この時、場の方程式は Laplacian となり T は本質的に $\partial/\partial n$ となる。特にクラックが無限遠から一様なせん断力 τ_{23} をうける x_1 軸上の表面力 $=0$ の直線クラックであれば、積分方程式は

$$\frac{\tau_{23}}{\mu} = \text{p.f.} \int_S [\partial/\partial y_2]^2 G(\underline{x}, \underline{y}) \psi(\underline{y}) dS_y, \quad (26)$$

ここに、 $G = -\frac{1}{2\pi} \log|\underline{x} - \underline{y}|$ 。ところが、 $\underline{x} \neq \underline{y}$ において $\Delta G(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ であることから上式は、

$$\begin{aligned} &= -\text{p.f.} \int_S [\partial/\partial y_1]^2 G(\underline{x}, \underline{y}) \psi(\underline{y}) dS_y = \int_S \frac{\partial}{\partial y_1} G(\underline{x}, \underline{y}) \frac{\partial}{\partial y_1} \psi(\underline{y}) dS_y \\ &= -\text{p.f.} \int_S G(\underline{x}, \underline{y}) [\partial/\partial y_1]^2 \psi(\underline{y}) dS_y \end{aligned} \quad (27)$$

と変形できる。ここに最後の p.f. は $(\partial/\partial y_1)^2 \psi$ の tip での特異性によるもので、核の特異性は上から順に $|\underline{x} - \underline{y}|^{-2}$ 、 $|\underline{x} - \underline{y}|^{-1}$ 、 $\log|\underline{x} - \underline{y}|$ と次第に弱くなっている。このようにして核の特異性を下げることを正則化と呼ぶ。正則化を行えば、式(25)に於ける係数の数値的評価が容易になり、とくに式(27)の最後の式を用いるならば、tip での積分を除いて全ての積分を普通の数値積分公式で評価することもできるようになる。なお、ここでは特殊例のみ示したが、種々のクラック問題に於ける正則化公式が書き下されており、特に Nishimura らは正則化と応力関数の関係について言及している³⁵⁾。

正則化の方法は具体的な数値積分法を与えるだけでなく、次のような応用も有している。

(a) 正則化は直接積分の方法に於いても有効である。例えば式(27)の例で、 Ω^I を区分一定、即ち

$$\Omega^I(\underline{x}) = H(\underline{x} - \underline{x}_1) - H(\underline{x} - \underline{x}_2) \quad (28)$$

とおけば

$$\begin{aligned} \text{p.f.} \int_S [\partial/\partial y_2]^2 G(\underline{x}, \underline{y}) \Omega^I dS &= \partial/\partial y_1 G(\underline{x}, \underline{y}) \big|_{y_1=x_1, y_2=0} \\ &\quad - \partial/\partial y_1 G(\underline{x}, \underline{y}) \big|_{y_1=x_2, y_2=0} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ここに、 H は Heaviside の step関数である。

(b) 正則化公式を用いると、形状関数選択によって数値解に物理的意味のない特異性が導入されることが容易に理解できる。例えば式(27)より ψ に C^1 要素を用いない限り S 上での traction は最低 log オーダーの特異性を生ずる事が解る。従って例えば区分 linear 近似で選点法を用いる事は一般に不可能である。

以上を考慮して、区分一定系の形状関数の使用、または C^1 要素、ないしはその類似を用いた正則化の方法が試みられている^{29), 33), 35)}。また変分法を用いて要素の連続性の要請を緩和する試みも成されている³²⁾。ただし C^1 要素を用いた場合、3次元解析がかなり複雑になるのがこの方法の欠点である。

4. 数値解析例

4. 1 2次元静的問題^{1), 2)}

ここではコンクリートの破壊問題に対する応用例を紹介する。破壊力学をコンクリートに適用する試みの中心的課題はフラクチャープロセスゾーン(FPZ)を力学モデルで表し、そのモデルを用いて破壊現象を予測することにある。FPZとはコンクリート・岩石・セラミックス等の脆性材料においてクラック先端部に存在する領域であり、内部ではマイクロクラックの発生・成長と、骨材などによる巨視的クラック面での応力伝達が生じている (Fig.2(a))。その力学モデルとして Fig.2(b) に示す Dugdale型モデルを考える。表面で応力伝達を生じているクラックを考え、伝達応力はクラック開口変位と Fig.2(c) の関係を満たすものとする。FPZ先端で応力が有限値をとるという条件とともに、このモデルを

境界積分方程式法解析プログラムに取り入れれば、任意の供試体におけるFPZの成長を解析できる。一例として Fig. 3にCLWL供試体に対する解析結果と実験結果との比較を示す。このような解析に基づき、何故コンクリートの曲げ強度が引張強度の2倍程度となるのか、曲げ強度の寸法効果の原因は何かといった基本的な問題に対する解答を得る試みがなされている。^{1), 2)}

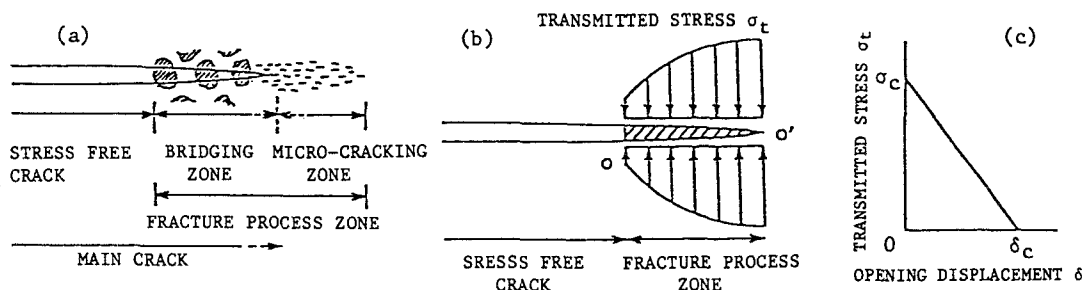


Fig.2 (a) Fracture process zone, (b) Dugdale-type model, and (c) Tension-softening relation

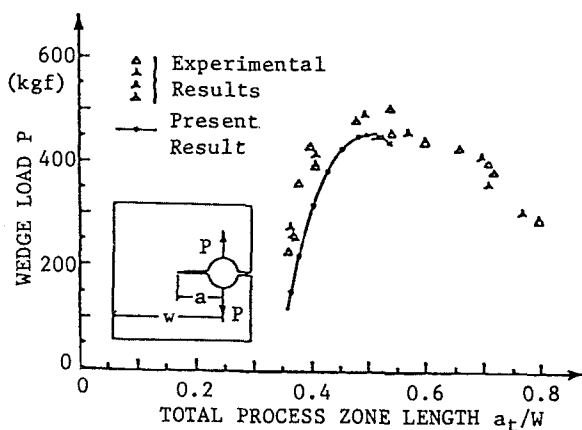


Fig.3 Wedge load vs. process zone length (CLWL specimen)

4. 2 2次元動的問題

4.2.1 周波数域における解析³⁹⁾

Fig.4 は、半無限弾性体中の内部クラックに時間調和な Rayleigh 波が入射したときの、遠方における反射 Rayleigh 波 $\tilde{u}^{bs}$ と透過 Rayleigh 波 $\tilde{u}^{tr}$ の水平方向成分の振幅を、クラックの幾何パラメータ a/b を横軸にとりプロットしたものである。クラックは $x_1=0, a \leq x_2 \leq b$ の位置にあり、 $b/k_L=1, 3, 5$ (k_L : P 波の波数) の 3 通りの波数が考えられている。境界積分方程式により得られた解は、□、○などの記号で、また Achenbach と Brind⁴⁰⁾ の解が実線で示されている。なお、この解析では直接積分の方法による数値解法が用いられ、ポアソン比は $1/3$ とした。

4.2.2 時間域における解析^{41), 42)}

Fig.5 における実線は、無限弾性体中のクラックに時間的にステップ応力を示す SH 波が入射した時のクラック開口変位の経時変化を示したものである。入射角は 30° (図参照) で、入射波がクラック左端に到達した時刻を $t=0$ としている。クラックの左端よりしだいにクラックが開く様子がよく

わかる。Fig.5 における記号 $\square$ は、 $ak_T=20$ ($2a$: クラック長さ、 k_T : SH 波の波数) までの周波数域で求められた解を FFT により逆変換して得られた過渡的解である。

Fig.6 は、異なる半無限媒質のインターフェースにおけるクラックにステップ応力を持った SH 波が垂直入射した時の応力拡大係数の経時変化を示したものである。上半面と下半面における波速とせん断剛度の比は、 $c_1/c_2=2$ 、 $\mu_1/\mu_2=1$ とし、入射波は下半面より入射している。Fig.6 における記号 $\circ$ は、境界積分方程式により得られた解で、Takei ら⁴³⁾ による解が実線で示されている。また、この項における数値解析例は、いずれも 3.3.2 で説明した正則化の方法による解法で求められている。

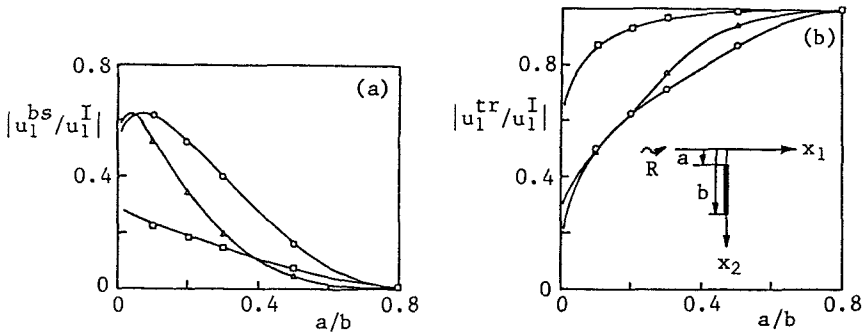


Fig.4 Far-field amplitudes of (a) back-scattered and (b) forward-transmitted waves vs. a/b . ($\square$:-: $bk_L=1$, $\circ$:-: $bk_L=3$, $\triangle$:-: $bk_L=5$)

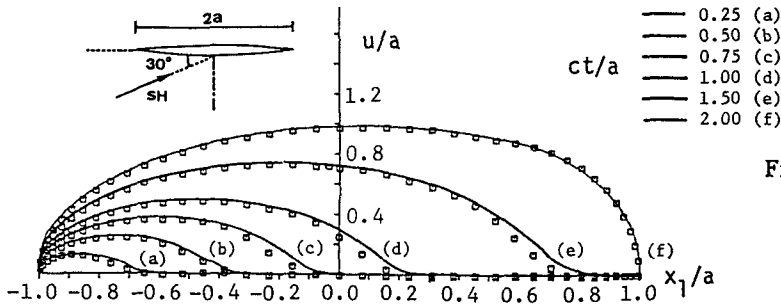


Fig.5 Crack opening displacements

4.3 3次元静的問題³⁵⁾

遠方で一様な引張応力 p_0 を受ける無限弾性体中の楕円クラックを考える。クラックの形状は、 $x_1 = a \cos \theta$ 、 $x_2 = b \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) で与えられ、 x_3 方向に引張応力を受けるものとする。また、ポアソン比は 0.3 とした。Fig.7 は、いくつかの楕円クラックに対して求められた応力拡大係数を Irwin⁴⁴⁾ による厳密解と比較したものである。なお、この解析では正則化の方法による数値解法が用いられた。

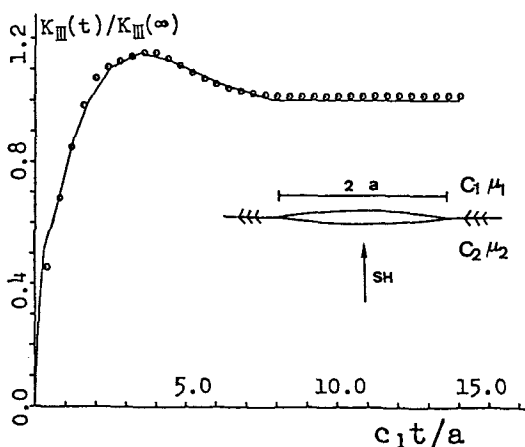


Fig.6 Stress intensity factor K_{III} for the interface crack

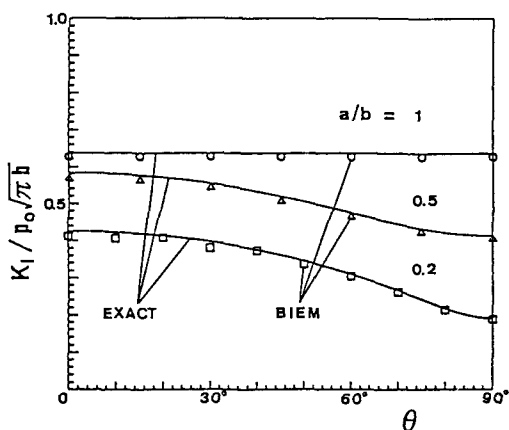


Fig.7 Stress intensity factors K_I for elliptical cracks

4. 4 3次元動的問題

4.4.1 周波数域における解析³⁵⁾

無限弾性体中の正方形クラックによる波動散乱問題を考える。クラックの辺長は $2a$ であり、クラック面に垂直に時間調和な平面P波が入射するものとする。ただし、入射波の応力マグニチュードを p_0 とし、ポアソン比を 0.2 とした。Fig.8 は、クラック縁に沿う応力拡大係数 K_I の分布を $ak_L = 0.11$ 、 0.81 、 1.01 の3通りの波数に対して求めたものである。なお、実線は Itou⁴⁵⁾ による解である。

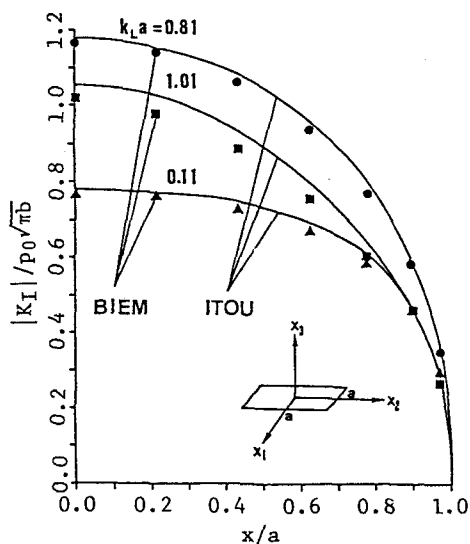


Fig.8 Stress intensity factors $|K_I|$ for the square crack

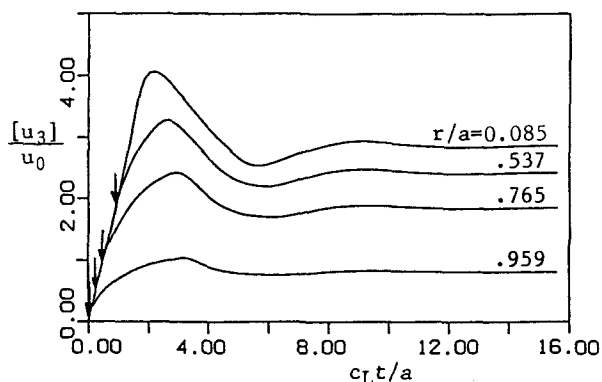


Fig.9 Crack opening displacements for the penny-shaped crack

4.4.2 時間域における解析³⁴⁾

無限弾性体中の3次元クラックによる波動散乱問題を時間域における境界積分方程式によって解析した例を示す。数値解析法は、3.3.1で示した直接積分の方法を用いた。クラックは、 $x_3=0$ 面内にある半径 a の円形クラックであり、クラック面に対して垂直に次式で表されるP波が入射するものとする。

$$u_i^I = u_0 \delta_{3i} \frac{x_3 + c_L t}{a} H(x_3 + c_L t)$$

ただし、 c_L はP波速度である。なお、ポアソン比は、0.25とした。Fig.9は、クラック面上のいくつかの点(図中 r はクラック中心からの距離を表す。)におけるクラック開口変位の経時変化を表したものである。また、図中の矢印はクラック縁からの回折波の到達時間を示している。回折波が到達するまで開口変位は、入射波と同様な線形的挙動を示している。その後、開口変位はクラック面を伝播する波によって振動を繰り返しながら静的解に漸近している。

参 考 文 献

- 1) Horii, H. :BIEM for crack problems and application to the fracture process zone in concrete, ceramics and rock, In: Boundary Element Methods in Applied Mechanics, Eds. Tanaka, M. and Cruse, T., pp.129-138, 1988.
- 2) 堀井秀之: 境界積分方程式法によるクラック問題の解析とフラクチャープロセスゾーン問題への応用, Applied Mechanics Group, Report88-3, Dept.of Civil Eng., University of Tokyo, 1988.
- 3) Love, A.E.H. :A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Pub., New York, 1944.
- 4) Kupradze, V.D. :Potential Methods in the Theory of Elasticity, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- 5) Hess, J.L. :Calculation of potential flow about bodies of revolution having axes perpendicular to the free-stream direction, J. Aerospace Sci., Vol.29, pp.726-742, 1962.
- 6) Shaw, R.P. and Friedman, M.B. :Diffraction of pulses by deformable cylindrical obstacles of arbitrary cross section, Proc. 4th US National Congress of Applied Mechanics, pp.371-379, 1962.
- 7) Friedman, M.B. and Shaw, R.P. :Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross section, J. Appl. Mech., Vol.29, pp.40-46, 1962.
- 8) Jaswon, M.A. and Ponter, A.R. :An integral equation solution of the torsion problem, Proc. Roy. Soc. London, Ser.A, Vol.273, pp.237-246, 1963.
- 9) Jaswon, M.A. :Integral equation methods in potential theory.I, Proc. Roy. Soc. London, Ser.A, Vol.275, pp.23-32, 1963.
- 10) Symm, G.T. :Integral equation methods in potential theory. II, Proc. Roy. Soc. London, Ser.A, Vol.275, pp.33-46, 1963.
- 11) Banaugh, R.P. and Goldsmith, W. :Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape, J. Acoust. Soc. Am., Vol.35, pp.1590-1601, 1963.
- 12) Banaugh, R.P. and Goldsmith, W. :Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape, J. Appl. Mech., Vol.30, pp.589-597, 1963.
- 13) Rizzo, F.J. :An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quart. Appl. Math., Vol.25, pp.83-95, 1967.
- 14) Rizzo, F.J. :A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem, Int. J. Solids Structures, Vol.4, pp.1161-1179, 1968.
- 15) Cruse, T.A. and Rizzo, F.J. :A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem.I, J. Math. Anal. and Appl., Vol.22, pp.244-259, 1968.
- 16) Cruse, T.A. :A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. II, J. Math. Anal. and Appl., Vol.22, pp.341-355, 1968.
- 17) Cruse, T.A. :Numerical Solutions in three dimensional elastostatics, Int. J. Solids Structures, Vol.5, pp.1259-1274, 1969.
- 18) Lachat, J.C. and Watson, J.O. :Effective numerical treatment of boundary integral equations :A formulation for three-dimensional elastostatics, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.10, pp.991-1005, 1976.

- 19) Rizzo, F.J. : 境界要素法 その初期の歴史=私見, 数理科学, No.296, pp.62-71, 1988.
- 20) Cruse, T.A. and Vanburen, W. : Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack, *Int. J. Fract. Mech.*, Vol.7, pp.1-15, 1971.
- 21) Cruse, T.A. : Application of the boundary-integral equation solution method in solid mechanics, In: *Variational Methods in Engineering*, Vol.2, Session 9, pp.9/1-9/29, Dept. of Civil Eng., Univ. of Southampton, 1972.
- 22) Cruse, T.A. : Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis, *Computers and Structures*, Vol.3, pp.509-527, 1973.
- 23) Cruse, T.A. : An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis, *Computers and Structures*, Vol.4, pp.741-754, 1974.
- 24) Snyder, M.D. and Cruse, T.A. : Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates, *Int. J. Fract.*, Vol.11, pp.315-328, 1975.
- 25) Cruse, T.A. : Boundary-integral equation method for three-dimensional elastic fracture mechanics analysis, AFOSR-TR-75-0813, pp.1-52, 1975.
- 26) Cruse, T.A. and Meyers, G.J. : Three-dimensional fracture mechanics analysis, J. Structural Division, ASCE, Vol.103 (ST2), pp.309-320, 1977.
- 27) Cruse, T.A. : Two-dimensional BIE fracture mechanics analysis, *Appl. Math. Modelling*, Vol.2, pp.287-293, 1978.
- 28) Cruse, T.A. and Wilson, R.B. : Advanced applications of boundary-integral equation methods, *Nuclear Engineering and Design*, Vol.46, pp.223-234, 1978.
- 29) Weaver, J. : Three dimensional crack analysis, *Int. J. Solids Structures*, Vol.13, pp.321-330, 1977.
- 30) Sladek, V. and Sladek, J. : Transient elastodynamic three-dimensional problems in cracked bodies, *Appl. Math. Model.*, Vol.8, pp.2-10, 1984.
- 31) Takakuda, K. Koizumi, T. and Shibuya, T. : On integral equation methods for crack problems, *Bull. JSME*, Vol.28, pp.217-224, 1985.
- 32) Nedelec, J.C. : The double layer potential for periodic elastic waves in R^3 , In: *Boundary Elements*, Ed. Du, Q., pp.439-448, Pergamon, Oxford, 1986.
- 33) Polch, E.Z., Cruse, T.A. and Huang, C.-J. : Traction BIE solutions for flat cracks, *Compt. Mech.*, Vol.2, pp.253-267, 1987.
- 34) Hirose, S. and Achenbach, J.D. : Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack, *Int. J. Numer. Methods Eng.* (submitted for publication)
- 35) Nishimura, N. and Kobayashi, S. : A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problem, *Comput. Mech.* (to appear)
- 36) Kobayashi, S. : Elastodynamics, In: *Boundary Element Methods in Mechanics*, Ed. Beskos, D.E., pp.192-255, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- 37) Nishimura, N. and Kobayashi, S. : On the behaviour of elastic potentials, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.*, Vol.49, pp.294-307, 1987.
- 38) Kutt, H.R. : The numerical evaluation of principal value integrals by finite part integration, *Num. Math.*, Vol.24, pp.205-210, 1975.
- 39) Hirose, S. : A study on direct and inverse scattering problems of elastic waves, Doctoral Dissertation, Kyoto University, 1987.
- 40) Achenbach, J.D. and Brind, R.J. : Scattering of surface waves by a sub-surface crack, *J. Sound Vibration*, Vol.76, pp.43-56, 1981.
- 41) Nishimura, N., Kobayashi, S. and Okada, M. : A time domain BIE crack analysis, In: *Theory and Applications of Boundary Element Methods (Proc. 1st Japan-China Symp. BEM)*, Eds. Tanaka, M. and Du, Q.H., pp.85-94, Pergamon Press, Oxford, 1987.
- 42) Nishimura, N. Guo, Q.C. and Kobayashi, S. : Elastodynamic crack analysis by BIEM, *Proc. First Joint Japan/US Symp. BEM*, Tokyo, 1988. (to appear)
- 43) Takei, M., Shindo, Y. and Atsumi, A. : Diffraction of transient horizontal shear waves by a finite crack at the interface of two bonded dissimilar elastic solids, *Eng. Fracture Mech.*, Vol.16, pp.799-807, 1982.
- 44) Irwin, G.P. : Crack-extension force for a part-through crack in a plate, *J. Appl. Mech.*, Vol.29, pp.651-654, 1962.
- 45) Itou, S. : Dynamic stress concentration around a rectangular crack in an infinite elastic medium, *ZAMM*, Vol.60, pp.381-388, 1980.

(1989年10月12日受付)