構造工学論文集 Vol.35A（1989年3月）　土木学会

多段階構造解析における有限要素モデルの設定に関する数値実験的研究

NUMERICAL EXPERIMENTS ON FE MODELLING FOR MULTI-LEVEL STRUCTURAL ANALYSIS

森脇　清明*　　谷口　健男**
By Kiyoaki MORIWAKI and Takeo TANIGUCHI

In this paper the authors survey numerically the FE model for the multi-level structural analysis when it is applied for the stress analysis in a small portion of large-scale civil engineering structures like steel bridges. Following discussions are given ; 1).how to decide the substructure, 2). how to determine the boundary conditions for the substructure, 3). the modelling method of the portion where stress concentration appears, and 4). the modelling of 2-dim. structural component in 3-dim. structure.

1．まえがき

最近、土木技術の発達はめざましく、大規模かつ複雑な構造物が建設されるようになってきている。しかし、その一方で、３次元的な複雑な応力および変形挙動等に起因すると思われる、局所的なき裂発生等の損傷例がいくつか報告されるようになってきた（文献１）。　これは、従来の設計法が断面力を評価することによって行われ、局部的な応力集中等、細部の応力状態・変形挙動を十分に把握していないこと、あるいは、３次元体を単純に２次元および１次元体の集合と考え、解析・設計を行っていること、等に起因していると思われる。この様な局部的な力学挙動を解明するためには、構造実験を行うことによってその現象を再現することが考えられるが、寸法・境界条件等を考えたとき、それらを全て実験において正確に現象を再現するには、困難な点が数多くある。この困難さを克服する簡便な一手法として数値解析が考えられる。特に、この20年余の間で発達してきた有限要素法は汎用性に富み、特に境界条件、複雑な形状等の設定が容易であることより、現在では最も信頼のおける構造解析法となってきている。反面、計算機の性能に大きく支配されるという欠点も同時に有していることもまた事実である。特に、大規模系の中の一部の応力状態を精度良く把握することは、今日の計算機の能力を持ってしても、計算時間・容量、また、数値・離散化誤差などより困難である。

その一方では、多段階構造解析法という、それら諸問題を克服する計算法も存在する。これは、全体解析より順次、解析対象領域をより小さく限定し、前段階での解を次の段階での境界条件として導入し、

*　　コベルコシステム株式会社　（〒651　神戸市中央区雲井通4-2-2）
**　工博　岡山大学助教授　工学部共通講座　（〒700　岡山市津島中3-1-1）

最終的には小領域を精度良く解析する方法である。　本研究では、この多段階解析法を大規模系の細部解析の手段として採用し、そこに生ずる諸問題について数値実験を基礎とした検討を加える。なお、本論文における数値計算は全て倍精度計算によるものである。

2．多段階構造解析法の概要とその問題点

2-1 概要

一般に、有限要素法を用いて構造物中の応力集中部あるいはき裂先端部等の特異な応力分布状態を精度良く把握するためには、非常に細かいメッシュ分割が必要となってくる。これに対して、構造物の外周辺等、比較的応力の変化が小さい箇所では粗いメッシュ分割でも十分に応力状態が表現できる。以上の点より、応力集中等の発生が予想される系の一括解析を行うことは、計算機の容量、演算時間、誤差等の面より不可能なことが多く、この困難さを解消させるために多段階構造解析法を用いることにする。この方法を具体的に説明する。

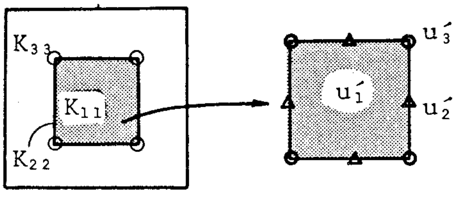
いま、全体解析領域と部分解析領域を図1(a)のように設定したとする。この系に対して、変位型有限要素法を用いれば、解くべき方程式は次式で表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

この第一式より

$$K_{11} \cdot u_1 = P_1 - K_{12} \cdot u_2 - K_{13} \cdot u_3 \qquad (2)$$

ここで、K,u,P はそれぞれ剛性行列、変位ベクトル、荷重ベクトルであり、添え字は、図1(a) に示した部分を表すものである。



(a)全体領域　　(b)部分領域

図1　解析領域のモデル図

ところで、K_{13}は、同図よりも明らかなように、領域相互間に関連がないことより 0となり、

$$K_{11} \cdot u_1 = P_1 - K_{12} \cdot u_2 \qquad (3)$$

次に、部分領域の解析に移る（図1(b)参照）。前回と同様に、方程式としては次式のようになる。

$$K' \cdot u' = P' \qquad (4)$$

いま、この細分化した部分系の境界点のうち、前段階で発生させた点と一致する点（○印）の変位を u'_3として前段階での u_2を与え、新たに部分解析領域内で発生させた点（△印）の変位を u'_2とすると

$$K'_{11} \cdot u'_1 = P'_1 - K'_{12} \cdot u'_2 - K'_{13} \cdot u'_3 \qquad (5)$$

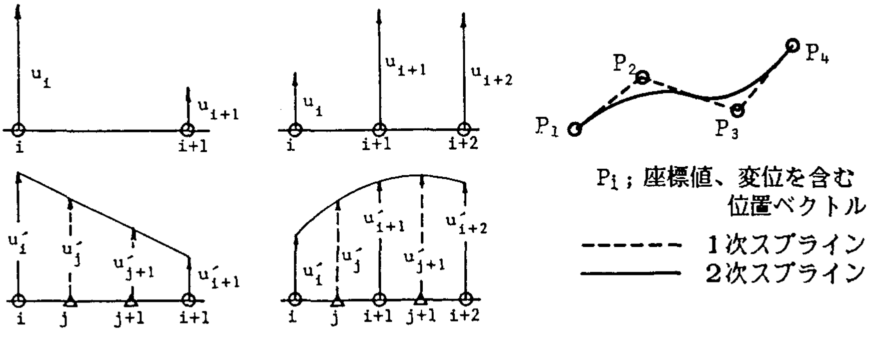
ここで、u'_3既知であるため、u'_2が与えられれば上式より u'_1は求まる。すなわち、前段階で求めた解の一部を次段階での境界条件として用いることになる。この解析を必要に応じて繰り返すことによって、大規模系の中の小さな領域を解析することができる。

2-2 部分解析領域の設定について

前述したように、多段階解析法では前段階での解（変位）を次段階の境界条件として与えるので、常に前段階の系の解を精度良く求めることは必須条件となることはもちろんのこと、補間することで求められる境界条件（式(5)における u'_2）によって部分解析領域内の解が鋭敏に支配されることは好ましくない。よって、そのような影響を取り除くことができる領域の設定を 3-3節で検討する。さらに、部分解析領域内に特異な応力を示す状況がある場合（例えばき裂を含む場合）、そのメッシュサイズ、要素の配列等、有限要素モデル自体によって解に影響が出てくることも考えられるので、あわせてこれらの問題についても、3-2 節で数値実験を行って検討を加える。

2-3 補間関数について

図2より、細分化した部分系の境界上の節点数は前段階で得られた節点数より多く、したがって、部分系の境界条件 u'_j, u'_{j+1} をいかに u_i, u_{i+1} より求めるかが大きな問題点となる。ここでは、この操作を補間法に頼るとし、その関数として、(1) 1次関数（図2(a)）、(2) 2次関数（図2(b)）、(3) スプライン関数（図2(c)）の 3種を考え、これら各補間法についての検討を 3-4節で行う。



(a) 1次関数　(b) 2次関数　(c)スプライン関数

図2　各種関数による補間法

2-4 3次元体の2次元モデル化について

今まで述べてきたことは、主に、同一次元内の多段階解析（例えば、面内問題から面内問題への場合）についてであった。さて、橋梁等、大規模構造物を考えたとき、対象系は3次元体としてモデル化しなければならない場合が多い。しかし、2次元モデルにくらべ、考慮すべき自由度が一挙に増加するため、計算機容量等を考えると、多段階構造解析法を用いることが必要となってくる。また、最終的に1つの構造要素内の力学挙動を探る段階では、通常、鋼橋等の構造系は2次元要素より構成されているということを考えると、2次元モデルを取り扱えることが望ましい。しかし、この場合においては、3次元解析において有していた一部の自由度（例えば面外方向変位など）が、2次元解析においては評価できないという問題が生じる。 3-5節で、この問題についての検討を行う。

3. 数値実験及びその検討

3-1節では、多段階解析法の有意性を示す数値実験例を示し、3-2節以降では、2章で抽出した問題点に対して数値実験を行い検討を加える。なお、ここで取り扱うのは、主に鋼構造物の一部の構造要素内に発生する応力集中、あるいは、そこにあらかじめき裂を設定して特異な応力分布を発生させた問題である。

3-1 多段階構造解析法の有意性

中央き裂入り試験片（図3）を用いて多段階解析法を用いた場合と、そうでない場合の解の比較を試みる。メッシュ分割図を図4に、解析結果を表1に示す。なお、解の精度

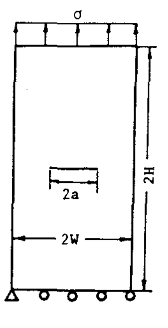
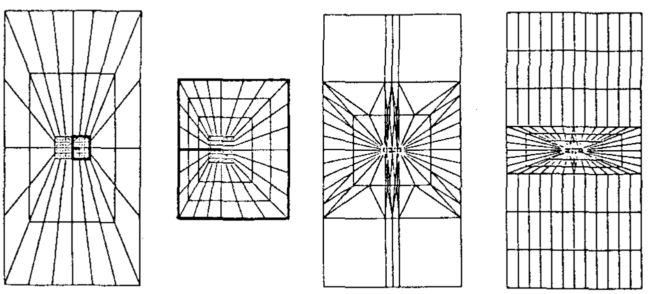


図3　中央き裂入り試験片



(a)　(b)　(c)　(d)

図4　メッシュ分割図

検定はき裂入り試験片に対しては、応力拡大係数値によって行うことにする。表1より明らかなように、多段階解析法を用いることは、解の精度向上につながるのみならず、計算時間および必要な計算機容量の軽減にも役立つと言える。

表1　多段階解析法の有無による解への影響

		解の精度(%)	節点数	CPU time (sec)	図4
多段階解析	全体領域解析	115.5	240	8.4	(a)
	部分領域解析	95.8	397	32.1	(b)
一括解析	節点数小	88.9	644	54.1	(c)
	節点数大	93.3	984	102.2	(d)

3-2 特異な応力分布状況を示す系の要素配列に対する検討

まず、一括解析が可能な程度のサイズの問題を取り扱い、特異応力分布状況を精度良く再現できるメッシュの配列等の検討を行う。このための例題として、片側き裂入り三点曲げ試験片（図5）を取り上げる。ここで、L,a,W をそれぞれ、き裂先端に配置する要素長、き裂長、モデル全幅とし、L/aおよび a/Wをパラメータとして数値実験を行った結果を図6および図7に示す。これより、L/a<0.1 で、また a/W>0.2で十分な精度が得られていると言える。しかし、L/a=0.1を満たすようなメッシュ分割を考えたとき、き裂長が長い場合、き裂先端要素長も大きくなることになる。そうなると、特異な応力状況を十分に表せるかどうかは疑わしい。文献3によれば、き裂先端要素長として、約 0.01cmから0.15cmまでが与えられている。

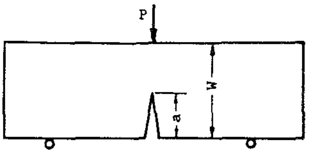


図5　片側き裂入り三点曲げ試験片

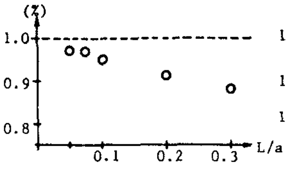


図6　L/aによる解への影響

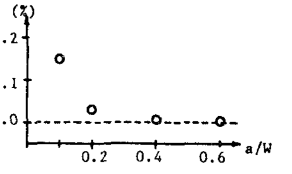


図7　a/Wによる解への影響

また、これらパラメータを決めるだけで解の精度が向上するわけではなく、同サイズの要素をき裂先端部に何層配置したかによっても解の精度が変わる。この検定のために使用するメッシュ分割（き裂部分）を図8に示す。図8-aは同一メッシュを 2層配置、bは 3層配置、c,dは3層配置でその周辺をさらに細かく分割したものである。解析した結果、精度は aのみ 62.7%となり、b,c,dは 94.9%となった。以上よりき裂先端部に同一メッシュを 3層配置することで十分な精度が得られ、周辺のメッシュ分割による影響はさほど出ないと言える。以後の数値実験では、ここで精度検定された要素配列をき裂先端部に適用する。

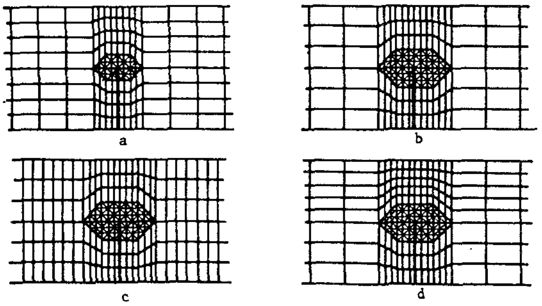


図8　き裂先端部の要素配置

3-3 部分解析領域の設定に関する検討

前節で精度検定を行った要素配列を採用し、部分解析領域の妥当なサイズついて検討を行う。この検討に用いる解析モデルを、図9に示す。まず、全体解析を行い、その内部に図１０に示すような約 10cmと 4cm程度の２つの部分領域を設定し、その部分領域につ

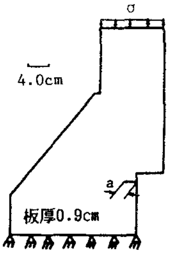
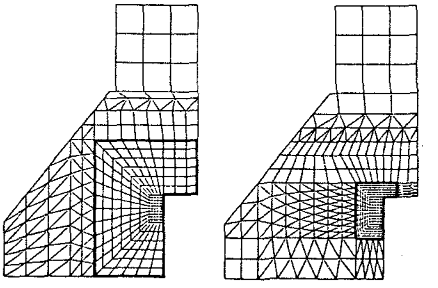


図9　ガセットプレートモデル



(a) 領域 10.0cm　(b) 領域 4.0cm

図１０　部分解析領域の設定

いては同一節点数（1150点）を用いた有限要素分割を行う。

部分解析領域の境界条件の与え方は、全体解析での解を用いた強制変位とし、補間法として、２次スプライン関数と１次関数の2種類を採用する。数値実験の結果（表２）より、この場合、部分解析領域の大きさは、あまりき裂先端部の解に影響しない。また、補間関数の違いもあまり解に影響を及ぼしていない。

表2　部分解析領域の設定による解への影響

部分領域		10cm	4cm
全体解析	K1	10.28408	−
	K2	0.32001	−
部分解析 スプライン による	K1	9.99239	9.94604
	K2	0.30566	0.29408
1次関数 による	K1	9.98804	9.94436
	K2	0.30502	0.29326

K:応力拡大係数(kg/mm$^{3/2}$)

ここで、より大きな系を想定してみたとき、次に示すような部分領域のサイズに関する結論を得る。いま、同一メッシュパターンで節点を配置すると、節点の増加は辺長の 2乗に比例して増加することになる。上記数値実験では、約1000節点の配置を行っており、もし、使用する計算機の容量より約 2000節点の配置が可能ならば、部分解析領域の 1辺長は 10cmから約 14cmとなることが予想される。すなわち、ここで述べた程度の精度を保障し得る解を求めようとするならば、部分領域のサイズには、計算機の容量等を考慮すれば自ずと上限が存在することになる。

次に、全体解析におけるき裂部分の必要最小限の分割数を考えてみる。例題として、三点曲げ試験片（図５）をモデルとして使用し、部分解析領域は変化させずに、全体解析において、き裂半長を 1分割、2分割、3分割して解析を行った結果、解の精度は、各々、97.8%,98.1%,98.0%となった。 それぞれともほぼ同程度の精度を示しているが、補間するに十分な節点数を考えると 2分割程度は少なくとも必要と言える。

さらに、特異応力部のメッシュの形状に対する解への影響を調べた。き裂部分のメッシュ分割図を図１１に示す。解析した結果、a; 97.5%, b; 98.1%, c; 97.0% となった。これより、特異応力部の要素形状は、直角二等辺三角形、すなわち、形状にひずみの少ない要素が望ましいと言える。

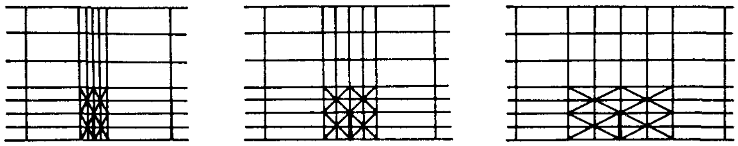


図１１　全体解析におけるき裂のメッシュ形状

3-4 補間関数に対する検討

用いたモデルは中央傾斜き裂入り帯板試験片（図１２）である。3-2節で得た結果を参考に、き裂全長（2a）を 4分割にして解析を行った結果を表３に示す。これより、補間関数による明らかな差は見出せない。また、表２からも、補間関数による解への影響は少ないと言えた。これは、前段階で求められた境界上の解（変位）が滑らかに変化しており、また、ガセット部の解析においては、境界よりき裂先端位置の間に十分な数の要素数が配置されているためと考えられ、１次関数を用いても十分に補間ができたことを表している。

表３　補間関数による解への影響

	解の精度(%) K1	K2	節点数
１次関数	98.2	98.0	
２次関数	98.2	97.4	397
２次スプライン関数	98.3	98.9	
一括解析	97.4	96.9	864

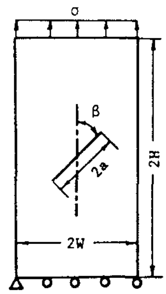


図１２　中央傾斜き裂入り帯板試験片

以上より、境界上の変位が滑らかになるような領域を確保することが重要であるが、さらに、滑らかな補間を行うという意味で、１次関数より２次スプライン関数を用いることは、より妥当な解を得るために有効であると言える。

3-5 3次元体の2次元モデル化に対する検討

ここでは、3次元解析の結果（応力）と2次元解析の結果を比較して、その2次元モデル化を検討する。しかしながら、橋梁構造のような3次元体においては前節までで取り扱った2次元体のように理論解が存在しないことより、ここでは各々の構造要素の力学的特性を十分に考慮し、さらに、適切な要素分割を行ったモデルを対象として、3次元解析をまず行い、必要に応じてその3次元部分構造について解析したものを基準値とする。このようにして得られた値を目標値として、元の構造系の 1部の構造要素（2次元体）の力学挙動が2次元モデルとして構築できるかどうかをここで検討する。

解析対象物として2本主桁のプレートガーダー橋を取り上げる。構造および荷重系の対称性を考慮して全体解析モデルを図１３のように設定した。全体の構造物に対して 1/4部分を解析の対象とし、多段階解析を 2回行って最終的にスカーラップ部（図１４）を解析した。なお、境界条件を表４に示す。荷重は、床版上に分布荷重（死荷重）を 0.106kg/cm²、図１３の E-E断面に線荷重（活荷重）を 25.0kg/cm載荷した。得られた結果の応力状況を図１５に示す。

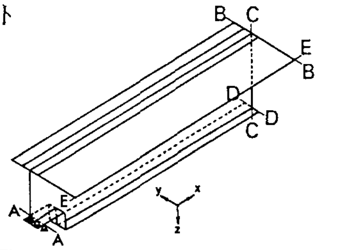


図１３　プレートガーダー橋の全体解析モデル

表４　境界条件

図１３に示した断面	与える境界条件
A - A	$v=0, w=0, \theta_x=0, (\theta_z=0)$
B - B	$u=0, \theta_y=0$
C - C	$u=0$
D - D	$u=0, \theta_y=0$
E - E	$v=0, \theta_x=0$
F	$v=0$

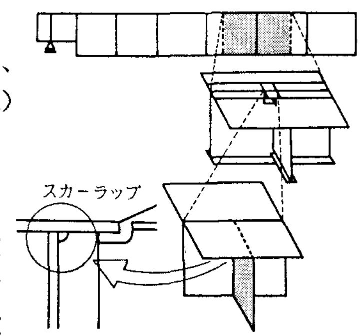


図１４　多段階解析

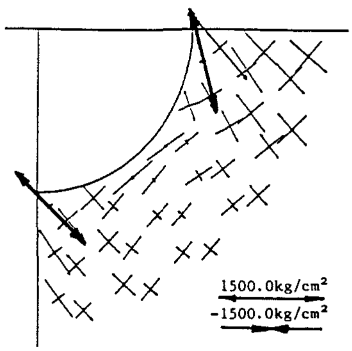


図１５　３次元解析による応力状況

次に、2次元モデル化を図１６のように行う。なお、主桁と床版の厚さについては、横桁および対傾構が3m間隔で設置されていることを考慮して、有効奥行きを 3mとしている。荷重は、その 3m間に載荷されている分布荷重と集中荷重の大きさの総和を与えた。多段階解析を 1回行い、スカーラップ近傍を取り出し解析した応力状況を図１７に示す。ここで明らかなように、3次元解析に比べ、引張りによる応力集中部においてその方向はかなり違ったものとなっている。その理由として、まず、面外方向へ力が伝わらないため、上載荷重が全てウェブやスティフナに伝わり、下部の支点（図１６の点 A）で構造物を支えるため、支点反力が生じている。このような力の流れから3次元モデルに比べ、スティフナはかなり圧縮されたと考えられる。以上より、3次元部分系と、ここで扱っている2次元モデルとの主応力の違いを大きく支配するのは、本来ならば存在しない下部仮想支点における反力の存在によると考えられ、3次元体内に位置する2次元体を取り扱う場合、単純にはその2次元モデルは作成できないことが明らかである。

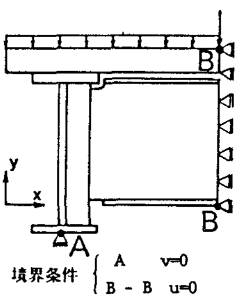


図１６　2次元モデル

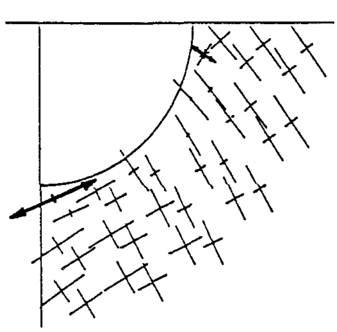


図１７　２次元モデルによる応力状況

ここで、この支点反力の影響を消してみることを考えてみよう。　その手法としては、橋軸方向に配置されている構造要素の、その長手軸方向の剛性をこれら構造要素全体に分配するのが妥当であると考えら

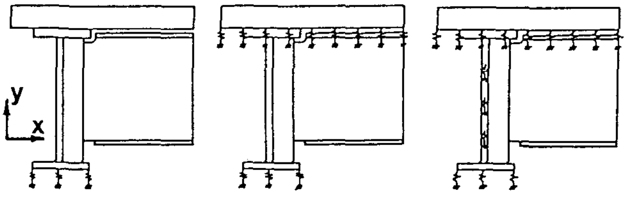
れ、ここで扱う2次元体を弾性支持することにする。この弾性支持の考え方として次の 3タイプを考える。

タイプ1: 主桁の曲げ剛性により算出したバネ定数を用いて下フランジの下端を支える（図18a）。

タイプ2: 主桁ウェブと下フランジの曲げ剛性により算出したバネ定数を用いて下フランジ下端を、主桁上フランジと床版の曲げ剛性により算出したバネ定数を用いて床版を支える（図18b）。

タイプ3: 主桁下フランジの曲げ剛性により算出したバネ定数を用いて下フランジ下端を、主桁ウェブの曲げ剛性により算出したバネ定数を用いてウェブを、主桁上フランジと床版の曲げ剛性により算出したバネ定数を用いて床版を支える（図18c）。

なお、弾性支持のためのバネ定数は単純ばりのたわみ曲線から算定した。これは、主桁が横桁間で単純支持されているとみなしたためである。ここで考えなければいけないことは、いま注目している部分（スカーラップ近傍）が、これら弾性支持点に近接していることより、その部分の応力値が、例えば床版、主桁、といった橋軸方向配置構造要素の剛性に大きく支配される点である。したがって、スティフナ・横桁と上記構造要素との剛比が問題となることは明らかである。



(a) タイプ1　(b) タイプ2　(c) タイプ3

図18　バネを用いた2次元モデル

そこで、これらの剛性を決定する奥行きについて検討を加えてみる。奥行きをパラメータとして数値解析を行った結果、どのタイプにおいても主桁および床版の奥行きが 9.0cmから 8.0cmとなるところで、最大主応力の方向が約 90度変化し3次元解析結果と全く違ったものとなる（図19）。よって、この場合においては、有効奥行き 8.0cmが妥当であると言える。

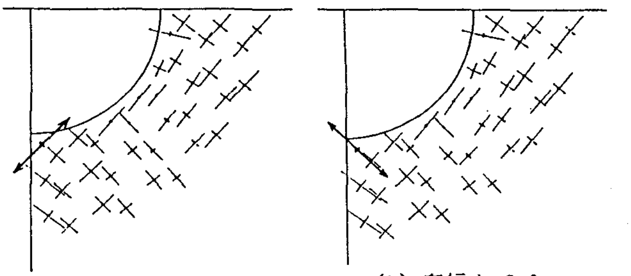

(a) 奥行き 9.0cm　(b) 奥行き 8.0cm

図19　奥行きをパラメータとした応力状況

しかし、前述したように、この有効奥行きはスティフナ・横桁と橋軸方向構造要素の剛比で決定されるので、構造体が変化すれば有効奥行きもまた変化することが予想される。そこで、

ケース1:主桁上フランジと横桁上フランジの連結（図20b）

ケース2:主桁ウェブ背面への鉛直スティフナの追加（図20c）

ケース3:主桁間中央の縦桁増設（図20d）

の 3ケースを用いてそれぞれ同様な解析を行ってみる。その結果、ケース1では有効奥行きが 14.0cmから15.0cmで、ケース2, 3では、10.0cmから 11.0cmで同様の主応力方向の変化が起きた。

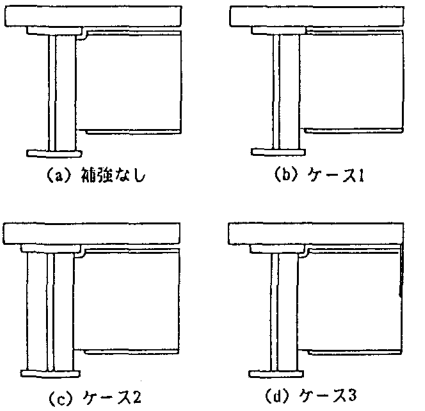

(a) 補強なし　(b) ケース1　(c) ケース2　(d) ケース3

図20　各種補強法

以上のことより、3次元体内に位置する2次元構造要素の2次元モデルを作成するにあたっては、橋軸方向構造要素の有効奥行き、分担荷重、弾性支持のためのバネ定数、等がパラメータとなり、さらにそれらが互いに関連しあっていることがうかがえる。これより、3次元体の内部に位置する2次元体を取り出し、それを2次元モデルとして設定する方法は一意的なものとはなり得ないことがわかる。

4. 結論

3章で行った数値実験の結果を要約すれば次のようになる。

① 有限要素法を用いて大規模系の中の小さな領域の応力状況等を正確に再現するには、多段階構造解析法が有効である。しかも、計算時間・計算機容量の軽減にも効果がある。

② 同一次元内では部分解析領域の大きさは、計算機の容量等の制約条件、および部分領域として取り扱う境界上に配置すべき節点数より決定される。

③ 部分領域に対する境界条件を設定する補間法については、ここで比較対象として扱った関数ではそれほどの大差は見あたらない。しかしながら、特にここで扱ったような特異応力分布が予想される部分領域に対しては、境界上の値をある程度滑らかにすることが必要であり、そのことより、2次スプライン関数程度は必要であろう。

④ 系の要素分割については、なるべくひずみの小さな要素分割が望ましく、特に、特異な応力分布が出現する領域においては、不可欠である。

⑤ 3次元体内の2次元構造要素を直接2次元モデルとして取り扱うことは、不確定因子を多く含むため困難である。

《参考文献》

1) 岡田 清 監訳： 橋梁その他構造物の損傷事例集、月刊土木施工6月臨時増刊号、山海堂、VOL 27, No 9, 1986.

2) 桜井 明 編著： スプライン関数入門、東京電機大学出版局、1981.

3) 鷲津 久一郎他 共編： 有限要素法ハンドブックⅡ（応用編）、培風館、pp.305-334, 1983.

4) 松本 肇： き裂解析のための有限要素モデルの設定に関する一考察、岡山大学工学部土木工学科特別研究、1987年

5) Takeo TANIGUCHI,K.SANADA,H.MATSUMOTO,K.MORIWAKI : Some Remarks on Finite Element Mesh Modeling of Crack-Tip Area ,OKAYAMA UNIV. 1987.

6) 鶴海 康雄： 3次元鋼構造物の応力解析に関する基礎的研究、岡山大学大学院工学研究科土木工学専攻修士論文、1988年

（1988年10月12日受付）