構造工学論文集 Vol.35A（1989年3月）　　土木学会

不飽和浸透流問題を指向した有限要素法による非定常解析法

A FINITE ELEMENT SCHEME FOR SATURATED-UNSATURATED FLOW IN DEFORMABLE POROUS MEDIA

吉田 裕*・汪 易森**・依知川 哲治***・佐々木 隆****

by Yutaka YOSHIDA, Yisen WANG, Tetsuji ICHIKAWA, and Takashi SASAKI

A finite element analysis of transient seepage flow in porous media is presented in this paper. The governing equations are based on the generalized Biot's consolidation theory in order to estimate the coupled deformation and fluid flow in porous media, and they are the equilibrium equation, Darcy's law and the continuity equation of saturated-unsaturated flow through the pores.

The solution variables of Galerkin models are the displacement of soil skelton as well as flow velocity and pore pressure. The finite element discretization can be performed with the use of linear triangular elements for the displacements and Darcy velocities, and the pore pressure can be assumed constant in each element.

In order to demonstrate the stability and accuracy of the proposed methods, several numerical examples of the seepage flow are shown. The stress fields of soil structures are calculated directly in addition to the fluid flow and pore pressure distribution.

1．はじめに

浸透流問題の解析は，熱伝導型の Richards Equation を支配方程式として全水頭あるいは圧力水頭のみを主変数とするのが一般的であり，解析対象領域の形状に柔軟に適応できることから，有限要素法による解析過程が広く応用されている[1-4]。不飽和領域を含む浸透流を対象とする場合には，大きく分けて２通りの対処の仕方がとられている。１つは，自由水面の移動による解析領域の変化を考慮しつつ，自由水面から下のみを解析対象にして飽和浸透流解析で対処する方法である。この場合には自由水面の位置を評価する手立てが必要となり，自由水面の移動に伴って要素分割を変える方法[3,4]，などこれまでに種々の手法が提案されてきている。もう１つは，飽和領域，不飽和領域を一括して取り扱う手法である。この場合には，比水分容量，透水係数，など不飽和領域における土の特性の変化を考慮するとともに，外水位の変動に伴う浸潤面の移動，など境界条件の変化に対応することが必要になる。全水頭あるいは圧力水頭のみを基本変数とする場合には，地盤内の全応力の分布が時間的に不変であるという仮定のもとで地盤変形が圧力水頭と結び付けられており，力のつり合い条件を陽な形では考慮していない。したがって，地盤の応力・変形に基づいた構造物の安定性評価，など，浸透流解析に関連する工学上の問題に直接的に対応することはできない。

---

* 東京工業大学教授　工学部土木工学科　　** 東京工業大学　客員研究員

*** 東京工業大学助手　工学部土木工学科　　**** 東京工業大学大学院　修士課程学生

（東京工業大学：〒１５２　東京都目黒区大岡山２丁目１２番１号）

圧密問題は，地盤内の間隙水の移動を地盤変形との連成問題としてとらえて，地盤内の流れを取り扱っており，Biotの圧密方程式系[5]をもとにした浸透流解析手法も展開されている[6]。圧密問題の解析[7-9]の場合には地盤の変形量の時間的変化が主な関心事であるから，地盤の応力状態が陽に考慮されるのは当然であるが，これに基づいて浸透流問題の解析法を構成する場合にも，基本変数として変位と圧力を用い，流速は得られる圧力分布から間接的に評価されるのが普通である。

本論文は，土構造物の安定性評価につながる地盤の応力・変形との連成を考慮するために，Biotの多次元圧密方程式系に基づいて構成した浸透流問題の解析法を提案するものである。この解析法においては，本来興味の対象となる流れ場を直接評価すること，および，浸潤面の移動などに伴う境界条件の変化に直接的に対応すること，などを目的として，変位・圧力に加えて流速を基本変数として導入している。これは，つり合い方程式，Darcy則， および連続条件式のそれぞれを直接有限要素法により離散化した結果可能となったものである。

2．基礎方程式

地盤内における応力は有効応力の原理を不飽和領域を含めて，次のように与えることができる。

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \chi p \delta_{ij} \tag{1}$$

ここにσ_{ij}は全応力，σ_{ij}' は有効応力，pは間隙水圧，およびδ_{ij}はKronecker Delta，である。

間隙水の流れはDarcy則に従うものとすれば，次のように与えることができる。

$$q_i = - k_{ij} (p_{,j} - \rho_w b_i) / \gamma_w \tag{2}$$

ここに，q_iは流速，ρ_wは間隙水の単位体積質量，b iは物体力，およびγ_wは間隙水の単位体積重量，である。式(1)は， Bishopによって提案された間隙流体の圧力の式を基に，Terzaghiの有効応力の原理を拡張して考られた式[6,10]である。χは土の中の飽和度，土の構造，乾燥－湿潤の過程，等の違いにより変わるパラメーターであるがここでは飽和度の違いによる値の変化に着目し，飽和度が圧力水頭と結び付けられることが多い[6,11]ので，ここでは，χは圧力pの関数で表わされるものとする。また，透水係数k_{ij}も不飽和領域においては，間隙に空気が入り込むため水の浸透に有効であった断面積が減少する等の理由により値が変化してくる。これも飽和度との関係が深いと考えられるため透水係数も圧力pの関数として表されるものとする。

力のつり合い条件式は次式のように与えられる。

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \tag{3}$$

ここに，ρは地盤材料の単位体積質量である。

間隙水の圧縮性は小さいとして，間隙水の密度変化を無視すると，質量保存の連続条件式は次式のように与えられる。

$$q_{i,i} = - \frac{c}{\gamma_w} \dot{p} - Sr \dot{\varepsilon}_v \tag{4}$$

ここに，ε_v は体積ひずみ，cは比水分容量，およびSrは飽和度，である。比水分容量および飽和度は，不飽和領域においては非線形な特性を持つが，ここではこれらも圧力pの関数として与えられるものとする。

式(4)の右辺第1項は圧力の変化によって土中に貯留される水量を表し，第2項は土骨格の変形による水分の排出量を表している。

地盤の骨格を弾性体と考え，微小ひずみを仮定すると，つぎのような応力・ひずみ関係式およびひずみ・変位関係式が与えられる。

$$\sigma'_{ij} = D_{ijkl} \; \varepsilon_{kl} \tag{5}$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) \, / \, 2 \tag{6}$$

式(1)，(5)，(6)，を考慮すると，式(3)は次のように書くことができる。

$$\{ \frac{1}{2} D_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k}) - \chi p \delta_{ij} \}_{,j} + \rho b_i = 0 \tag{7}$$

また，式(2)をつぎのように書き改める。

$$C_{ij} q_j + p_{,j} - \rho_w b_i = 0 \tag{8}$$

ここでは，力のつり合い条件式(7)，間隙水の流れを支配する式(8)，および連続条件式(4)の3つの式を支配方程式とする。

基本的な境界条件は，次の2組である。

1．力のつり合い式に対応してつぎの境界条件が与えられる。

力が規定される境界　$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad on \;\; \Gamma_t$　(9)

変位が規定される境界　$u_i = \bar{u}_i \quad on \;\; \Gamma_u$　(10)

2．Darcy則に対応してつぎの境界条件が与えられる。

間隙水部分にかかる力が規定される境界　$p = \bar{p} \quad on \;\; \Gamma_p$　(11)

流速が規定される境界　$q_i = \bar{q}_i \quad on \;\; \Gamma_q$　(12)

$\bar{u}_i$，$\bar{q}_i$はそれぞれ既知変位と既知流速を表わし，$\bar{t}_i$は土の骨格に作用する力と間隙水部分に作用する力の和，$\bar{p}$は間隙水部分に作用する力，n_iは境界面の外向き法線の方向余弦である。

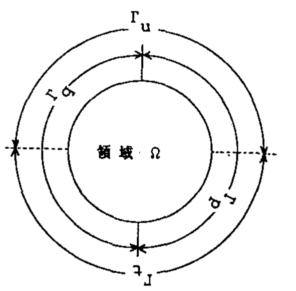
全境界をΓで表すと，これらの境界に対してつぎの関係が成り立つ。

$$\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset \tag{13}$$

$$\Gamma_t \cup \Gamma_u = \Gamma \tag{14}$$

$$\Gamma_p \cap \Gamma_q = \emptyset \tag{15}$$

$$\Gamma_p \cup \Gamma_q = \Gamma \tag{16}$$



図－1　境界の概念図

3．有限要素方程式の誘導

(7)，(8)，(4)に対して，それぞれ変位分布，流速分布，間隙水圧分布を重み関数として，つぎのような重み

付き残差式を得ることができる。

$$\int\int_{\Omega}\delta u_{i,j}\left(\frac{1}{2}D_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k})-\chi p\delta_{ij}\right)d\Omega-\int\int_{\Omega}\delta u_i\rho b_i d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta u_i\bar{t}_i d\Gamma=0 \tag{17}$$

$$\int\int_{\Omega}\delta q_i C_{ij}q_j d\Omega-\int\int_{\Omega}\delta q_{i,i}p d\Omega-\int\int_{\Omega}\delta q_i\rho_w b_i d\Omega+\int_{\Gamma_p}\delta q_i\bar{p}n_i d\Gamma=0 \tag{18}$$

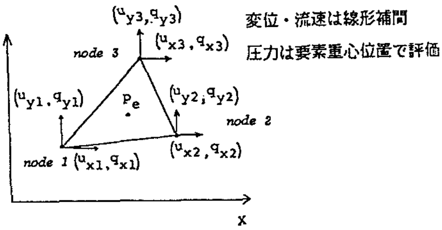
$$\int\int_{\Omega}\delta p\, q_{i,i}d\Omega+\int\int_{\Omega}\delta p\, Sr\,\dot{u}_{i,i}d\Omega+\int\int_{\Omega}\delta p\frac{c}{\gamma_w}\dot{p}d\Omega=0 \tag{19}$$

Biotの圧密方程式系に基づき，変位，間隙水圧を基本変数として定式化を行う場合には，Darcy則(式(2))と連続条件式(式(4))より流速を消去して得られる微分方程式を対象とするのが普通である。この場合には間隙水圧が空間に関する２階の微分となるために，間隙水圧分布に関して１次以上の補間関数を用いる必要があり，これと対応して変位分布には２次以上の補間関数が用いられるのが一般的である。ここでは，流速を基本変数として導入してDarcy則を直接離散化した結果， 変位および流速に関しては線形補間を，間隙水圧に関しては要素内一定の補間を用いることが可能となっている。本論文では２次元問題を対象として変位および流速を要素内線形分布，圧力は一定の補間関数を用いて三角形要素を構成している(図－２)。有限要素マトリックス方程式は，式(17)，(18)，(19)に基づいてつぎのように得ることができる。

$$[K]\{u\}-[KpS]\{p\}=\{F\} \tag{20}$$

$$[M]\{q\}-[Kp]\{p\}=\{Q\} \tag{21}$$

$$[TKp^T]\{\dot{u}\}+[Kp^T]\{q\}+[C]\{\dot{p}\}=\{0\} \tag{22}$$



図－２　解析に用いる三角形要素

ここに，[K]は土の骨格の剛性マトリックス，[M]は間隙水の透水性に関するマトリックス，[T] は飽和度に関するマトリックス，[S]はパラメーターχに関するマトリックス，[C]は貯留性に関するマトリックス，[Kp]は空間の勾配に関するマトリックスである。[M]，[T]，[S]，[C]は不飽和領域において圧力の関数となるマトリックスである。

変位および流速の成分のうち境界条件により規定されるものを未知成分と区別して，式(20)～(22)を書き改めるとつぎのように書くことができる。

$$\begin{bmatrix} M_{33}M_{34} \\ M_{43}M_{44} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_3 \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix}-\begin{bmatrix} Kp_3 \\ Kp_4 \end{bmatrix}\{p\}=\begin{Bmatrix} \bar{Q}_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}K_{12} \\ K_{21}K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}-\begin{bmatrix} Kp_1S \\ Kp_2S \end{bmatrix}\{p\}=\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

$$[TKp_1^T\ \ TKp_2^T]\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{\bar{u}}_2 \end{Bmatrix}+[Kp_3^T\ \ Kp_2^T]\begin{Bmatrix} q_3 \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix}+[C]\{\dot{p}\}=\{0\} \tag{25}$$

ここに，既知のベクトルには上にバーを付している。

4．逐次求解過程の構成

式(25)の時間微分項に対して次式のような差分形式の公式を適用する。

$$\dot{u}^{n+\alpha} = (u^{n+1}-u^{n})/\Delta t \tag{26}$$

$$\dot{p}^{n+\alpha} = (p^{n+1}-p^{n})/\Delta t \tag{27}$$

$$u^{n} = u(t_n)\ ,\ t_{n+1} = t_n+\Delta t\ ,\ t_{n+\alpha} = t_n+\alpha\Delta t\ ,\ 0 \leqq \alpha \leqq 1$$

これに伴い各変数も次のように表わす。

$$u^{n+\alpha} = u^{n}+\alpha(u^{n+1}-u^{n}) \tag{28}$$

$$q^{n+\alpha} = q^{n}+\alpha(q^{n+1}-q^{n}) \tag{29}$$

$$p^{n+\alpha} = p^{n}+\alpha(p^{n+1}-p^{n}) \tag{30}$$

式(23)および(24)の上側の式のみをとりだすとそれぞれ次式のようになる。

$$[K_{11}]\{u_1\} - [Kp_1S]\{p\} = \{\overline{F}_1\}-[K_{12}]\{\overline{u}_2\} \tag{31}$$

$$[M_{33}]\{q_3\} - [Kp_3]\{p\} = \{\overline{Q}_3\}-[M_{34}]\{\overline{q}_4\} \tag{32}$$

これらの式と式(25)に式(26)～(30)を代入して時刻 t_n における既知変数ベクトルから時刻 t_{n+1} における未知変数を求めるための時間積分関係式がつぎのように得られる。

$$\begin{bmatrix} \alpha K_{11} & 0 & -\alpha Kp_1S \\ 0 & \alpha M_{33} & -\alpha Kp_3 \\ \Delta t^{-1}TKp_1^T & \alpha Kp_3^T & \Delta t^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n+1} \\ q_3^{n+1} \\ p^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta K_{11} & 0 & \beta Kp_1S \\ 0 & -\beta M_{33} & \beta Kp_3 \\ \Delta t^{-1}TKp_1^T & -\beta Kp_3^T & \Delta t^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n} \\ q_3^{n} \\ p^{n} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{F}_1^{n+\alpha} - K_{12}\overline{u}_2^{n+\alpha} \\ \overline{Q}_3^{n+\alpha} - M_{34}\overline{q}_4^{n+\alpha} \\ -TKp_2^T\overline{u}_2^{n+\alpha} - Kp_4^T\overline{q}_4^{n+\alpha} \end{Bmatrix}$$

$$\beta = 1 - \alpha \tag{33}$$

式(33)が本論文で提案する積分漸化式であるが，これに基づいて，時刻 t_0 における変数 u^0，q^0，p^0 から出発し，Step-by-stepに解を求めていくことができる。

飽和領域のみを対象とする場合には，χ は1に固定され，比水分容量 c は0となり，透水係数 k_{ij} も定数となるので，$[TKp^T]$ は $[Kp^T]$，$[KpS]$ は $[Kp]$ となり，$[C]$ は零となるから，式(33)式は対称な係数マトリックスによる次のような積分漸化式に変換することができる。

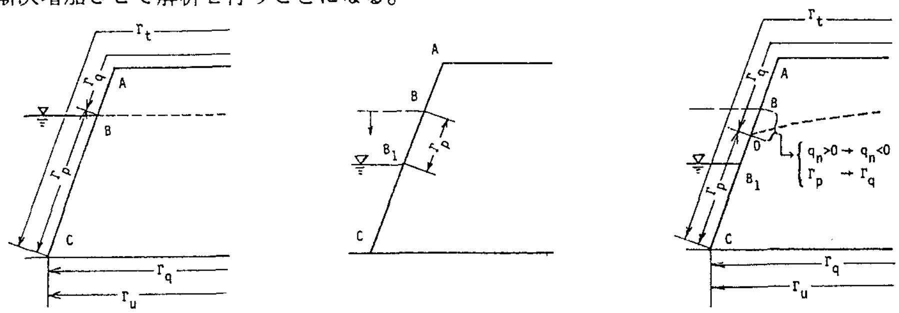
$$\begin{bmatrix} -\alpha\Delta tK_{11} & 0 & Kp_1 \\ 0 & -M_{33} & Kp_3 \\ Kp_1^T & Kp_3^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta t^{-1}u_1^{n+1} \\ -\alpha q_3^{n+1} \\ -\alpha p^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\Delta tK_{11} & 0 & Kp_1 \\ 0 & -M_{33} & Kp_3 \\ Kp_1^T & Kp_3^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta t^{-1}u_1^{n} \\ \beta q_3^{n} \\ \beta p^{n} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \overline{F}_1^{n+\alpha} - K_{12}\overline{u}_2^{n+\alpha} \\ \overline{Q}_3^{n+\alpha} - M_{34}\overline{q}_4^{n+\alpha} \\ Kp_2^T\overline{u}_2^{n+\alpha} + Kp_4^T\overline{q}_4^{n+\alpha} \end{Bmatrix} \tag{34}$$

なお，差分公式における係数 α は公式を一般化するために導入される係数であるが，$\alpha=1/2$ の場合が中央差分公式に相当し，本文の解析例はすべて $\alpha=1/2$ として解析したものである。

5．浸潤面の移動による境界の修正について

飽和-不飽和領域を一括して対象とし，非定常解析を行なう場合には，外水位および外荷重の変化，および浸潤面の移動に伴う境界条件の修正が必要になる。ここに提案する積分漸化式の場合には，変位および流速を基本変数として導入しているため２組の独立な境界条件を考慮することができ，流量拘束の条件に直接的に対応することができる。

ここで，外水位が降下する際の堤体の浸透流解析を例にして，境界の修正の手順を説明する。図－３(a)のように，時刻$t=t_0$において外水位がＢ点の位置にあり，堤体内の自由水面は外水位に等しいとした時，境界は図中に示すように分類できる。図－３(b)のように，時刻$t=t_1$において外水位がB_1点に下がった場合を考えると時刻$t=t_1$では浸潤線がBB_1上のどこかにくる事が予想され，Γ_p，Γ_qの境目が変化することになるが，$t=t_0$の時点では特定することはできない。したがって，時刻t_0の状態から時刻t_1での状態を計算する際には，BB_1間は時刻t_0で定まった境界Γ_pとして，時間積分計算を行なう。得られた$t=t_1$における結果に基いて，BB_1上の外向き方向の流速q_nを評価し，q_nが負である領域は浸潤面より上であると判断し図－３(c)のように境界を修正する。１時間積分ステップにおける外水位の変化をある程度小さい範囲に抑えて，逐次積分過程で漸次増加させて解析を行うことになる。



(a)　時刻t_0における境界　(b)　時刻t_0からt_1の解を求める際の境界　(c)　時刻t_1における解に基づいた境界の修正

図－３　浸潤面の移動による境界の修正

6．数値解析例

［１］１次元飽和浸透流問題

対象とした問題は，図４に示す直立堤体内の準１次元浸透流である。これは，x=0 において水位がＨだけ急激に上昇し，堤体内の滞水層の水頭が変化する問題であり，式(35)のようなDupuitの仮定が成り立つ場合である。すなわち，自由水面の勾配がゆるやかで，流れの方向がほぼ水平方向の場合である。

この問題に関する水頭の解析解は，式(36)に示すように誤差関数を用いて与えられている。この式(40)とDarcy則より水平方向流速の解析解も式(37)のように得られる。本解析においては，上昇分の水頭ｈを間隙水圧ｐに対応させて考え，図５のような解析モデルを用いた。

諸定数は表１に示す通りである。図６に要素ａ～ｄにおける間隙水圧の時間変化を，図７に節点１～３における水平方向の流速の時間変化を解析解と比較して示した。

$$H \ll H_0 \tag{35}$$

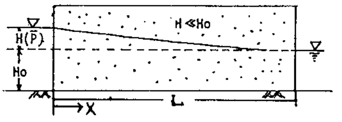
$$\frac{h(x,t)}{H} = \sum_{n=0}^{\infty} [Erfc(\xi)-Erfc(\eta)] \tag{36}$$

$$\xi = \frac{2n+\frac{x}{L}}{2\sqrt{T_0}}, \quad \eta = \frac{2(n+1)-\frac{x}{L}}{2\sqrt{T_0}}, \quad T_0 = \frac{kt}{r_w(\alpha+n\beta)L^2}$$

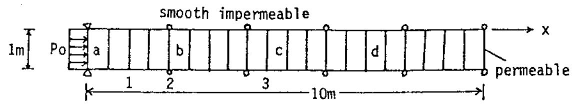
$$q(x,t) = \frac{kH}{L\sqrt{\pi T_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\xi^2} + e^{-\eta^2}\right) \qquad (37)$$

表－1　材料定数等

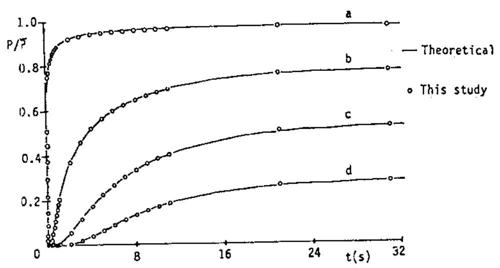
透水係数	1.0x10⁻²(cm/sec)	ポアソン比	1/3
ヤング係数	1.0x10³(kgf/cm²)	載荷圧	$\bar{P}$ =0.1(kgf/cm²)



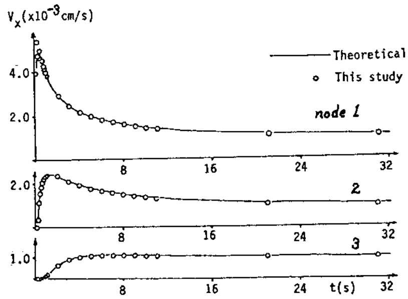
図－4　解析対象（直立堤体）



図－5　解析モデル



図－6　各要素内の間隙水圧の時間変化

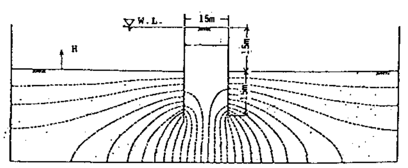


図－7　各節点での流速の時間変化

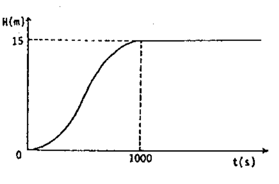
[2] 2次元飽和浸透流の解析例

図8に示すような，2枚の矢板によって締め切られた2次元流れの解析を行った。この問題は斎藤ら[12]によって定常状態における等ポテンシャル線が得られており（図8），解を比較するために解析対象として選んだものである。解析に用いた要素分割を図9に示す。矢板の左側の水位に相当する水圧を外力として与えて解析したが，外力は10ステップで0から立ち上げた後，一定として定常状態に至る3000秒間の解析を行ったものである（Δt=100秒）。得られた，等間隙水圧線図，流速ベクトル図，変形図，有効応力の主応力図を図11～14に示す。

t=3000(sec)においてはほぼ定常状態に達しており，図11の間隙水圧線図は図8の等ポテンシャル線図に対応するものである。



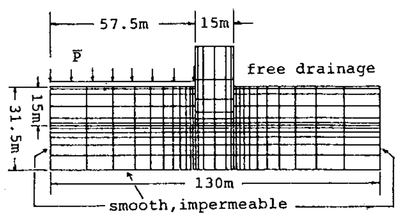
図－8　解析対象と等ポテンシャル線[12]



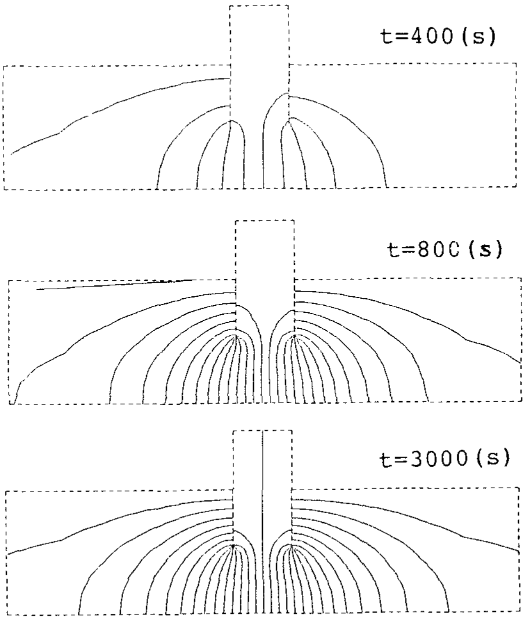
図－10　水位の上げ方

表－2　材料定数

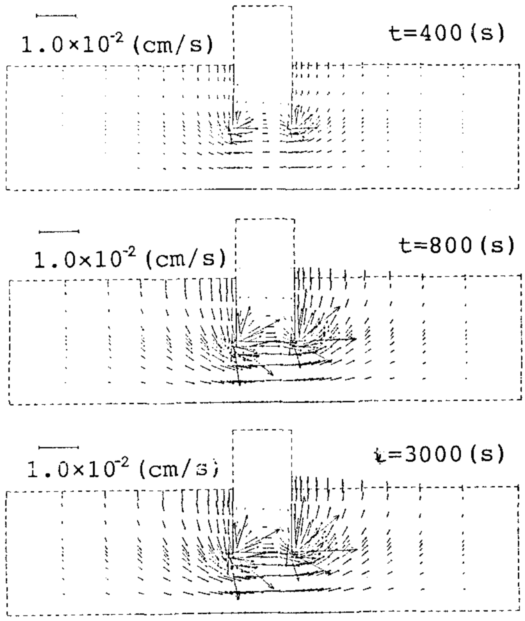
透水係数	1.7x10⁻²(cm/sec)
ヤング係数	1.0x10³(kgf/cm²)
ポアソン比	1/3



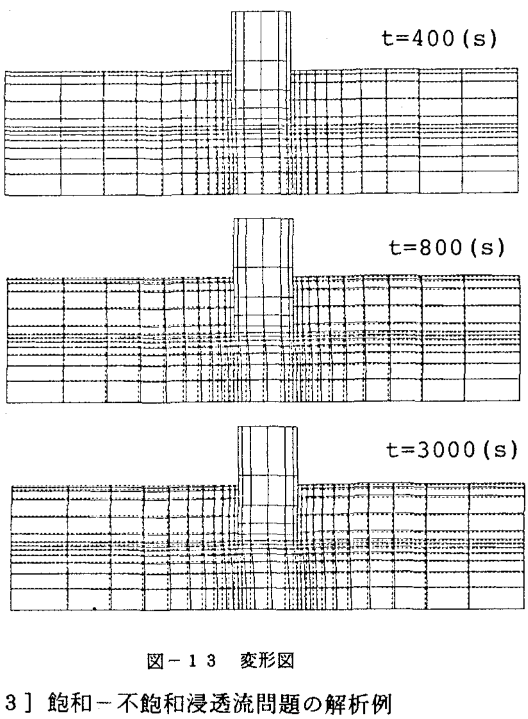
図－9　要素分割図



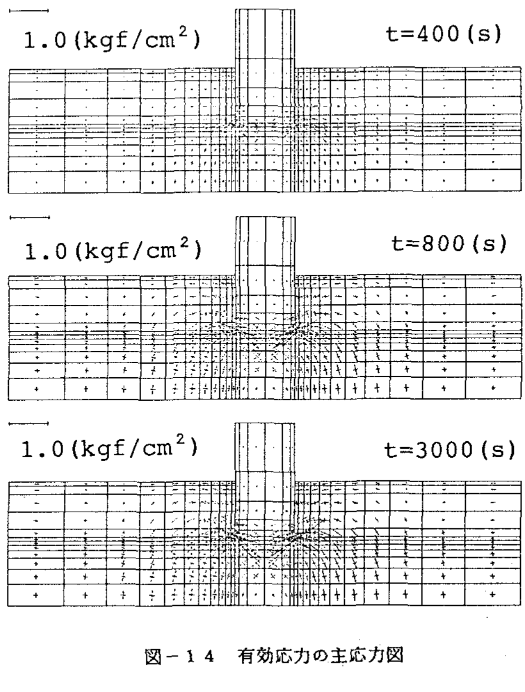
図－１１　間隙水圧線図



図－１２　流速ベクトル図



図－１３　変形図



図－１４　有効応力の主応力図

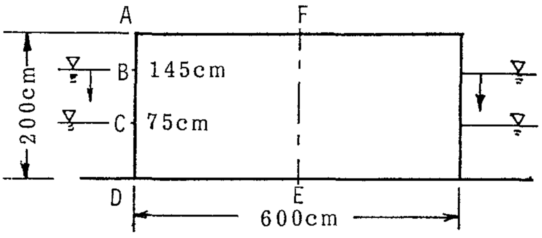
［３］飽和－不飽和浸透流問題の解析例

飽和領域，不飽和領域を一括して対象とした例として，図１５に示すような長さ600cm，高さ200cmの矩形堤体の左右の水位が145cmから75cmに降下した場合の，堤体内の水の移動を解析した。この問題はVauclinらによって実測結果が与えられたものである[13]。対称性を考慮して左半分の領域を解析対象とした（図１６）。不飽和領域の特性を表す相対透水係数ｋｒおよび飽和度Ｓｒの圧力水頭ϕ（$\phi = p/\gamma_w$）との関係は文献[3,14]を参照して，図１７，１８のように与えた。解析は１積分ステップ毎に要素の材料特性および境界の確認を行

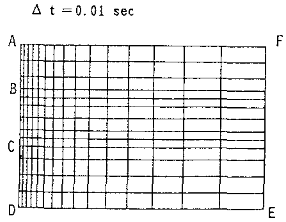
い，係数マトリックスをつくり直して計算を行ったために，相当な計算時間を要し，20秒程度の現象の解析にとどめた。文献に与えられた実測結果は0.1時間程度以降のもので直接比較するに至っていないが，参考のために得られた等間隙線図を図１９に示した。

表－３　透水係数

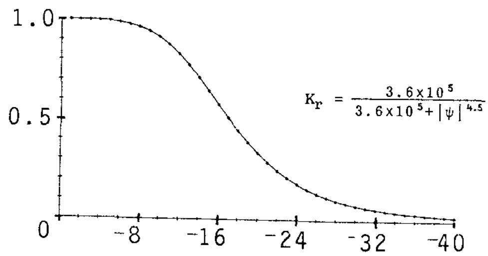
	飽和領域	不飽和領域
透水係数 k	1.11×10^{-2} cm/s	k × kr



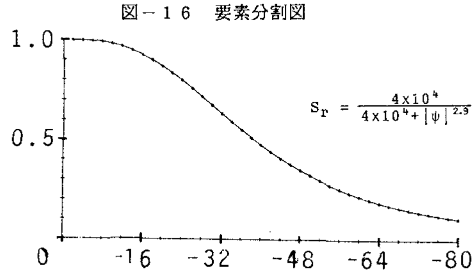
図－１５　解析対象（水位降下問題）



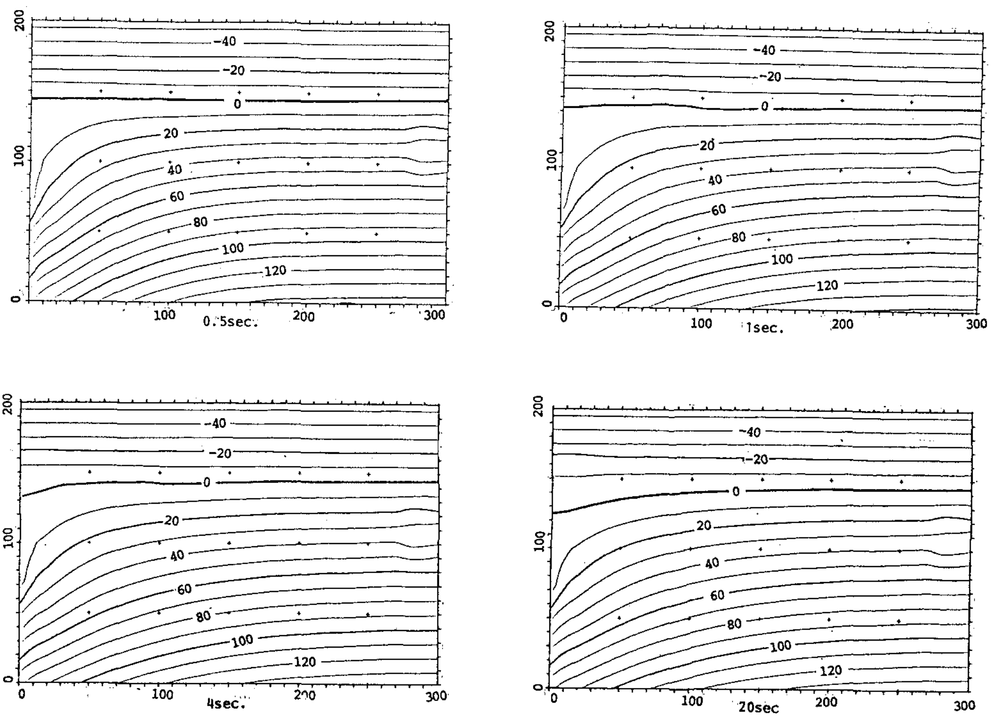
図－１６　要素分割図



図－１７　圧力水頭と相対透水係数の関係



図－１８　圧力水頭と飽和度の関係



図－１９　各時刻における等間隙水圧線図

7．おわりに

地盤の変形と流れを連成問題として扱った，浸透流問題の解析法を構成することができた。力のつり合い式,Darcy則，連続条件式のそれぞれに対し有限要素法による空間の離散化を施し，差分型の時間積分公式を適用して構成した解析法であるが，変位，.流速，間隙水圧を基本変数とて導入しているために間隙水圧の分布だけでなく変位および流速場をも直接評価できる解析法になっている。解析例を通してその妥当性を検証したが，浸潤面の移動等を考慮するためには，境界における流速の値に基づいた判断が必要になるので，特に，不飽和領域を一括して解析する場合には，流速を基本変数として導入している利点が有効になると考えている。

参考文献

1) S.P.Neuman : Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements, ASCE, HY12, December, 1973

2) G.E.Taylor and J.N.Luthin : Computer Methods for Transient Analysis of Water Table Aquifers, Water Resources Research, Vol.5, February, 1969

3) S.P.Neuman and P.A.Witherspoon : Analysis of Nonsteady Flow with a Free Surface Using the Finite Element Method, Water Resources Reserch, Vol.7, No.3, June, 1971

4) P.W.France, C.J.Parekh, J.H.Perters and C.Taylor: Numerical Analysis of Free Surface Problems, ASCE, IR1,March,1971

5) M.A.Biot : General Theory of Tree Dimensional Consolidation, J. Appl. Phys., Vol.12,February 1941

6) 大西・村上：有限要素法による地盤の応力・変形を考慮した浸透流解析，土論集，第298号，1980年6月

7) G.Krause : Finite Element Schemes for Porous Elastic Media, ASCE, EM3, June, 1978

8) R.S.Sandhu and E.L.Wilson : Finite-Element Analysis of Seepage in Elastic Media, ASCE, EM3, June, 1969

9) Y.Yokoo, K.Yamagata and H.Nagaoka : Finite Element Method Applied to Biot's Consolidation Theory, Soils and Foundations, Vol.11, No.1, March, 1971

10) T.N.Narasimhan and P.A.Witherspoon : Numerical Models for Saturated-Unsaturated Flow in Deformable Porous Media, Water Resources Research, Vol.13, No.3, June, 1977

11)A.B.Gureghian: A Two-Dimensional Finite Element Solution Scheme for the Saturated-Unsaturated Flow with Applications to Flow through Ditch-Drained Soils, J. of Hydrol., 50, 1981

12) 斎藤・藤原：流線網の求め方の実例とそれらの問題点，土と基礎，1973-8

13) M.Vauclin, G.Vachaud and D.Khanji : Two dimensional numerical analysis of transient water transfer in saturated-unsaturated soils, Modelling and Simuration of Water Resources Systems, Edited by G.C.Vansteenkiste, North Holland Publishing Co., 1975

14) T.N.Narasimhan, S.P.Neuman and P.A.Witherspoon : Finite Element Method for Subsurface Hydrology Using a Explicit-Implicit Scheme, Water Resources Reseach,Vol.14, No.5, October, 1978

（１９８８年１０月１２日受付）