

有限帯板法によるランガードプレートの応力解析

Stress Analysis of Langered Plates by Means of Finite Strip Method.

岩崎 正二* 能町 純雄** 木田 哲量***

By Shoji IWASAKI, Sumio NOMACHI and Tetsukazu KIDA

To deal with the mixed boundary problem of rectangular plate bending by FSM, formulas for boundary forces at the ends on the long side of the strip are introduced by means of Finite Fourier Integral Transforms in the long side direction and Finite Fourier Integration Transforms in the cross wise direction. As numerical examples with these formulas, stresses in the rectangular plate with two opposite sides simply supported and remaining two free sides and the rectangular plate supported by Langer frame at it's two opposite sides, are analyzed.

1. ま え が き

床版が逆ランガーで支持されている構造は、設計に際しては一般に平面的な逆ランガー桁として解析されている。しかし、床版の長さに対する幅の割合が大きくなった場合には、ランガー桁として取り扱うよりも、ランガードプレートと考えて解析することが望ましい。本論文はランガードプレートの床版部分に有限帯板法を適用し、この逆ランガー形式の構造系を立体的に解析しようとするものである。

従来の有限帯板法で矩形平板の曲げ問題を取り扱う場合、未知変位は各分割節線の変位成分となるため、有限要素法に比べて未知変位を少なくできる利点がある反面、節線変位などをフーリエ級数で近似しているため境界条件に一定の制限を受けた。本論文で用いる有限帯板法は従来の帯板法とは異なり、まず有限フーリエ変換¹⁾を利用して帯板要素の剛性方程式を誘導する。このとき剛性方程式の未知変位は帯板要素辺の境界値のフーリエ変換値のみでなく隅点の境界値を含めたものとなる。これにより任意の境界条件を有する矩形平板の解析が可能となる。

ランガードプレートの解析にあたっては床版部分にこの帯板公式を適用する。各節線でのつりあい条件式から全体の節線に関する剛性方程式を一方向の連立差分方程式の形で求め、各節線変位についてこの基本式をフーリエ定和分変換²⁾により解いた。その際、式に含まれる未知の要素隅点境界値は、境界辺における各帯板要素隅点での曲率の連続性を表わす式と、同じく要素隅点でのモーメント及びせん断力のつりあい式

* 工修 岩手大学助手 工学部土木工学科 (〒020 盛岡市上田4丁目3-5)

** 工博 日本大学教授 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町1丁目2-1)

*** 工修 日本大学助教授 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町1丁目2-1)

を用いて求めた。

このように本論文の目的は、帯板要素隅点の境界値を考慮した有限帯板要素公式を導きこの公式による矩形平板の解法を示すとともに、この解法をもちいてランガードプレートの変位及び断面力分布を求め、ランガードプレートの弾性挙動を明らかにしようとするものである。なお有限帯板法によるランガードプレートの解析には、大島³⁾、高橋⁴⁾らの研究がある。

2. 解析理論

2.1 有限帯板要素公式

解析モデルとしたランガードプレートは図-1のように $y=0$ 、 ℓ' 辺で単純支持、 $x=0$ 、 ℓ 辺ではランガー鉛直材で支持されている。有限帯板法による解析では、まず対象とする床版部分を n 個の帯板要素に分割し、力学的にこれを再構成し解析を行なう。

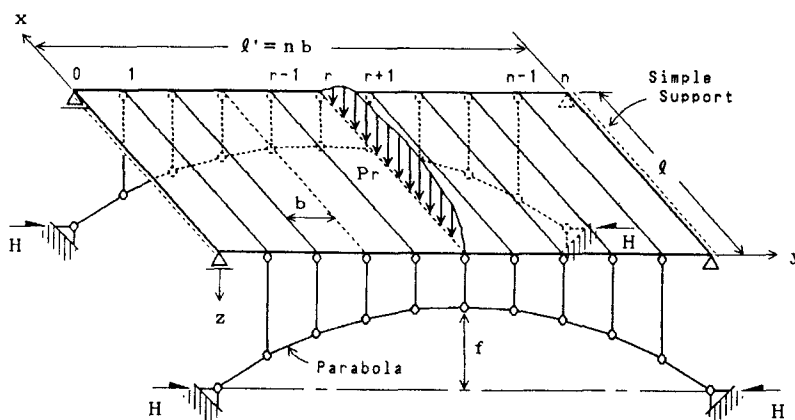


図-1 逆ランガー支持床版構造（ランガードプレート）

いま、図-2に示すような長さ ℓ 、幅 b 、厚さ h の任意の帯板要素において、 z 方向変位を w 、 y 方向たわみ角を θ とする。 r 辺、 $r+1$ 辺の節線力を $\{Q_{r \cdot r+1}, M_{r \cdot r+1}, Q_{r+1 \cdot r}, M_{r+1 \cdot r}\}^T$ で表わし、これらの節線力に対応する節線変位を $\{w_r, \theta_r, w_{r+1}, \theta_{r+1}\}^T$ とする。ただし Q は等価せん断力を表わす。ここで帯板要素内の任意点のたわみを次のように仮定する。

$$w = f_1(\eta)w_r + f_2(\eta)\theta_r + f_3(\eta)w_{r+1} + f_4(\eta)\theta_{r+1}$$

ここで $f_1(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$,

$f_2(\eta) = b(\eta - 2\eta^2 + \eta^3)$, $f_3(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3$,

$f_4(\eta) = b(\eta^3 - \eta^2)$, $\eta = y/b$

面外変形に対する基礎微分方程式に式(1)の試験関数 f_k を用いてガラーキン法を適用すると

$$\int_0^b \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + P \right) f_k dy = 0 \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

ただし、 M_x 、 M_y は y 軸、 x 軸まわりの曲げモーメント、 M_{yx} はねじりモーメント、 P は分布外力を表わす。

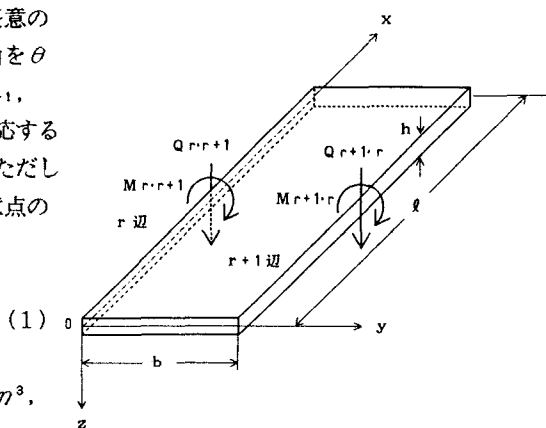


図-2 帯板要素の局所座標

断面力と曲率の関係式は

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

ここで、D、E、 ν はそれぞれ板の曲げ剛性、ヤング率、ポアソン比を表わし、 $D = E h^3 / 12(1-\nu^2)$ 。

式(3)を式(2)に代入し、部分積分を施すと、次のようなxに関する4階の線形連立偏微分方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} Q_{r \cdot r+1} \\ M_{r \cdot r+1} \\ Q_{r+1 \cdot r} \\ M_{r+1 \cdot r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & -K_{14} & K_{24} \\ \text{Sym.} & & K_{11} & -K_{12} \\ & & & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r \\ \theta_r \\ w_{r+1} \\ \theta_{r+1} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで

$$\begin{aligned} K_{11} &= D \left(\frac{13}{35} b \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{12}{5b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{12}{b^3} \right), \quad K_{12} = D \left(\frac{11}{210} b^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{5} + \nu \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{6}{b^2} \right), \\ K_{13} &= D \left(\frac{9}{70} b \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{12}{5b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{12}{b^3} \right), \quad K_{14} = D \left(-\frac{13}{420} b^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{1}{5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{6}{b^2} \right), \\ K_{22} &= D \left(\frac{1}{105} b^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{4}{15} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{b} \right), \quad K_{24} = D \left(-\frac{1}{140} b^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{1}{15} b \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{b} \right) \end{aligned}$$

上式においては、帯板要素内で荷重が作用していないとしている。

式(4)に $\sin(m\pi x/\ell)$ を乗じ $0 < x < \ell$ で有限フーリエ変換を施すと次式が求まる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} S_m[Q_{r \cdot r+1}] \\ S_m[M_{r \cdot r+1}] \\ S_m[Q_{r+1 \cdot r}] \\ S_m[M_{r+1 \cdot r}] \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & -k_{14} & k_{24} \\ \text{Sym.} & & k_{11} & -k_{12} \\ & & & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_m[w_r] \\ S_m[\theta_r] \\ S_m[w_{r+1}] \\ S_m[\theta_{r+1}] \end{Bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} & \ell_{14} \\ & \ell_{22} & -\ell_{14} & \ell_{24} \\ \text{Sym.} & & \ell_{11} & -\ell_{12} \\ & & & \ell_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r^0 \\ \theta_r^0 \\ w_{r+1}^0 \\ \theta_{r+1}^0 \end{Bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} & \ell_{14} \\ & \ell_{22} & -\ell_{14} & \ell_{24} \\ \text{Sym.} & & \ell_{11} & -\ell_{12} \\ & & & \ell_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r^\ell \\ \theta_r^\ell \\ w_{r+1}^\ell \\ \theta_{r+1}^\ell \end{Bmatrix} \\ &+ \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ & m_{22} & -m_{14} & m_{24} \\ \text{Sym.} & & m_{11} & -m_{12} \\ & & & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_r^0 \\ \ddot{\theta}_r^0 \\ \ddot{w}_{r+1}^0 \\ \ddot{\theta}_{r+1}^0 \end{Bmatrix} - (-1)^n \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ & m_{22} & -m_{14} & m_{24} \\ \text{Sym.} & & m_{11} & -m_{12} \\ & & & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_r^\ell \\ \ddot{\theta}_r^\ell \\ \ddot{w}_{r+1}^\ell \\ \ddot{\theta}_{r+1}^\ell \end{Bmatrix} \quad (5) \end{aligned}$$

ここで $S_m[Q_{r \cdot r+1}] = \int_0^\ell Q_{r \cdot r+1}(x) \sin \frac{m\pi}{\ell} x dx$ 他もこれに準ずる。

$$\begin{aligned} k_{11} &= D \left(\frac{13}{35} b \alpha^4 + \frac{12}{5b} \alpha^2 + \frac{12}{b^3} \right), \quad k_{12} = D \left(\frac{11}{210} b^2 \alpha^4 + \left(\frac{1}{5} + \nu \right) \alpha^2 + \frac{6}{b^2} \right), \\ k_{13} &= D \left(\frac{9}{70} b \alpha^4 - \frac{12}{5b} \alpha^2 - \frac{12}{b^3} \right), \quad k_{14} = D \left(-\frac{13}{420} b^2 \alpha^4 + \frac{1}{5} \alpha^2 + \frac{6}{b^2} \right), \\ k_{22} &= D \left(\frac{1}{105} b^3 \alpha^4 + \frac{4}{15} b \alpha^2 + \frac{4}{b} \right), \quad k_{24} = D \left(-\frac{1}{140} b^3 \alpha^4 - \frac{1}{15} b \alpha^2 + \frac{2}{b} \right), \\ \ell_{11} &= D \left(\frac{13}{35} b \alpha^3 + \frac{12}{5b} \alpha \right), \quad \ell_{12} = D \left(\frac{11}{210} b^2 \alpha^3 + \left(\frac{1}{5} + \nu \right) \alpha \right), \\ \ell_{13} &= D \left(\frac{9}{70} b \alpha^3 - \frac{12}{5b} \alpha \right), \quad \ell_{14} = -D \left(\frac{13}{420} b^2 \alpha^3 - \frac{1}{5} \alpha \right), \\ \ell_{22} &= D \left(\frac{1}{105} b^3 \alpha^3 + \frac{4}{15} b \alpha \right), \quad \ell_{24} = -D \left(\frac{1}{140} b^3 \alpha^3 + \frac{1}{15} b \alpha \right), \end{aligned}$$

$$m_{11}=D\frac{13}{35}b, \quad m_{12}=D\frac{11}{210}b^2, \quad m_{13}=D\frac{9}{70}b, \quad m_{14}=-D\frac{13}{420}b^2, \quad m_{22}=D\frac{1}{105}b^3,$$

$$m_{24}=-D\frac{1}{140}b^3, \quad \alpha=\frac{m\pi}{l}, \quad \dot{f}=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \ddot{f}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

また、図-3に示すように w_r^0, θ_r^0 は(0, 0)点のたわみ、たわみ角、 w_r^l, θ_r^l は($l, 0$)点のたわみ、たわみ角を表わす。同様に、 $w_{r+1}^0, \theta_{r+1}^0$ は(0, b)点、 $w_{r+1}^l, \theta_{r+1}^l$ は(l, b)点の値である。ドットは x に関する微分を表わしている。

2. 2 つりあい方程式

図-4に示されるように r 辺に垂直荷重 P_r が作用しているときのせん断力及び曲げモーメントについてのつりあい式は次のようになる。

$$Q_{r,r+1} + Q_{r,r-1} = P_r \quad (6)$$

$$M_{r,r+1} + M_{r,r-1} = 0 \quad (7)$$

従って、式(6)、(7)に有限フーリエ変換を施すと

$$\left. \begin{aligned} Q_m^{r,r+1} + Q_m^{r,r-1} &= P_m^r \\ M_m^{r,r+1} + M_m^{r,r-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで $Q_m^{r,r+1} = S_m[Q_{r,r+1}]$ で他もこれに準ずる。

式(8)のつりあい式に式(5)を代入し差分表示すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & k_{13}\Delta^2 W_m^{r-1} + 2(k_{11} + k_{13})W_m^r + k_{14}\Delta\Theta_m^r \\ & - \{l_{13}\Delta^2 w_{r-1}^0 + 2(l_{11} + l_{13})w_r^0 + l_{14}\Delta\theta_r^0\} \\ & + (-1)^n \{l_{13}\Delta^2 w_{r-1}^l + 2(l_{11} + l_{13})w_r^l + l_{14}\Delta\theta_r^l\} \\ & + (m\pi/l) \{m_{13}\Delta^2 \ddot{w}_{r-1}^0 + 2(m_{11} + m_{13})\ddot{w}_r^0 \\ & + m_{14}\Delta\ddot{\theta}_r^0\} - (-1)^n (m\pi/l) \{m_{13}\Delta^2 \ddot{w}_{r-1}^l \\ & + 2(m_{11} + m_{13})\ddot{w}_r^l + m_{14}\Delta\ddot{\theta}_r^l\} = P_m^r \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & k_{24}\Delta^2 \Theta_m^{r-1} + 2(k_{22} + k_{24})\Theta_m^r - k_{14}\Delta W_m^r \\ & - \{l_{24}\Delta^2 \theta_{r-1}^0 + 2(l_{22} + l_{24})\theta_r^0 - l_{14}\Delta w_r^0\} \\ & + (-1)^n \{l_{24}\Delta^2 \theta_{r-1}^l + 2(l_{22} + l_{24})\theta_r^l - l_{14}\Delta w_r^l\} \\ & + (m\pi/l) \{m_{24}\Delta^2 \ddot{\theta}_{r-1}^0 + 2(m_{22} + m_{24})\ddot{\theta}_r^0 \\ & - m_{14}\Delta\ddot{w}_r^0\} - (-1)^n (m\pi/l) \{m_{24}\Delta^2 \ddot{\theta}_{r-1}^l \\ & + 2(m_{22} + m_{24})\ddot{\theta}_r^l - m_{14}\Delta\ddot{w}_r^l\} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $W_m^r = S_m[w_r]$ 、 $\Theta_m^r = S_m[\theta_r]$ 、

$$\Delta^2 f_{r-1} = f_{r+1} - 2f_r + f_{r-1}, \quad \Delta f_r = f_{r+1} - f_{r-1}.$$

以上の式に対し、フーリエ定和分変換を施す。定和分変換に関する境界条件は $r=0$ 、 n で単純支持とする。

式(9)にはサイン変換を、式(10)にはコサイン変換を施

し、式(11)を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i[W_m^r] \\ R_i[\Theta_m^r] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i[w_r^0] \\ R_i[\theta_r^0] \end{Bmatrix} \\ & - (-1)^n \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i[w_r^l] \\ R_i[\theta_r^l] \end{Bmatrix} - (m\pi/l) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i[\ddot{w}_r^0] \\ R_i[\ddot{\theta}_r^0] \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

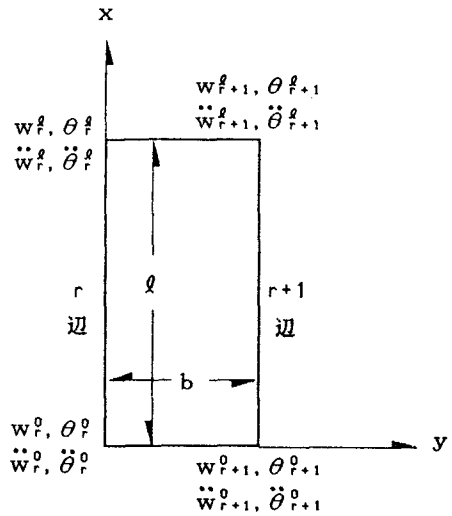
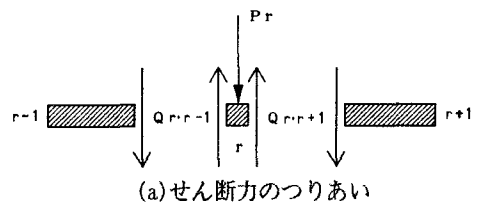
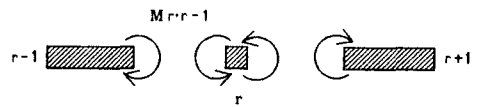


図-3 境界変位



(a)せん断力のつりあい



(b)モーメントのつりあい
図-4 力のつりあい

$$+(-1)^m(m\pi/\ell)\left[\begin{array}{cc}u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}S_i[\ddot{w}_r^0] \\ R_i[\ddot{\theta}_r^0]\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}S_i[P_m^0] \\ 0\end{array}\right\} \quad (11)$$

ここで $S_i[W_m^0]=\sum_{r=1}^{n-1}W_m^r\sin\frac{i\pi}{n}r$, $R_i[\Theta_m^0]=\sum_{r=1}^{n-1}\Theta_m^r\cos\frac{i\pi}{n}r+\frac{1}{2}(-1)^i\Theta_m^0+\frac{1}{2}\Theta_m^0$ 他も

これに準ずる。また、

$$\begin{aligned}s_{11}&=2(k_{11}+k_{13})-k_{13}D_i, & s_{12}=s_{21}&=-2k_{14}\sin(i\pi/n), & s_{22}&=2(k_{22}+k_{24})-k_{24}D_i, \\t_{11}&=2(\ell_{11}+\ell_{13})-\ell_{13}D_i, & t_{12}=t_{21}&=-2\ell_{14}\sin(i\pi/n), & t_{22}&=2(\ell_{22}+\ell_{24})-\ell_{24}D_i, \\u_{11}&=2(m_{11}+m_{13})-m_{13}D_i, & u_{12}=u_{21}&=-2m_{14}\sin(i\pi/n), & u_{22}&=2(m_{22}+m_{24})-m_{24}D_i, \\D_i&=2\{1-\cos(i\pi/n)\}\end{aligned}$$

2. 3 境 界 条 件

次に $x=0$, ℓ 辺についての境界条件を考える。 r 点でのたわみ w_r の y 方向二次微分は連続である。従って $x=0$ 辺の $r-1$ ・ r 要素の r 点でのたわみの y 方向二次微分の式は、式(1)より

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\bigg|_{r,r-1} = \frac{6}{b^2}w_{r-1}^0 + \frac{2}{b}\theta_{r-1}^0 - \frac{6}{b^2}w_r^0 + \frac{4}{b}\theta_r^0$$

同じく、 r ・ $r+1$ 要素の r 点での y 方向二次微分の式は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\bigg|_{r,r+1} = -\frac{6}{b^2}w_r^0 - \frac{4}{b}\theta_r^0 + \frac{6}{b^2}w_{r+1}^0 - \frac{2}{b}\theta_{r+1}^0$$

$$\text{ここで } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\bigg|_{r,r-1} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\bigg|_{r,r+1} \quad \text{より} \quad \Delta^2\theta_{r-1}^0 + 6\theta_r^0 - \frac{3}{b}\Delta w_r^0 = 0 \quad (12)$$

$$\text{同様にして } x=\ell \text{ 辺においても} \quad \Delta^2\theta_{r-1}^\ell + 6\theta_r^\ell - \frac{3}{b}\Delta w_r^\ell = 0 \quad (13)$$

式(12), (13)を x で二度微分すると

$$\Delta^2\ddot{\theta}_{r-1}^0 + 6\ddot{\theta}_r^0 - \frac{3}{b}\Delta\ddot{w}_r^0 = 0 \quad (14) \quad \Delta^2\ddot{\theta}_{r-1}^\ell + 6\ddot{\theta}_r^\ell - \frac{3}{b}\Delta\ddot{w}_r^\ell = 0 \quad (15)$$

式(12)～(15)にフーリエ定和分コサイン変換を施すと次式が求まる。

$$\left. \begin{aligned}(6-D_i)R_i[\theta_r^0] - \frac{6}{b}\sin\frac{i\pi}{n}S_i[w_r^0] &= 0, & (6-D_i)R_i[\theta_r^\ell] - \frac{6}{b}\sin\frac{i\pi}{n}S_i[w_r^\ell] &= 0 \\ (6-D_i)R_i[\ddot{\theta}_r^0] - \frac{6}{b}\sin\frac{i\pi}{n}S_i[\ddot{w}_r^0] &= 0, & (6-D_i)R_i[\ddot{\theta}_r^\ell] - \frac{6}{b}\sin\frac{i\pi}{n}S_i[\ddot{w}_r^\ell] &= 0\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$x=0$ 辺における r 点 y 軸まわりのモーメント M_x は $r-1$ ・ r 要素の r 点のモーメント $M_x^{r,r-1}$ と r ・ $r+1$ 要素の r 点のモーメント $M_x^{r,r+1}$ の平均値である。ここでは

$$\begin{aligned}-\frac{M_x^{r,r-1}}{D} &= \ddot{w}_r^0 + \nu\left(\frac{6}{b^2}w_{r-1}^0 + \frac{2}{b}\theta_{r-1}^0 - \frac{6}{b^2}w_r^0 + \frac{4}{b}\theta_r^0\right) \\ -\frac{M_x^{r,r+1}}{D} &= \ddot{w}_r^0 + \nu\left(-\frac{6}{b^2}w_r^0 - \frac{4}{b}\theta_r^0 + \frac{6}{b^2}w_{r+1}^0 - \frac{2}{b}\theta_{r+1}^0\right)\end{aligned}$$

従って自由端ではモーメントがゼロより、 $x=0$, ℓ 辺において次式が成り立つ。

$$\ddot{w}_r^0 + \nu\left(\frac{3}{b^2}\Delta^2w_{r-1}^0 - \frac{1}{b}\Delta\theta_r^0\right) = 0 \quad (17) \quad \ddot{w}_r^\ell + \nu\left(\frac{3}{b^2}\Delta^2w_{r-1}^\ell - \frac{1}{b}\Delta\theta_r^\ell\right) = 0 \quad (18)$$

式(17), (18)にフーリエ定和分サイン変換を行ない、式(16)の関係式を用いると次式のようになる。

$$S_i[\ddot{w}_r^0] = \frac{\nu}{b^2} \cdot \frac{6D_i}{6-D_i} S_i[w_r^0] \quad (19) \quad S_i[\ddot{w}_r^\ell] = \frac{\nu}{b^2} \cdot \frac{6D_i}{6-D_i} S_i[w_r^\ell] \quad (20)$$

$r-1$ ・ r 要素の r 点の等価せん断力 $R_x^{r,r-1}$ と r ・ $r+1$ 要素の r 点の等価せん断力 $R_x^{r,r+1}$ は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} R_x^{r-1} &= -D \left\{ \ddot{\dot{w}}_r^0 + (2-\nu) \left(\frac{6}{b^2} \dot{w}_{r-1}^0 + \frac{2}{b} \dot{\theta}_{r-1}^0 - \frac{6}{b^2} \dot{w}_r^0 + \frac{4}{b} \dot{\theta}_r^0 \right) \right\} \\ R_x^{r+1} &= -D \left\{ \ddot{\dot{w}}_r^0 + (2-\nu) \left(-\frac{6}{b^2} \dot{w}_r^0 - \frac{4}{b} \dot{\theta}_r^0 + \frac{6}{b^2} \dot{w}_{r+1}^0 - \frac{2}{b} \dot{\theta}_{r+1}^0 \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$x=0$ 辺における r 点でのせん断力のつりあい式は

$$\frac{1}{2} (R_x^{r-1} + R_x^{r+1}) = -\frac{V_r^0}{b} \quad (22)$$

ここで V_r^0 はランガー鉛直材の軸力である。

式(22)に式(21)を代入し、フーリエ定和分サイン変換を行なうと次式が求まる。

$$S_i[\ddot{\dot{w}}_r^0] + (2-\nu) \left\{ -\frac{3}{b^2} D_i S_i[\dot{w}_r^0] + \frac{2}{b} \sin \frac{i\pi}{n} R_i[\dot{\theta}_r^0] \right\} = \frac{S_i[V_r^0]}{bD} \quad (23)$$

$x=l$ 辺についても同様の式が求まる。

2. 4 解 式

式(11)に式(16)、(19)、(20)を代入し $S_i[W_m^*]$ 、 $R_i[\Theta_m^*]$ について解くと次式のようなになる。

$$\left\{ \begin{aligned} S_i[W_m^*] \\ R_i[\Theta_m^*] \end{aligned} \right\} = \frac{1}{a} \left\{ \begin{aligned} (\ell/\pi)(m^7 + b_3 m^5 + b_2 m^3 + b_1 m) \\ (\ell/\pi) c_4 (m^7 + c_3 m^5 + c_2 m^3 + c_1 m) \end{aligned} \right\} \{ S_i[w_r^0] - (-1)^m S_i[w_r^l] \} \\ + \frac{1}{a} \left\{ \begin{aligned} d_2 (m^4 + d_1 m^2 + d_0) \\ e_2 (m^4 + e_1 m^2 + e_0) \end{aligned} \right\} S_i[P_m^*] \quad (24)$$

ここで $a = m^8 + a_3 m^6 + a_2 m^4 + a_1 m^2 + a_0$,

$a_0 = 302400 D_i^2 \beta^8 a_4$, $a_1 = 40320 D_i (15 - D_i) \beta^6 a_4$, $a_2 = 4320 (D_i^2 - 7 D_i + 70) \beta^4 a_4$,

$a_3 = 96 (-D_i^2 + 20 D_i + 105) \beta^2 a_4$, $a_4 = 1 / (D_i^2 + 68 D_i + 120)$, $\beta = \ell / \pi b$,

$b_1 = \frac{2160 \beta^6 a_4 D_i}{6 - D_i} \{ 14 (D_i^2 - 30 D_i + 120) + \frac{\nu}{6 - D_i} (D_i^3 - 126 D_i^2 + 1680 D_i - 5040) \}$,

$b_2 = \frac{72 \beta^4 a_4}{6 - D_i} \{ 5 (-15 D_i^3 + 154 D_i^2 - 1344 D_i + 5040) + \frac{\nu D_i}{6 - D_i} (-9 D_i^3 + 266 D_i^2 - 5040) \}$,

$b_3 = 6 \beta^2 a_4 \{ 16 (-D_i^2 + 20 D_i + 105) - \nu \frac{D_i}{a_4 (6 - D_i)} \} = c_3$

$c_1 = 25200 \beta^6 a_4 D_i \{ 2 (-D_i + 12) - \frac{\nu}{5 (6 - D_i)} (D_i^2 - 60 D_i + 360) \}$,

$c_2 = 24 \beta^4 a_4 \{ 35 (7 D_i^2 - 36 D_i + 360) - \frac{3 \nu D_i}{6 - D_i} (-11 D_i^2 + 140 D_i + 840) \}$, $c_4 = \frac{6 \sin \frac{i\pi}{n}}{b (6 - D_i)}$,

$d_0 = \frac{840 (6 - D_i) \beta^4}{3 D_i + 2}$, $d_1 = \frac{28 (D_i + 6) \beta^2}{3 D_i + 2}$, $d_2 = \frac{60 (3 D_i + 2) \beta^4 a_4 b^3}{D}$,

$e_0 = \frac{-2520 \beta^4}{13}$, $e_1 = \frac{-84 \beta^2}{13}$, $e_2 = \frac{-1560 \beta^4 b^2 \sin(i\pi/n) a_4}{D}$

いま具体的な荷重条件として、節線に等分布荷重が作用する場合を考える。

$$S_i[P_m^*] = \frac{\ell}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^m}{m} S_i[P_r]$$

また、荷重条件より、変形は $x = \ell/2$ で対称となるので式(24)の有限フーリエ逆変換の式は

$$\left\{ \begin{aligned} S_i[w_r] &= g_1(i, x) S_i[w_r^0] + f_1(i, x) S_i[P_r] \\ R_i[\theta_r] &= g_2(i, x) S_i[w_r^0] + f_2(i, x) S_i[P_r] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここで $g_1(i, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (1/a) (m^7 + b_3 m^5 + b_2 m^3 + b_1 m) \sin \frac{m\pi}{\ell} x$,

$$g_2(i, x) = -\frac{4c_4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (1/a) (m^7 + c_3 m^5 + c_2 m^3 + c_1 m) \sin \frac{m\pi}{l} x,$$

$$f_1(i, x) = \frac{4d_2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (1/ma) (m^4 + d_1 m^2 + d_0) \sin \frac{m\pi}{l} x,$$

$$f_2(i, x) = \frac{4e_2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (1/ma) (m^4 + e_1 m^2 + e_0) \sin \frac{m\pi}{l} x,$$

式(25)をフーリエ定積分変換することにより w_r 、 θ_r を求めることができる。

未知境界変位 $S_i[w_r^0]$ は式(25)を式(23)に代入することにより

$$S_i[w_r^0] = a_{11}(i) S_i[P_r] + b_{11}(i) S_i[V_r^0] \quad (26)$$

ここで

$$a_{11}(i) = -\frac{1}{a_{12}(i)} \{ \ddot{f}_1(i, 0) + (2-\nu) \{ -\frac{3}{b^2} D_i \dot{f}_1(i, 0) + \frac{2}{b} \sin \frac{i\pi}{n} \dot{f}_2(i, 0) \} \}$$

$$b_{11}(i) = 1/(b D a_{12})$$

$$a_{12}(i) = \ddot{g}_1(i, 0) + (2-\nu) \{ -\frac{3}{b^2} D_i \dot{g}_1(i, 0) + \frac{2}{b} \sin \frac{i\pi}{n} \dot{g}_2(i, 0) \}$$

従って式(26)のフーリエ定積分変換は

$$w_r^0 = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{11} S_i[P_r] + b_{11} S_i[V_r^0]) \sin \frac{i\pi}{n} r \quad (27)$$

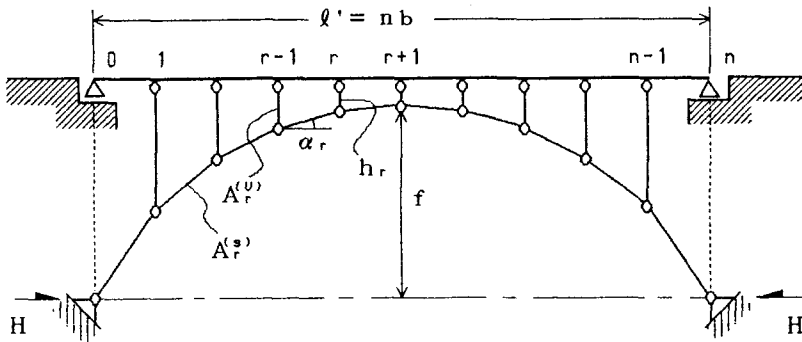
図-5に示されるランガー部材に対し次の関係式が成立する。

$$\sum_{r=1}^n \frac{H b \sec^3 \alpha_r}{E A_r^{(s)}} + \sum_{r=1}^n \frac{H C}{E} \left(-\frac{h_r}{A_r^{(u)}} - \frac{h_{r-1}}{A_{r-1}^{(u)}} \right) \tan \alpha_r + \sum_{r=1}^n w_r^0 C = 0 \quad (28)$$

ここで、 $C = 8 f b / l'^2$ 、 $A_r^{(u)}$ 、 $A_r^{(s)}$ はそれぞれ $y = r$ 点での鉛直材および肋材の断面積を、 H は水平反力を表わす。

また放物線アーチでは次式が成り立つ。

$$V_r^0 = H (\tan \alpha_r - \tan \alpha_{r+1}) = H C \quad (29)$$



H : 水平反力 $A_r^{(s)}$: 任意点の肋材の断面積 $A_r^{(u)}$: 任意点の鉛直材の断面積

図-5 ランガー部材

従って式(29)を考慮して、式(27)を式(28)に代入すると

$$H = -\frac{\frac{2}{n} C \sum_{r=1}^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{11} S_i[P_r] \sin \frac{i\pi}{n} r \right)}{\sum_{r=1}^n \frac{b \sec^3 \alpha_r}{E A_r^{(s)}} + \sum_{r=1}^n \frac{C}{E} \left(\frac{h_r}{A_r^{(u)}} - \frac{h_{r-1}}{A_{r-1}^{(u)}} \right) \tan \alpha_r + \frac{2}{n} C \sum_{r=1}^n \left(\sum_{i=1}^{n-1} b_{11} S_i[C] \sin \frac{i\pi}{n} r \right)} \quad (30)$$

従って式(30)を式(29)に代入し V_r^0 を求め、式(27)に代入することにより w_r^0 を求めることができる。さらに前述の式等に代入することにより w_r 、 θ_r 等の変位及びモーメント、せん断力等の断面力を求めることができる。

3. 数 値 計 算 例

最初に、本論文で使用した有限帯板法の精度を調べるため $y=0$ と $y=l'$ 辺で単純支持、他の2辺が自由の矩形板に等分布荷重が載荷した場合を計算し厳密解⁵⁾と比較した。荷重強度は $q=0.1\text{kgf/cm}^2$ で計算に際しては各節線に等価な線荷重に換算した。数値計算に用いた数値は次のとおりである。 $E=2.1\times 10^6\text{kg/cm}^2$, $\nu=0.3$, $h=10\text{cm}$, $l=10, 20, 30\text{m}$, $l'=20\text{m}$, $m=100$ 項。またこの数値はランガードプレート⁶⁾の計算にも使用する。

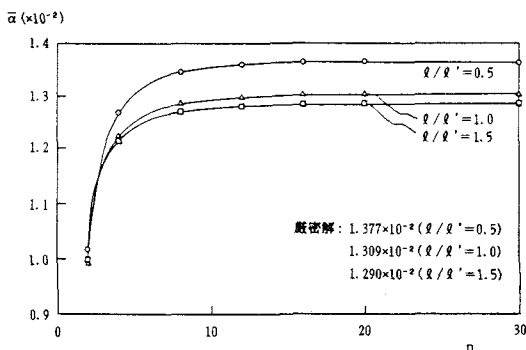


図-6 板中央のたわみ

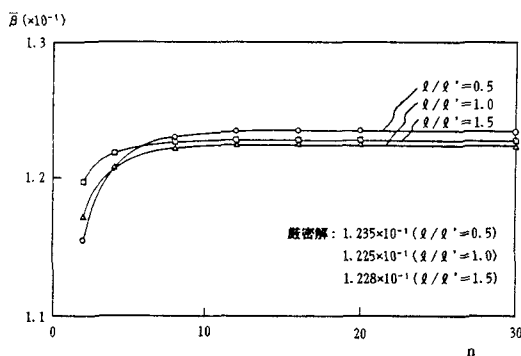


図-7 板中央の曲げモーメント M_y

図-6は板中央点のたわみの要素分割数による収束状態を表わしたものである。図-7は同じく板中央点の曲げモーメント M_y の分割数による収束状態を表わしたものである。いずれも20分割程度で十分な精度が得られ、収束の状況は満足できるものである。ここで図中の $\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\beta}$ はたわみ係数及び曲げモーメント係数で中心点のたわみと曲げモーメントは次のように表わされる。 $w = \bar{\alpha} (q l'^4 / D)$, $M_y = \bar{\beta} q l'^2$ 。

次に図-5に示される二対辺単純支持のランガードプレートに等分布荷重が載荷した場合の計算を行なった。ここで新たに次のような数値を用いた。 $h=10, 15, 20\text{cm}$, $q=0.1\text{kgf/cm}^2$, $A^{(S)}=10, 25, 50, 75\text{cm}^2$, $A^{(U)}=25\text{cm}^2$, $f=10\text{m}$ 。

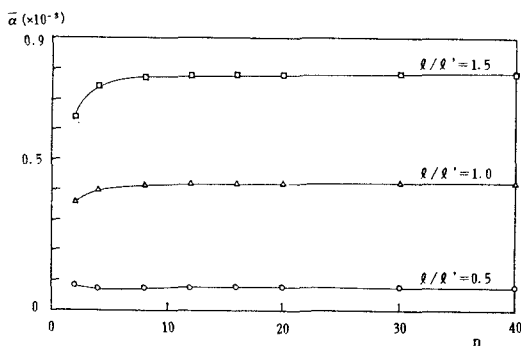


図-8 床版中央点のたわみ

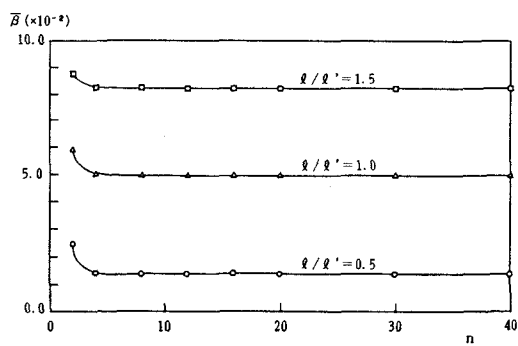


図-9 床版中央点の曲げモーメント M_y

図-8、9はランガードプレート中央におけるたわみ及びモーメント M_y の要素分割数による変化を、辺比 l/l' をパラメータとして示したものである。計算上では分割数が増えるに従いランガー垂直材の本数も増やしているが、いずれの場合も10分割程度で一定値に収束することを示しており、この傾向は、ランガー桁の解析において吊材の本数を増やしていくと吊材を無限に配置した場合の解に収束する状況に似ている。

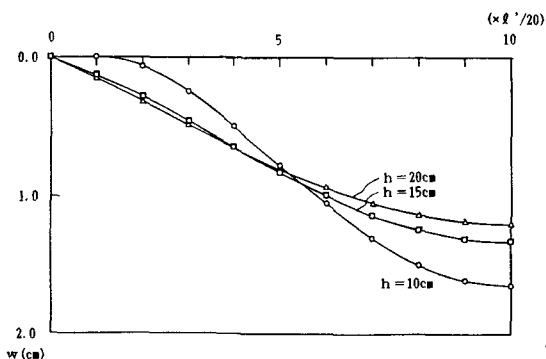


図-10 $x=0$ に沿う y 方向たわみ分布

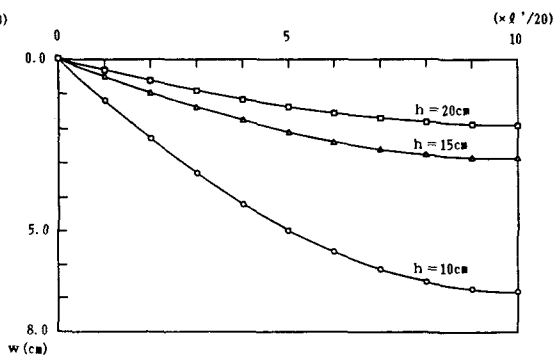


図-11 $x=l/2$ に沿う y 方向たわみ分布

図-10は $x=0$ に沿う y 方向（床版軸方向）のたわみ分布を床版厚をパラメータとして示したものでランガー支持部材のたわみにも対応している。同じく図-11は $x=l/2$ に沿う y 方向のたわみ分布を示しており床版中央部分のたわみを表わしている。いずれの場合も床版厚の大きい方がたわみ量は少なくなる傾向にあるが、ランガー支持部においては中央付近のたわみの大小関係と支承付近のたわみの大小関係は逆転している。

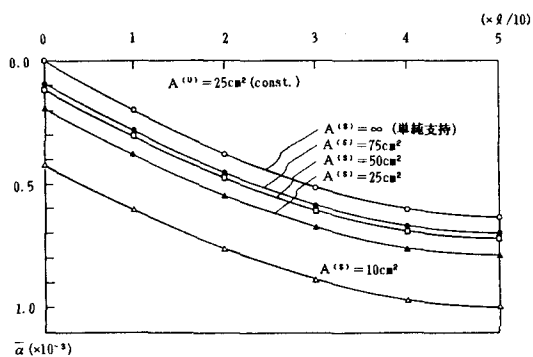


図-12 $y=l'/2$ に沿う x 方向たわみ分布

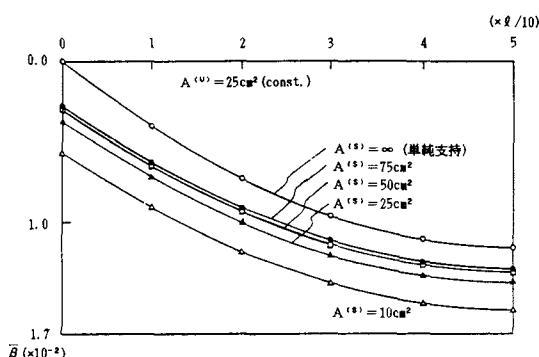


図-13 $y=l'/2$ に沿う曲げモーメント M_y の分布

図-12, 13は周辺単純支持床版とランガー支持床版のたわみ分布の違いを調べたものである。図-12は $r=10$ ($y=l'/2$)に沿う x 方向のたわみ分布をランガー部材（肋材）の断面積を変化させ計算したものである。図よりランガー支持床版の全体的なたわみ傾向は周辺支持床版と一致する。またランガー部材の剛性を高めることにより周辺単純支持床版のたわみ分布に近づく。図-13は同じく $r=10$ ($y=l'/2$)に沿う曲げモーメント M_y の x 方向の分布を表わしたものである。

4. あとがき

本論文では二対辺単純支持二対辺自由矩形平板及び二対辺単純支持のランガードプレートに対し、帯板要素隅点の境界値を考慮した有限帯板法を適用し、 x 方向（床版幅方向）に対しては有限フーリエ変換、 y 方向（床版軸方向）に対してはフーリエ定積分変換を施し解析した。本論文で提案した有限帯板法により矩形平板の問題を解いた結果は厳密解とよく一致しており、任意の境界を有する矩形平板の応力解析には非常に有効な手法であると考えられる。また、逆ランガードプレートの数値計算結果より本論文の有限帯板法がランガードプレートの応力解析にも有効な手法であることがわかった。

本論文では逆ランガードプレートの数値計算例として等分布荷重載荷の場合のみを取り扱っているが、アーチ系構造物においては半載または片載荷重を載荷した場合に床版の特性が現われてくると考えられるので今後の検討課題としたい。

また、本論文では平板の面外曲げ変形に関してのみ帯板要素公式を誘導した。同様な方法により面内変形に関しても帯板要素公式を誘導することができるので面内面外両作用が共存するような立体的な構造物（たとえばトラスドプレート、円筒型シェル等）の解析にこの手法を拡張したい。

参 考 文 献

- 1) Ian N. Sneddon: Fourier Transforms, McGraw-Hill.
 - 2) Sumio G. NOMAGHI, Kenichi G. MATSUOKA: Application of Finite Fourier Integration Transforms for Structural Mechanics, Proceedings of the Twentieth Japan National Congress for Applied Mechanics, 1970
 - 3) Sumio G. NOMACHI, Toshiyuki OHSHIMA and Yoshihiro TAKAHASHI: On the Structural Analysis of the Langerd Plate, 北見工業大学研究報告, 第7巻, 第1号, 1975年11月
 - 4) 高橋義裕: 平板理論による逆ランガー構造の応力解析, 北海学園大学工学部研究報告, 第15号, 1988年 2月
 - 5) Stephan P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959
- (1988年10月12日受付)