

平面及び薄板の曲げ問題における切欠きの力学

Notch Mechanics for Plane and Thin Plate Bending Problems

* * *

長谷部宣男 飯田字朗 中村卓次

BY Norio HASEBE, Jiro IIDA and Takuji NAKAMURA

This paper describes the summary of notch mechanics based on the linear elasticity. The symmetric V-shaped notches with sharp or round corner are studied. The plane elastic problem and thin plate bending problem are considered for the free and the fixed boundary conditions. The following matters are investigated: the stress distributions near the angular corner; general expression of stress concentration at the round corner; the relationship between the intensity of corner and the stress concentration; and stress intensity factor of a crack initiating from the tip of notch. The notch mechanics is connected with the crack mechanics by the expression of stress intensity factor.

1. まえがき

応力集中は、切欠き、部材断面急変部、部材交差部、変位拘束部などの構造的、あるいは材料中の空隙、欠陥、介在物の存在などの材料的な原因による応力の不均一性によって生ずる。クラック発生の多くが、これらの応力集中に因ることから、応力集中部の解析は、実験的にも解析的にも古くから多くなされている。その成果は単行本にもまとめられている (Neuber²⁰⁾, Peterson²¹⁾, 西田²²⁾, Savin³⁷⁾)。Williams^{1,13)} は、固有値展開により、鋭い隅角部先端の応力を表わす式を誘導している。西田²²⁾ や Heywood²³⁾ は、応力集中部の切欠き角度、深さ、切欠き先端の曲率半径と応力集中係数との関係を光弾性実験等より求めている。平野²⁴⁾ は、複雑な形状の孔や切欠きを、等価な楕円に置き換えることによって、応力集中をより簡単に求める方法、Neuber²⁰⁾ は、浅い切欠きと深い切欠きから中間の切欠き深さに対する応力集中値を近似する方法 (三角則) を提案している。Carpinteri²⁾ は、隅角部先端の応力分布の特異性について、一般化した応力拡大係数を定義し、切欠きの相似則を実験をもとに研究している。西谷³⁾ は、二つの切欠きにおいて、切欠きの曲率半径と最大応力が同じならば、切欠き近傍に生ずる現象が同じであると述べている。しかし応力集中に関する解析の多くは、個々の形状、荷重条件に対するもので、応力集中一般について成り立つ法則はあまり多く見い出されていない。

* 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 工博 名古屋高速道路公社 (〒460 名古屋市中区丸の内1-16-15)

*** 工修 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

又、近年線形破壊力学の利用と共に多くの応力拡大係数が求められ、その結果もハンドブック(Tadaら²⁵⁾、Sih²⁶⁾、Rooks and Cartwright²⁷⁾、Murakamiら²⁸⁾)にまとめられている。その中には応力集中部から発生したクラックの解析も多く示されている。Lukas and Klesnil⁴⁾、中井ら⁵⁾は応力集中部の曲率半径を用いた応力拡大係数を求める近似式を、Williams and Isherwood⁶⁾は、円孔の場合で、クラック発生前の応力分布を用いて応力拡大係数を求める方法を提案している。Kobayashi⁷⁾は、等価な長さのクラックを仮定し、クラック発生前の応力分布をその仮定したクラックに作用させた時の応力拡大係数を近似値とする方法を示している。しかし応力集中部に発生したクラックについて成り立つ一般的な法則も多くは見い出されていないようである。

本報告は、主に我々が研究してきた等方性の線形弾性論に基づく切欠きの力学の一連の結果を中心にまとめたものである。応力集中は一般に局所的現象である。したがって応力集中箇所に注目すると形状的にその多くは、先端に丸みを有するV字形状にモデル化出来るであろう。このときV字形隅角部の角度とその先端の曲率半径がその形状を表す因子となる。ここでは隅角部2等分線に対称な形状で、平面弾性問題、面外変形を受ける薄板の問題を扱う。境界条件として自由境界、固定境界の場合を考える。自由境界は、切欠きや孔などの境界条件の場合に、固定境界は、構造的に造られた固定辺や、異種材料で一方が剛な材料の接合部、剛体介在物などの境界条件に相当している。固定境界は、自由境界に対するもう一方の極限の場合で、異種材料の弾性体の接合はその中間であろう。任意の応力状態は隅角部2等分線に対称な応力状態と逆対称な応力状態に分けられるので、それぞれの状態で考察する。鋭い隅角部付近の応力分布、丸みを有する隅角部先端の応力集中の一般表示式、隅角部の応力の強さと応力集中との関係、鋭いまたは、丸みのある切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を求める式など、切欠き一般について成り立つ関係を述べる。又、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を求める式によって、クラックの力学と切欠きの力学が結びつけられる。

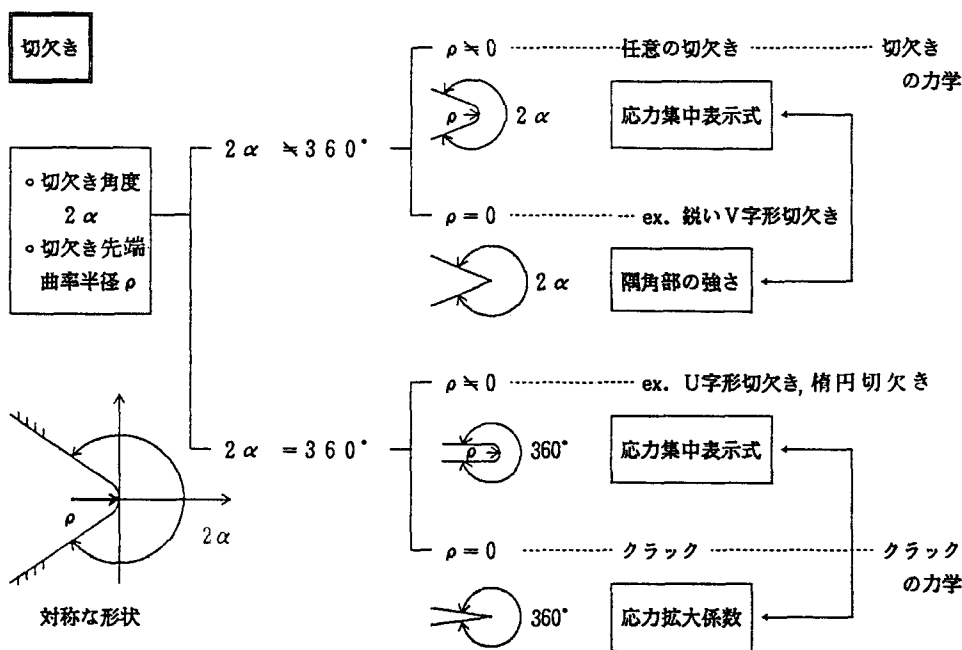


図-1 V字形切欠き因子間の関係

2. 切欠きの角度と、先端の丸みの曲率半径を考えた切欠き

図-1に示すように切欠きの角度を 2α 、切欠き先端に丸みのある場合、その曲率半径を ρ とする。 2α と ρ を切欠き因子とし図-1のように分類し、それぞれの形状について平面問題で自由境界、固定境界、薄板の曲げの問題で自由境界、固定境界の場合について考察する。

2-1 平面問題で自由境界の場合

平面弾性問題で、自由境界、切欠きの2等分線に対称な応力状態、そして切欠き先端が鋭い場合と丸みを有する場合のV字形切欠きを考える。

[鋭い切欠きの場合]

一般に、鋭いV字形切欠き先端付近の応力成分は、極座標を用いて次式のように表わされる¹⁾。

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\sum (m_j+1)r^{m_j}\{B_j(m_j-2)\cos m_j\theta + D_j(m_j+2)\cos(m_j+2)\theta\} \\ \sigma_\theta &= \sum (m_j+1)(m_j+2)r^{m_j}\{B_j\cos m_j\theta + D_j\cos(m_j+2)\theta\} \\ \tau_{r\theta} &= \sum (m_j+1)r^{m_j}\{B_j m_j \sin m_j\theta + D_j(m_j+2)\sin(m_j+2)\theta\}\end{aligned}\quad (1)$$

なお、 $B_j\cos m_j\alpha + D_j\cos(m_j+2)\alpha = 0$ が成り立つ。

ここで、 r, θ は切欠き先端からとった極座標、 B_j, D_j は荷重条件によって決まる係数、 $m_j(j=1,2,3,\dots)$ は次の方程式の根である。

$$(m+1)\sin 2\alpha + \sin\{2(m+1)\alpha\} = 0 \quad (2)$$

式(2)より $m_j(j=1,2,3,\dots)$ の値は、角度 2α のみに依存するのが分かる。表-1に、式(2)の最初の2根を示す。 $2\alpha \geq 180^\circ$ の場合どの角度でも第1根 m_1 は、 $0 \geq m_1 \geq -0.5$ である。これより式(1)の第1項は、 r が小さい時、第2項以降に比べて大きな値になる。よって第1項が重要になる。特に $\theta = 0$ 、つまり対称軸上の応力成分 σ_θ について考えると式(1)より次式を得る。

$$\begin{aligned}\sigma_\theta(r) &= \sum (m_j+1)(m_j+2)r^{m_j}(B_j + D_j) \\ &\equiv f_\theta r^{m_1}/\sqrt{2} + f_\theta r^{m_2} + f_\theta r^{m_3} + \dots\end{aligned}\quad (3)$$

ここで、第1項の係数 f_θ を「隅角部の応力の強さ」と定義する。 $\sqrt{2}$ は応力拡大係数との対応の関係で付けている。 r が小さいとき、第1項のみで応力値が表わし得るので、この係数は切欠きの1つの因子となる。その求め方は文献(8)に詳しい。切欠き角度 360° の場合(クラックに相当)も式(3)のように表わせるが、一般には次式のように表わして、係数 K_1 を応力拡大係数と定義している¹⁹⁾。

$$\sigma_\theta(r) = K_1/\sqrt{2\pi r} + f_2 + f_3\sqrt{r} + \dots \quad (4)$$

よって、式(3)の係数 f_θ 、つまり隅角部の応力の強さは、クラックの応力拡大係数に相当し、任意の角度の切欠きに拡張した考え方である。さらに、 $\theta = 0$ に対称な荷重条件で f_θ が分かっている場合、式(3)の $\sigma_\theta(r)$ の第1項の係数から、係数 B_1, D_1 が分かる。したがって式(1)の第1項より切欠き先端付近の任意点の任意の応力成分が分かる。逆に切欠き先端付近の任意点の応力が分かれば、 B_1, D_1 が分かるので f_θ の値がわかる。

表-1 式(2)及び、式(33)の m_1, m_2 の値

2α	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000
190	-0.09996	1.00180
200	-0.18130	1.01826
210	-0.24803	1.10629 ± i 0.09610
220	-0.30284	1.00565 ± i 0.19838
230	-0.34773	0.91527 ± i 0.23695
240	-0.38427	0.83355 ± i 0.25225
250	-0.41372	0.75925 ± i 0.25400
260	-0.43716	0.69141 ± i 0.24634
270	-0.45552	0.62926 ± i 0.23125
280	-0.46960	0.57214 ± i 0.20945
290	-0.48015	0.51955 ± i 0.18048
300	-0.48778	0.47103 ± i 0.14185
310	-0.49307	0.42623 ± i 0.08316
320	-0.49651	0.46701
330	-0.49855	0.20296
340	-0.49957	0.12541
350	-0.49995	0.05884
360	-0.50000	0.00000

[切欠き先端に丸みのある場合]

切欠き先端に丸みのある場合の2等分線上の応力集中値は、一般に丸みの曲率半径 ρ を用いて次式のように表わされる⁹⁾。

$$\text{応力集中値} = \sum h_j \rho^{m_j} \quad (5)$$

ここで、 m_j は式(2)の根であり、 h_j は荷重、形状によって決まる係数である。いま2等分線上の接線方向の最大応力を考え、それを $\sigma_{\theta \max}$ とおくと、式(5)より次式のように表わされる。

$$\sigma_{\theta \max} = h_{\theta 1} \rho^{m_1} + h_{\theta 2} \rho^{m_2} + h_{\theta 3} \rho^{m_3} + \dots \quad (6)$$

$0 \geq m_1 \geq -0.5$ であるので、曲率半径 ρ が小さいとき、第1項は第2項以降に比べて大きな値となる。つまり第1項のみで応力集中値が表わされる。したがって第1項の係数 $h_{\theta 1}$ は応力集中に関する1つの因子となる。また、式(6)の収束は速いので、実用的には始めの2～3項で十分な精度を有する応力集中値の式となる⁹⁾。

29, 30)。

[隅角部の応力の強さと応力集中との関係]

式(3)の f_{θ} と式(6)の h_{θ} は、次式のように関係づけられる⁹⁾。

$$f_{\theta} / h_{\theta} = C_{\theta} \quad (7)$$

式(7)の関係は、切欠きの角度のみに依存し、荷重条件によらない。よってこの式より f_{θ} 、 h_{θ} のどちらか一方の係数が既知の時、他方の値が計算できる。この C_{θ} を表-2に示す。

楕円形や、U字形のような先端の丸みの曲率半径 $\rho \rightarrow 0$ のとき、形状→クラックとなる切欠きは、隅角部角度 $2\alpha = 360^\circ$ の場合で、クラックの応力拡大係数と応力集中値とは、次式で関係づけられる。

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} 1/2 (\sqrt{\pi \rho} \sigma_{\max}) \quad (8)$$

式(8)より、モードIのクラックの応力拡大係数が、応力集中の式から計算できる。この式はクラックの応力拡大係数を求める一つの方法でもある。また、式(6)の h_{θ} の値が既知ならば、 $K_I = \sqrt{\pi} h_{\theta} / 2$ である。

Hasebe and Kutanda¹⁰⁾は、応力集中の式(6)を用いて応力拡大係数を求める一方法を提案している。またいくつかの応力集中値と ρ の値が分かっているとき、式(6)の始めの数項(2、3項)を用いた応力集中表示式を作ることができる。これによって任意の ρ の応力集中値を求めることができる。この応力集中の式または、 $\sigma_{\theta \max}$ が ρ の関数として分かっているとき f_{θ} は次式から求められる。

$$f_{\theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} C_{\theta} (\rho^{-m_1} \sigma_{\theta \max}) \quad (9)$$

もちろん、切欠き角度 360° (つまりクラック)の場合、式(9)は式(8)と同じ内容である。式(8)の係数 $1/2$ が表-2の $2\alpha = 360^\circ$ の場合の C_{θ} の値0.5に相当する。式(7)、(9)によって任意の角度の鋭い切欠きにおける隅角部の応力の強さと丸みのある場合の応力集中値とが関係づけられたので、たとえば小さな ρ の応力集中値がわかれば h_{θ} がわかり、 f_{θ} がわかる。よって式(1)の B_1 、 D_1 がわかるので鋭い隅角部付近の応力分布がわかる。またその逆もいえる。

表-2 式(7)の C_{θ} の値

2α	C_{θ}	2α	C_{θ}
180°	1.414	280°	0.506
190	0.952	290	0.503
200	0.775	300	0.502
210	0.676	310	0.501
220	0.615	320	0.500
230	0.576	330	0.500
240	0.549	340	0.500
250	0.531	350	0.500
260	0.519	360	0.5
270	0.512		

2-2 平面問題で固定境界の場合

平面弾性問題で、固定境界、そして隅角部2等分線に対称及び逆対称な応力状態、形状は先端が鋭い場合と丸みを有する場合のV字形状を考える。まず対称な応力状態を考える。

[鋭い隅角部の場合]

一般に、鋭い隅角部先端付近の応力成分は次式のように表わされる¹⁾。

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\sum (m_j+1)r^{m_j} \{ \{ (m_j+2)A_j - 2C_j \} \cos m_j \theta + C_j m_j \cos (m_j-2) \theta \} \\ \sigma_\theta &= \sum (m_j+1)r^{m_j} \{ \{ (m_j+2)A_j + 2C_j \} \cos m_j \theta + C_j m_j \cos (m_j-2) \theta \} \\ \tau_{r\theta} &= \sum (m_j+1)r^{m_j} \{ (m_j+2)A_j \sin m_j \theta + C_j m_j \sin (m_j-2) \theta \}\end{aligned}\quad (10)$$

なお $C_j = \{-A_j(m_j+2)\sin(m_j+2)\alpha\}/\{(m_j+\nu+1)\sin m_j \alpha\}$ が成り立つ。

ここで、 r 、 θ は隅角部先端からとった極座標、 A_j 、 C_j は荷重条件によって決まる係数、 m_j ($j=1,2,3,\dots$) は次の方程式の根である。

$$\begin{aligned}\kappa \sin \{ (m+1) 2\alpha \} - (m+1) \sin 2\alpha &= 0 \\ \kappa &= (3-\nu) / (1+\nu)\end{aligned}\quad (11)$$

ν はポアソン比である。表-3に、式(11)の最初の2根を示す。

特に $\theta=0$ 、つまり対称軸上の応力成分 σ_r について考えると次式を得る。

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\sum (m_j+1)r^{m_j} \{ (m_j+2)A_j + (m_j-2)C_j \} \\ &\equiv f_{r1}r^{m_1} + f_{r2}r^{m_2} + f_{r3}r^{m_3} + \dots\end{aligned}\quad (12)$$

ここで自由境界の場合と同様、第1項の係数 f_r を「隅角部の応力の強さ」と定義する。 σ_r が法線方向応力成分であるので f_r は剥離に対する応力の強さを表わす。 r が小さいとき、式(12)の第1項のみで応力値が表わされるので固定境界の場合もこの係数は、隅角部の1つの因子となる。その求め方は文献(11)に示されている。

表-3 式(11)の m_1, m_2 の値

2α	$\kappa = 1$		$\kappa = 5/3$		$\kappa = 2$		$\kappa = 3$	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
190	0.00000	0.79893	-0.02185	0.83667	-0.02713	0.84619	-0.03579	0.86217
200	0.00000	0.63053	-0.04340	0.69804	-0.05342	0.71474	-0.06955	0.74270
210	0.00000	0.48581	-0.06531	0.57959	-0.07950	0.60187	-0.10186	0.63881
220	0.00000	0.35950	-0.08824	0.47836	-0.10591	0.50489	-0.13317	0.54830
230	0.00000	0.24804	-0.11275	0.39224	-0.13307	0.42176	-0.16379	0.46940
240	0.00000	0.14891	-0.13931	0.31962	-0.16127	0.35084	-0.19394	0.40063
250	0.00000	0.06022	-0.16812	0.25909	-0.19059	0.29068	-0.22371	0.34068
260	-0.01953	0.00000	-0.19905	0.20922	-0.22093	0.23989	-0.25311	0.28838
270	-0.09147	0.00000	-0.23166	0.16847	-0.25199	0.19716	-0.28205	0.24270
280	-0.15656	0.00000	-0.26524	0.13525	-0.28334	0.16117	-0.31042	0.20267
290	-0.21556	0.00000	-0.29904	0.10806	-0.31452	0.13072	-0.33805	0.16742
300	-0.26910	0.00000	-0.33234	0.08554	-0.34509	0.10474	-0.36478	0.13618
310	-0.31771	0.00000	-0.36458	0.06659	-0.37465	0.08229	-0.39047	0.10826
320	-0.36182	0.00000	-0.39536	0.05032	-0.40293	0.06260	-0.41500	0.08307
330	-0.40181	0.00000	-0.42441	0.03604	-0.42971	0.04502	-0.43827	0.06007
340	-0.43799	0.00000	-0.45158	0.02318	-0.45486	0.02901	-0.46021	0.03882
350	-0.47065	0.00000	-0.47679	0.01129	-0.47830	0.01414	-0.48079	0.01891
360	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

〔隅角部先端に丸みのある場合〕

隅角部先端に丸みのある場合で、形状が角度の2等分線に対称なとき、2等分線上の応力集中値は、一般に丸みの曲率半径 ρ を用いて次式のように表わされる¹²⁾。

$$\text{応力集中値} = \sum h_j \rho^{m_j} \quad (13)$$

ここで、 m_j は式(11)の方程式の根であり、 h_j は荷重、形状によって決まる係数である。いま、2等分線上の法線方向応力成分を考え、それを $\sigma_{r \max}$ とおくと、式(13)より次式のように表わされる。

$$\sigma_{r \max} = h_r \rho^{m_1} + h_{r2} \rho^{m_2} + h_{r3} \rho^{m_3} + \dots \quad (14)$$

自由境界の場合と同様に第1項の係数 h_r は応力集中に関する1つの因子となる。式(14)の収束は速く、始めの2～3項で十分な精度を有する応力集中値の式となる^{12, 35)}。また固定境界上の接線方向応力成分 σ_θ と法線方向応力成分 σ_r の間には次式の関係が成り立つ³¹⁾。

$$\sigma_\theta / \sigma_r = (3 - \kappa) / (1 + \kappa) \quad (15)$$

〔隅角部の応力の強さと応力集中との関係〕

式(12)の f_r と式(14)の h_r は、次式のように関係づけられる。

$$f_r / h_r = C_r \quad (16)$$

式(16)の関係は、隅角部の角度とポアソン比のみに依存し、荷重条件によらない。この場合の C_r を、表-4に示す。また $\sigma_{r \max}$ が、 ρ の関数として分かっているときは、式(9)と同様の式によって f_r が求められる。

又、法線方向応力成分の場合と同様、接線方向応力成分についても、次式のような関係がある¹¹⁾。

$$\sigma_\theta = f_\theta r^{m_1} + f_{\theta 2} r^{m_2} + f_{\theta 3} r^{m_3} + \dots \quad (17)$$

$$\sigma_{\theta \max} = h_\theta \rho^{m_1} + h_{\theta 2} \rho^{m_2} + h_{\theta 3} \rho^{m_3} + \dots \quad (18)$$

f_θ は弾性体中へのクラック発生に関する応力の強さを表わす。式(15)より、小さな ρ のとき

$$h_\theta / h_r \doteq \sigma_{\theta \max} / \sigma_{r \max} = (3 - \kappa) / (1 + \kappa)$$

また、式(10)、(12)、(17)より

$$\begin{aligned} f_\theta / f_r = & -[(m_1 + 2)\{(m_1 + \kappa + 1)\sin(m_1 \alpha)\} - (m_1 + 2)^2 \sin \\ & \{(m_1 + 2)\alpha\}] / [(m_1 + 2)\{(m_1 + \kappa + 1)\sin(m_1 \alpha)\} \\ & - (m_1 - 2)(m_1 + 2)\sin\{(m_1 + 2)\alpha\}] \end{aligned}$$

であるから、 f_θ 、 h_θ 、 f_r 、 h_r の内どれか一つが分かれば他の値を求めることができる¹¹⁾。以上より何か一つが分かれば、応力集中値や隅角部付近の応力成分を求めることができる。

次に、逆対称な応力状態の場合を考える。

〔鋭い隅角部の場合〕

一般に、鋭い隅角部付近の応力成分は次式のように表わされる¹¹⁾。

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -\sum (m_j + 1) r^{m_j} \{[(m_j + 2)B_j - 2D_j]\sin m_j \theta + D_j m_j \sin(m_j - 2)\theta\} \\ \sigma_\theta = & \sum (m_j + 1) r^{m_j} \{[(m_j + 2)B_j + 2D_j]\sin m_j \theta + D_j m_j \sin(m_j - 2)\theta\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\tau_{r\theta} = -\sum (m_j + 1) r^{m_j} \{(m_j + 2)B_j \cos m_j \theta + D_j m_j \cos(m_j - 2)\theta\}$$

なお、 $D_j = (m_j + 2)B_j \sin\{(m_j + 2)\alpha\} / \{(\kappa - m_j - 1)\sin m_j \alpha\}$ が成り立つ。

表-4 式(16)の C_r の値

2α	$\kappa=5/3$	$\kappa=2$	$\kappa=3$
	C_r	C_r	C_r
180°	1.000	1.000	1.000
190	0.994	0.930	0.901
200	0.975	0.898	0.856
210	0.953	0.881	0.828
220	0.927	0.871	0.810
230	0.905	0.866	0.798
240	0.888	0.861	0.793
250	0.879	0.859	0.790
260	0.877	0.860	0.791
270	0.883	0.863	0.796
280	0.893	0.871	0.804
290	0.906	0.880	0.814
300	0.922	0.894	0.825
310	0.941	0.912	0.840
320	0.966	0.934	0.861
330	0.999	0.963	0.884
340	1.042	1.004	0.918
350	1.108	1.063	0.966
360	1.238	1.178	1.060

表-5 式(20)の m_1, m_2 の値

2α	$\kappa=1$		$\kappa=5/3$		$\kappa=2$		$\kappa=3$	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
190	-0.09996	1.00180	-0.08153	0.95665	-0.07683	0.94593	-0.06889	0.92847
200	-0.18130	1.01826	-0.15022	0.91575	-0.14218	0.89452	-0.12851	0.86126
210	-0.24803	1.10629 $\pm i$ 0.09610	-0.20829	0.87753	-0.19794	0.84509	-0.18025	0.79729
220	-0.30284	1.00565 $\pm i$ 0.19838	-0.25746	0.84215	-0.24560	0.79669	-0.22525	0.73560
230	-0.34773	0.91527 $\pm i$ 0.23695	-0.29910	0.80998	-0.28636	0.74795	-0.26446	0.67534
240	-0.38427	0.83355 $\pm i$ 0.25225	-0.33432	0.78282	-0.32122	0.69706	-0.29867	0.61585
250	-0.41372	0.75925 $\pm i$ 0.25400	-0.36405	0.77037 $\pm i$ 0.02624	-0.35101	0.64194	-0.32856	0.55674
260	-0.43716	0.69141 $\pm i$ 0.24634	-0.38908	0.70213 $\pm i$ 0.03724	-0.37646	0.58129	-0.35473	0.49790
270	-0.45552	0.62926 $\pm i$ 0.23125	-0.41011	0.61233	-0.39819	0.51586	-0.37768	0.43954
280	-0.46960	0.57214 $\pm i$ 0.20945	-0.42773	0.51174	-0.41675	0.44817	-0.39786	0.38207
290	-0.48015	0.51955 $\pm i$ 0.18048	-0.44249	0.42589	-0.43262	0.38087	-0.41568	0.32600
300	-0.48778	0.47103 $\pm i$ 0.14185	-0.45485	0.34824	-0.44625	0.31578	-0.43149	0.27180
310	-0.49307	0.42623 $\pm i$ 0.08316	-0.46525	0.27725	-0.45801	0.25388	-0.44561	0.21983
320	-0.49651	0.30269	-0.47407	0.21210	-0.46825	0.19562	-0.45833	0.17039
330	-0.49855	0.20296	-0.48166	0.15219	-0.47730	0.14114	-0.46991	0.12362
340	-0.49957	0.12541	-0.48832	0.09709	-0.48544	0.09043	-0.48057	0.07962
350	-0.49995	0.05884	-0.49434	0.04646	-0.49292	0.04342	-0.49054	0.03842
360	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

ここで、 B_j 、 D_j は荷重条件によって決まる係数、 $m_j(j=1,2,3,\dots)$ は次の方程式の根である。

$$\kappa \sin \{2(m+1)\alpha\} + (m+1) \sin 2\alpha = 0 \quad (20)$$

表-5に、式(20)の最初の2根を示す。対称軸上の $\tau_{r\theta}$ について考えると次式を得る。

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\sum (m_j+1) r^{m_j} \{ (m_j+2) B_j + D_j m_j \} \\ &= f_{r\theta} r^{m_1} + f_{r\theta 2} r^{m_2} + f_{r\theta 3} r^{m_3} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

ここでも、第1項の係数 $f_{r\theta}$ を「隅角部の応力の強さ」と定義する。これは固定辺上のずれに対する応力の強さを表わす。この係数の求め方は文献(11)に示されている。

【隅角部先端に丸みのある場合】

隅角部先端に丸みがあり、形状が角度の2等分線に対称のとき、2等分線上のせん断応力の集中値は、この場合も一般に丸みの曲率半径 ρ を用いて次式のように表わされる¹²⁾。

$$\text{応力集中値} = \sum h_j \rho^{m_j} \quad (22)$$

ここで、 m_j は式(20)の方程式の根であり、 h_j は荷重、形状によって決まる係数である。今、2等分線上のせん断応力成分を考え、それを $\tau_{r\theta \max}$ とおくと、式(22)より次式のように表わされる。

表-6 式(24)の $C_{r\theta}$ の値

2α	$\kappa=1$	$\kappa=2$	$\kappa=3$
	$C_{r\theta}$	$C_{r\theta}$	$C_{r\theta}$
180°	1.000	1.000	1.000
190	0.529	0.687	0.760
200	0.388	0.583	0.648
210	0.316	0.511	0.575
220	0.270	0.458	0.523
230	0.236	0.414	0.483
240	0.202	0.379	0.452
250	0.172	0.351	0.427
260	0.142	0.326	0.405
270	0.116	0.305	0.388
280	0.092	0.286	0.373
290	0.071	0.272	0.362
300	0.053	0.259	0.352
310	0.037	0.249	0.345
320	0.026	0.241	0.341
330	0.016	0.235	0.338
340	0.009	0.232	0.339
350	0.004	0.233	0.344
360	0.0	0.236	0.354

$$\tau_{r\theta \max} = h_{r\theta} \rho^{m_1} + h_{r\theta 2} \rho^{m_2} + h_{r\theta 3} \rho^{m_3} + \dots \quad (23)$$

同様に第1項の係数 $h_{r\theta}$ は応力集中に関する一つの因子となる。式(23)の収束は速いので、実用的には始めの2～3項で十分な精度を有する応力集中値の式となる¹²⁾。

〔隅角部の応力の強さと応力集中との関係〕

式(21)の $f_{r\theta}$ と式(23)の $h_{r\theta}$ は次式のように関係づけられる。

$$f_{r\theta} / h_{r\theta} = C_{r\theta} \quad (24)$$

式(24)の関係は、隅角部の角度とポアソン比のみに依存し、荷重条件によらない。この場合の $C_{r\theta}$ を表-6に示す。 $\tau_{r\theta \max}$ が ρ の関数として分かっているとき、式(9)と同様の式によって $f_{r\theta}$ が求められる。自由境界の場合と同様に何か一つが分かれば応力集中値や隅角部付近の応力成分を求めることができる。

2-3 薄板の曲げ問題で自由境界の場合

薄板の曲げ問題も平面問題の場合と同様の関係が求められ、これらの関係を簡単に示す。まず自由境界で切欠きの2等分線に対称な応力状態を考える。

〔鋭い切欠きの場合〕

一般に、鋭いV字形切欠き先端付近の曲げ及び、ねじりモーメントは次式のように表わされる¹³⁾。

$$\begin{aligned} M_r &= -\sum D r^{m_j} \{ \{ (m_j+1)(m_j+2) + \nu(m_j+2) - \nu m_j^2 \} F_j \cos m_j \theta \\ &\quad + \{ (m_j+1)(m_j+2) + \nu(m_j+2) - \nu(m_j+2)^2 \} H_j \cos(m_j+2) \theta \} \\ M_\theta &= -\sum D r^{m_j} \{ \{ (m_j+2) + \nu(m_j+1)(m_j+2) - m_j^2 \} F_j \cos m_j \theta + \{ (m_j+2) + \nu(m_j+1)(m_j+2) - (m_j+2)^2 \} H_j \cos(m_j+2) \theta \} \\ H_{r\theta} &= \sum D r^{m_j} \{ \{ (1-\nu)(m_j+1)m_j \} F_j \sin m_j \theta + \{ (1-\nu)(m_j+1)(m_j+2) \} H_j \sin(m_j+2) \theta \} \end{aligned} \quad (25)$$

なお、 $F_j(4+m_j-\nu m_j)\sin m_j \alpha + H_j(m_j+2)(1-\nu)\sin(m_j+2)\alpha = 0$ が成り立つ

ここで、 D は曲げ剛さ、 F_j 、 H_j は

荷重条件によって決まる係数、 m_j

($j=1, 2, 3, \dots$)は次の方程式の根である。

$$\begin{aligned} (3+\nu)\sin\{2(m+1)\alpha\} \\ -(m+1)(1-\nu)\sin 2\alpha = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)より、 m_j ($j=1, 2, 3, \dots$)の値

は、角度 2α とポアソン比のみに依存するのが分かる。表-7に式(26)の最初の2根を示す。対称軸上の M_θ について考えると次式ようになる。

$$\begin{aligned} M_\theta &= -\sum D r^{m_j} \{ \{ (m_j+2) \\ &\quad + \nu(m_j+1)(m_j+2) - m_j^2 \} F_j \\ &\quad + \{ (m_j+2) + \nu(m_j+1)(m_j+2) \\ &\quad - (m_j+2)^2 \} H_j \} \\ &\equiv f_{\theta 1} r^{m_1} / \sqrt{2} + f_{\theta 2} r^{m_2} \\ &\quad + f_{\theta 3} r^{m_3} + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

ここでも第1項の係数 f_θ を「隅角部の応力の強さ」と定義する。この係数は薄板の曲げ問題でも、切欠きの1つの因子となる。その求め方

表-7 式(26)の m_1, m_2 の値

2α	$\nu = 0.0$		$\nu = 0.25$		$\nu = 0.5$	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
190	-0.03579	0.86217	-0.04104	0.87209	-0.04549	0.88066
200	-0.06955	0.74270	-0.07916	0.76007	-0.08722	0.77512
210	-0.10186	0.63881	-0.11495	0.66165	-0.12581	0.68144
220	-0.13316	0.54830	-0.14885	0.57495	-0.16175	0.59801
230	-0.16379	0.46940	-0.18121	0.49843	-0.19543	0.52349
240	-0.19394	0.40063	-0.21226	0.43077	-0.22714	0.45674
250	-0.22371	0.34068	-0.24217	0.37083	-0.25711	0.39674
260	-0.25311	0.28839	-0.27102	0.31760	-0.28550	0.34274
270	-0.28205	0.24270	-0.29885	0.27020	-0.31246	0.29388
280	-0.31042	0.20267	-0.32566	0.22785	-0.33806	0.24955
290	-0.33804	0.16743	-0.35143	0.18982	-0.36238	0.20917
300	-0.36478	0.13618	-0.37613	0.15549	-0.38547	0.17220
310	-0.39047	0.10826	-0.39970	0.12431	-0.40736	0.13821
320	-0.41500	0.08307	-0.42213	0.09577	-0.42809	0.10677
330	-0.43827	0.06007	-0.44339	0.06943	-0.44769	0.07753
340	-0.46021	0.03882	-0.46345	0.04491	-0.46619	0.05017
350	-0.48079	0.01892	-0.48232	0.02187	-0.48362	0.02441
360	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

は文献(8)に示されている。

〔切欠き先端に丸みのある場合〕

切欠き先端に丸みがあり、形状が角度の2等分線に对称のとき、2等分線上の点の曲げモーメントの応力集中値は、一般に丸みの曲率半径 ρ を用いて次式のように表わされる⁹⁾。

$$\text{応力集中値} = \sum h_j \rho^{m_j} \quad (28)$$

ここで、 m_j は式(26)の根であり、 h_j は荷重、形状によって決まる係数である。今、2等分線上の接線方向曲げモーメントを考え、それを $M_{\theta \max}$ とおくと、式(28)より次式のように表わされる。

$$M_{\theta \max} = h_{\theta 1} \rho^{m_1} + h_{\theta 2} \rho^{m_2} + h_{\theta 3} \rho^{m_3} + \dots \quad (29)$$

同様に第1項の係数 $h_{\theta 1}$ は応力集中に関する1つの因子となる。又、式(29)の収束は速いので、実用的には始めの2～3項で十分の精度を有する応力集中値の式となる^{9, 29, 30)}。

〔隅角部の応力の強さと応力集中との関係〕

式(27)の f_{θ} と式(29)の h_{θ} は、次式のように関係づけられる。

$$f_{\theta} / h_{\theta} = C_{\theta} (3+\nu)/(1+\nu) \quad (30)$$

式(30)の関係は、切欠きの角度とポアソン比のみに依存し、荷重条件によらない。この場合の C_{θ} を、表-8に示す。いくつかの ρ と $M_{\theta \max}$ の値が分かっているとき、式(29)より $M_{\theta \max}$ の式を作り、または $M_{\theta \max}$ が ρ の関数として分かっているとき、この式を用いて f_{θ} は、次式から求められる。

$$f_{\theta} = C_{\theta} \{ (3+\nu)/(1+\nu) \} \lim_{\rho \rightarrow 0} [\rho^{-m_1} M_{\theta \max}] \quad (31)$$

クラックのとき C_{θ} の値は、表-8の $2\alpha=360^\circ$ の場合の0.5となる。またこのとき f_{θ} は曲げモードの応力拡大係数¹⁷⁾ k_B になり、応力集中値から応力拡大係数を求める式になる。平面問題の場合と同様何か一つの因子が分かれば応力集中値や隅角部先端の曲げモーメント等の成分が求められる。

表-8 式(30)の C_{θ} の値

2α	$\nu=0.0$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$
	C_{θ}	C_{θ}	C_{θ}
180°	0.471	0.544	0.606
190	0.425	0.478	0.522
200	0.403	0.448	0.483
210	0.390	0.428	0.458
220	0.382	0.415	0.440
230	0.376	0.407	0.428
240	0.373	0.400	0.420
250	0.372	0.397	0.414
260	0.373	0.394	0.410
270	0.375	0.394	0.408
280	0.379	0.395	0.407
290	0.384	0.397	0.408
300	0.389	0.402	0.411
310	0.396	0.406	0.415
320	0.406	0.414	0.422
330	0.417	0.424	0.430
340	0.433	0.438	0.443
350	0.456	0.458	0.462
360	0.5	0.5	0.5

2-4 薄板の曲げ問題で固定境界の場合

固定境界で隅角部の2等分線に对称な応力状態を考える。

〔鋭い隅角部の場合〕

一般に、鋭い隅角部付近の曲げ及び、ねじりモーメントは、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} M_r &= -\sum D r^{m_j} [\{ (m_j+1)(m_j+2) + \nu(m_j+2) - \nu m_j^2 \} E_j \cos m_j \theta \\ &\quad + \{ (m_j+1)(m_j+2) + \nu(m_j+2) - \nu(m_j+2)^2 \} G_j \cos(m_j+2)\theta] \\ M_{\theta} &= -\sum D r^{m_j} [\{ (m_j+2) + \nu(m_j+1)(m_j+2) - m_j^2 \} E_j \cos m_j \theta + \{ (m_j+2) + \nu(m_j+1)(m_j+2) - (m_j+2)^2 \} G_j \cos(m_j+2)\theta] \\ H_{r\theta} &= \sum D r^{m_j} [\{ (1-\nu)(m_j+1)m_j \} E_j \sin m_j \theta + \{ (1-\nu)(m_j+1)(m_j+2) \} G_j \sin(m_j+2)\theta] \end{aligned} \quad (32)$$

なお、 $E_j \cos m_j \alpha + G_j \cos(m_j+2)\alpha = 0$ が成り立つ。

ここで、 E_j 、 G_j は荷重条件によって決まる係数、 m_j ($j=1, 2, 3, \dots$)は次式の根である。

$$(m+1) \sin 2\alpha + \sin \{ 2(m+1)\alpha \} = 0 \quad (33)$$

式(33)は式(2)と同じであるので、 m_1 、 m_2 の値は表-1の値である。式(32)より対称軸上の M_r, M_θ について考えると次式ようになる。

$$\begin{aligned} M_r &= -\sum D r^{m_j} [\{(m_j+1)(m_j+2)+\nu(m_j+2)-\nu m_j^2\} E_j + \{(m_j+1)(m_j+2)+\nu(m_j+2)-\nu(m_j+2)^2\} G_j] \\ &\equiv f_r r^{m_1} + f_{r2} r^{m_2} + f_{r3} r^{m_3} + \dots \\ M_\theta &= -\sum D r^{m_j} [\{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-m_j^2\} E_j + \{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-(m_j+2)^2\} G_j] \\ &\equiv f_\theta r^{m_1} + f_{\theta 2} r^{m_2} + f_{\theta 3} r^{m_3} + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、第1項の係数 f_r, f_θ を「隅角部の応力の強さ」と定義する。 f_r は固定辺上の剥離に関する、 f_θ は弾性体中へのクラック発生に関する応力の強さを表す。その求め方は文献(14)に示されている。

〔隅角部先端に丸みのある場合〕

隅角部先端に丸みがあり、形状が角度の2等分線に対称のとき、2等分線上の点の応力集中値は、一般に隅角部先端の曲率半径 ρ を用いて次式のように表わされる¹⁵⁾。

$$\text{応力集中値} = \sum h_j \rho^{m_j} \quad (35)$$

ここで、 m_j は式(33)の根であり、 h_j は荷重、形状によって決まる係数である。この場合、2等分線上の境界の法線及び接線方向の断面に生ずる曲げモーメントを考え、それを $M_{r \max}, M_{\theta \max}$ とおくと式(35)より次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} M_{r \max} &= h_r \rho^{m_1} + h_{r2} \rho^{m_2} + h_{r3} \rho^{m_3} + \dots \\ M_{\theta \max} &= h_\theta \rho^{m_1} + h_{\theta 2} \rho^{m_2} + h_{\theta 3} \rho^{m_3} + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

自由境界の場合と同様に第1項の係数 h_r, h_θ は応力集中に関する一つの因子となる。又、式(36)の収束は速いので、始めの2～3項で十分な精度を有する応力集中値の式となる¹⁵⁾。また固定辺上の法線方向及び接線方向の断面に生ずる曲げモーメント M_n, M_t 、固定辺上のねじりモーメント H_{nt} には次の関係がある³⁶⁾。

$$M_t = \nu M_n \quad H_{nt} = 0 \quad (37)$$

固定辺ではねじりモーメントはすべて零であるので、ねじりモーメントの集中は生じない。

〔隅角部の応力の強さと応力集中との関係〕

式(34)の f_r と式(36)の h_r, f_θ と h_θ は次式のように関係づけられる。

$$f_r / h_r = C_r \quad f_\theta / h_\theta = C_\theta \quad (38)$$

式(38)の関係は、隅角部角度とポアソン比のみに依存し、荷重条件によらない。この場合の C_r を、表-9に示す。式(37)より、小さな ρ のとき

$$h_\theta / h_r \equiv M_{\theta \max} / M_{r \max} = \nu$$

また、式(32)、(34)より

$$\begin{aligned} f_\theta / f_r &= \{[-(m_1-2)+\nu(m_1+2)](m_1+2) \sin\{(m_1+2)\alpha\} + \{(m_1+2)-\nu(m_1+2)\} m_1 \sin(m_1 \alpha)\} / \{[-(m_1-2)+\nu(m_1+2)](m_1+2) \sin\{(m_1+2)\alpha\} - \{(m_1+2)-\nu(m_1+2)\} m_1 \sin(m_1 \alpha)\} \} \end{aligned}$$

であるから、 $f_r, f_\theta, h_r, h_\theta$ の内一つがわかれば、他は計算できる¹⁴⁾。以上より平面問題と同様の事が言える。たとえば隅角部付近のある点の1成分の曲げモーメントの値がわかれば、式(32)の E_j, G_j がわかり任意点の応力成分が分かる。さらに、 f_r, f_θ がわかるので h_r, h_θ がわかり、小さな ρ の応力集中値がわかる。

表-9 式(38)の C_r の値

2α	$\nu=0.0$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$
	C_r	C_r	C_r
180°	1.000	1.000	1.000
190	0.673	0.675	0.676
200	0.548	0.564	0.573
210	0.478	0.510	0.526
220	0.435	0.478	0.503
230	0.407	0.458	0.493
240	0.389	0.444	0.487
250	0.376	0.438	0.487
260	0.367	0.436	0.488
270	0.362	0.435	0.491
280	0.358	0.434	0.498
290	0.356	0.434	0.506
300	0.355	0.435	0.513
310	0.354	0.437	0.519
320	0.354	0.439	0.523
330	0.354	0.440	0.526
340	0.354	0.441	0.528
350	0.354	0.442	0.529
360	0.354	0.442	0.530

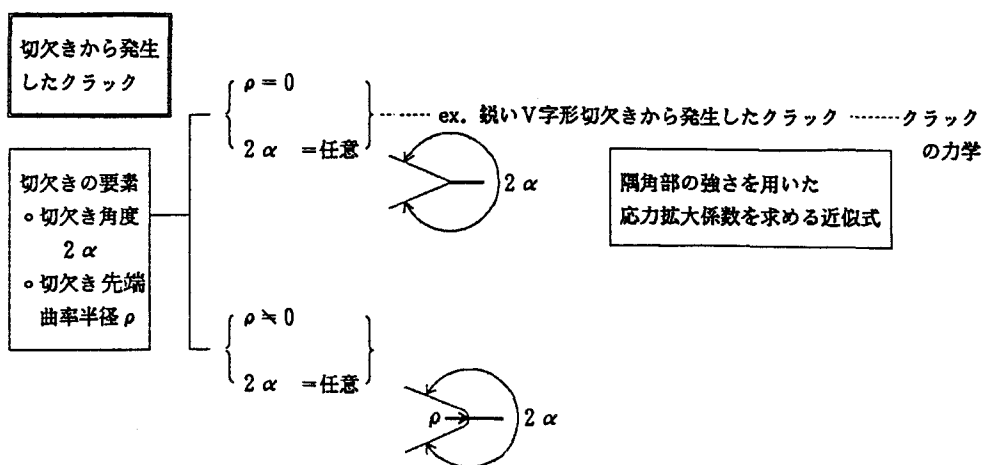


図-2 切欠きから発生したクラック

3. クラックの力学と切欠きの力学との関連

前章で示したように、クラックは切欠きの特別な場合と考えられる。クラックの力学の解析は数多くなされ、また応力拡大係数は工学的にも多く利用されているので、切欠きの力学を、クラックの力学と関連づけると合理的である。

3-1 平面問題で自由境界の場合

図-2のように平面問題で切欠きから発生したクラックについて考える。具体的にはV字形切欠きから、切欠き角度の2等分線に沿って発生したクラックを対象として示す。今、長さ b のクラックの応力拡大係数 $K_I(b)$ を、クラック発生前の切欠き角度の2等分線上の応力値 $\sigma_\theta(b)$ を用いて次式のように表わす。

$$K_I(b) = A \sigma_\theta(b) \sqrt{\pi b} \quad (39)$$

ここで、係数 A は切欠きの角度、クラック長に因る。たとえば、一様引張りを受ける半無限板の縁のV字形切欠きから発生したクラックについては、短いクラックから比較的長いクラックまで適用できる A 値が文献(16)に示されている。クラック発生前の $\sigma_\theta(b)$ が関数形としてわかっていないが、いくつかの b に対して応力値がわかっているときは、式(3)の初めの数項を用いて、 $\sigma_\theta(b)$ の式を決めることができる。これを用いて K_I 値を計算できる。しかし式(3)の第一項の係数 f_θ を精度よく求めるためには、小さな b 、すなわち切欠き先端近傍の応力値が分かっているなければならない。

切欠き先端近傍 (r 、つまり b が小さい範囲)では、応力 $\sigma_\theta(b)$ は式(3)の第1項のみで次式のように表される。

$$\sigma_\theta(b) = f_\theta b^{m+1} / \sqrt{2} \quad (40)$$

よって上式を式(39)に代入すると次式を得る。

$$K_I(b) = A f_\theta b^{m+1} \sqrt{\pi b} / \sqrt{2} \quad (41)$$

クラックが短いとき、上式の A の値は角度のみに依存する値となる。この値を図-3に示す。式(41)より、切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が隅角部の応力の強さ f_θ で表わされることが分かる。つまり、隅角部の応力の強さ f_θ が分かれば切欠きから

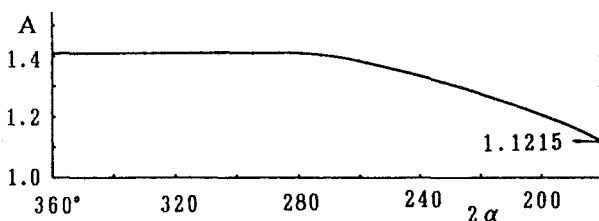


図-3 式(41)の A の値

発生した短いクラックの応力拡大係数が計算できる。逆に、切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が分かれば、式(41)から隅角部の応力の強さ f_{θ} が計算できる。 f_{θ} が分かれば2-1節で述べたように、クラック発生前の切欠き先端付近の任意の応力成分、また h_{θ} が分かるので小さい ρ の応力集中値が分かる。

次に、切欠き角度が異なる2つの切欠きが2つの異なる荷重を受けるとき、どちらが危険かという問題を考えてみる。単に隅角部の応力の強さの比較では、各々の次元が異なるので意味がない。よって2つの切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数の値によって判断する。その応力拡大係数は、隅角部の応力の強さが分かれば、式(41)から計算できる。クラックが発生しないための切欠きの強さは、式(41)の適当な b に対する応力拡大係数の値が破壊靱性値 K_{Ic} を越えないようにすればよい。このように切欠きの強さにクラックの力学が適用できる。

鋭い切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を求める近似式を示したが、切欠き先端に丸みのある切欠きからクラックが発生する場合も多く、その応力拡大係数を求める近似式も重要である。しかし、このような場合を一般的に表わすのは難しい。ここでは1つの方法を示す。西谷¹⁸⁾によって、一様引張りを受ける無限板中の楕円孔から発生したクラックの解析がなされ、楕円孔の形、クラック長を変化させてその応力拡大係数が求められている。さらにクラック発生前、つまり無限板中の楕円孔の応力の式は分かっているので、これらの解析結果を式(39)に代入し、 A の値を逆算してみる。図-4に楕円孔のそれぞれの曲率半径 ρ についてクラッタ長さ b と楕円孔

のクラック方向半軸長 a の比に対する A の値を示す。この図より次のことが分かる。 b が十分に小さい時、すべての A 値が1.12に漸近している。この1.12は、一様引張りを受ける半無限板の縁クラックの応力拡大係数である。図より ρ の影響がよくわかり、 ρ が大きい場合しか1.12の値は使えない。切欠きが楕円曲線でない場合でも、クラック発生前の応力 $\sigma_{\theta}(b)$ と図-4の A の値を用いて応力拡大係数のよい近似値は得られよう。

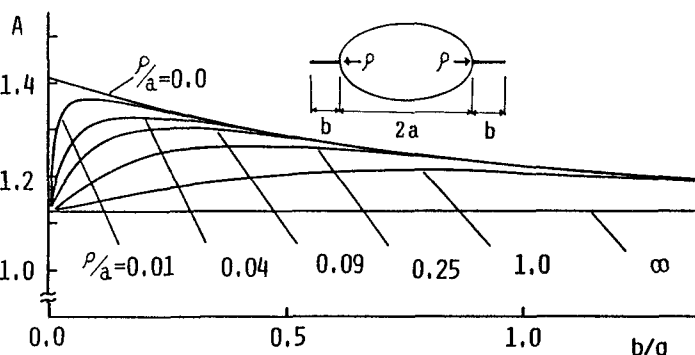


図-4 楕円孔から発生したクラックの A の値

3-2 薄板の曲げ問題で自由境界の場合

この場合も図-2に示すV字形切欠きから、切欠き角度の2等分線に沿って発生したクラックを対象として示す。長さ b のクラックの面外曲げの応力拡大係数¹⁷⁾ $k_{\theta}(b)$ を、クラック発生前の切欠き角度の2等分線上の曲げモーメント $M_{\theta}(b)$ を用いて次式のように表す¹⁷⁾。

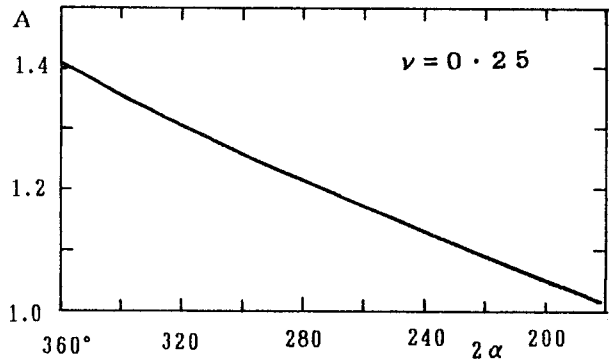
$$k_{\theta}(b) = \{(1+\nu)/(3+\nu)\} A M_{\theta}(b) \sqrt{b} \quad (42)$$

ここで、係数 A は切欠き角度、クラック長、ポアソン比に因る。たとえば、一様引張りを受ける半無限板の縁のV字形切欠きから発生したクラックの場合の A 値は文献(17)に示されている。平面問題の場合と同様、切欠き先端近傍 (r 、つまり b が小さい範囲) では、曲げモーメントは式(27)の第1項のみで表わされるので、この項を用いて短いクラックの応力拡大係数は次式から求められる。

$$k_{\theta}(b) = \{(1+\nu)/(3+\nu)\} A f_{\theta} b^{3/4} \sqrt{b} / \sqrt{2} \quad (43)$$

クラックが短いとき、上式の A の値は、切欠き角度のみに依存し、ポアソン比 $\nu=0.25$ に対する A の値を図

—5に示す。 $\nu=0.0, 0.5$ に対する値は文献(17)に示されている。式(43)より、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数が隅角部の応力の強さ f_θ で表わされるので、つまり、隅角部の応力の強さ f_θ が分かれば切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が計算できる。又、切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が分かっているれば隅角部の応力の強さ f_θ が計算できる。 f_θ が分かれば2—3節で述べたように、クラック発生前の切欠き先端付近の任意の応力成分や小さな ρ に対する応力集中値も求まる。同様に切欠き角度が異なる2つの切欠きが2つの異なる荷重を受けるときの危険性の比較も、その2つの切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数の値によって判断できる。



図—5 式(43)のAの値

4. あとがき

応力集中部の形状的な因子、力学的な因子について考察し、それらの相互間の関係について述べた。これらの事実は、任意の構造物中の切欠きについて成り立つ。さらに、応力集中、クラックなどに関する実験や、解析データを整理する上で、また現象を見通す上で有意義なものとなろう。また数値計算や実験等により応力集中部の現象を解明しようとするとき、一つの因子について求めれば、すべての因子について実験等をすることなくそれらの相互関係式を用いればよい。またいくつかの因子について得られた結果が、相互関係式をどの程度満足するかによって、実験等の結果の精度的な検証もできる。過去、応力集中の値は多く求められている。これらの値を利用して、本文中に述べた方法により h_θ や f_θ 、またその切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数を求めることもできる。

本報告には述べなかったが、縦せん断の問題の応力集中に関しても同様の考察がされる(文献32,33,34)。本報告の応力集中に関する項は、任意の応力状態において隅角部2等分線上の点について成り立つ事項である。しかし一般に最大応力が2等分線上でなく、ずれた位置に発生する場合、その発生位置や応力集中の表示式などの一般的な法則はわかっていない。

参考文献

1. Williams, M.L. (1952) Jour. Appl. Mech., Vol.19, p.526
2. Carpinteri, A. (1987) Eng. Frac. Mech., Vol.26, p.143
3. Nisitani, H. (1987) Role of Fracture Mechanics in Modern Technology, Sih, G.C. et al. ed. North-Holland
4. Lukas, P. & Klesnil, M. (1978) Mater. Sci. Eng., Vol.34, p.61
5. 中井、久保、大路、(1984), 機論, Vol.50, p.2017
6. Williams, J.G. & Isherwood, D.P. (1968) Jour. Strain Anal., Vol.3, p.17
7. Kobayashi, A.S. (1986) Computational Methods in the Mechanics of Fracture, Atluri, S.N. ed. North-Holland
8. Hasebe, N. & Iida, J. (1983) Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol.109, p.346
9. 長谷部、(1971), 土論, Vol.194, p.29

10. Hasebe, N. & Kutanda, Y. (1978) Eng. Frac. Mech., Vol. 10, p. 215
11. Iida, J., Hasebe, N. & Matuura, S. (1987) Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol. 113, p. 1194
12. Hasebe, N., Sugimoto, T. & Nakamura, T. (1986) Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol. 112, p. 142
13. Williams, M. L. (1952) National. Cong. Appl. Mech., p. 325
14. Iida, J., Hasebe, N. & Nakamura, T. (1987) Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol. 113, p. 1138
15. Hasebe, N., Sugimoto, T. & Nakamura, T. (1986) Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol. 112, p. 642
16. Hasebe, N. & Iida, J. (1978) Eng. Frac. Mech., Vol. 10, p. 773
17. Hasebe, N. & Iida, J. (1979) Eng. Frac. Mech., Vol. 11, p. 645
18. 西谷、石田、(1973), 機論, Vol. 39, p. 7
19. Irwin, G. R. (1958) Handbuch der Physik, Springer-Verlag, p. 551
20. Neuber, H. (1985) Kerbspannungslehre, Springer-Verlag
21. Peterson, R. E. (1966) Stress Concentration Design Factors, John Wiley & Sons Inc.
22. 西田、(1981) 応力集中, 森北出版
23. Heywood, R. B. (1952) Designing by Photoelasticity, Chapman & Hall, p. 167
24. 平野、(1950), 機論, Vol. 16, p. 52
25. Tada, H., Paris, P. C. & Irwin, G. R. (1973) The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corp.
26. Sih, G. C. (1973) Handbook of Stress Intensity Factors, Leigh Univ.
27. Rooke, D. P. & Cartwright, D. J. (1976) Stress Intensity Factors, H. M. Stationary Office
28. Murakami, Y. ed. (1986) Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press
29. 長谷部、飯田、(1981), 機論, Vol. 47, p. 1347
30. 長谷部、(1972), 名古屋工業大学学報, Vol. 24, p. 295
31. Hasebe, N. (1979) Ing. Arch., Vol. 48, p. 129
32. 長谷部、(1973), 土論, Vol. 211, p. 11
33. 長谷部、(1973), 名古屋工業大学学報, Vol. 25, p. 299
34. Hasebe, N., Sugimoto, T. & Nakamura, T. (1987) Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol. 113, p. 1358
35. Hasebe, N., Tsutsui, S. & Nakamura, T. (1988) Jour. Appl. Mech., ASME, Vol. 55, p. 574
36. Hasebe, N. (1984) Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol. 110, p. 37
37. Savin, G. N. (1961) Stress Concentration around Holes, Pergamon Press

(1988年10月12日受付)