構造工学論文集　Vol.35 A （1989年3月）　　土木学会

非線形増分方程式の解法のための篠原法について

Shinohara's Solution Procedure for Nonlinear Incremental Equations

藤井文夫*
By Fumio Fujii

Shinohara's method is a path-following solution method for general nonlinear equations in applied mathematics. This numerical procedure is, however, less known than Riks/Wempner method in nonlinear structural analysis. In the present paper, Shinohara's method is firstly outlined and modified in such a way that not only the nonlinear equations for total variables, but also those for increments can be economically solved in practical analysis. Secondly, the modified Shinohara's procedure is compared to Riks/Wempner and Haisler/Stricklin methods. Numerical examples show that Shinohara's procedure can also be effectively applied to incremental nonlinear equations.

1．まえがき

構造分野に限らず一般に，非線形現象をいかに定式化して支配方程式を導くかと言うことと，その得られた非線形方程式をいかにして解くかと言うこととは本質的に異なる別個の問題である。実際の非線形計算においては支配方程式は正しく導けても，その数値解法のプログラミングや反復計算において苦労することも珍しくない。非線形方程式の数値解法については数多くのスキームが提案されている。しかしながら非線形問題のなかでも例えばアーチのルーピング挙動[14,16]や，機構学における有限の剛体運動[15]のように，解曲線の形状がきわめて複雑になり，変数間で一対一の対応がなくなり相互に多価関数となるような問題がある。このような非線形問題の解を求めるためには通常の単純な解法手段ではなく，汎用性のあるいわゆる「軌道追跡型（path-following type）」の解法に依らなければならない。応用数学における軌道追跡型解法のひとつに篠原法がある。本研究ではまず非線形構造解析のための篠原法のアウトラインを紹介する。篠原法の原版(1,12)は，全体量に対する支配方程式について提案されたものであるが，非線形構造問題では骨組構造は別として[12]，全体方程式が陽または陰に求められることはむしろ稀である。材料の非線形性が絡むときなど多くの場合，増分方程式を支配方程式とする場合がほとんどである。そこで本研究では，増分型の非線形方程式にも適応できるように篠原法の変形ヴァージョンを考案した。そしてこれまで構造分野では最もよく知られているRiks／Wempner（弧長増分法）(2,3,4,5,8) やHaisler/Stricklin （変位制御法）(9,17) らの解法との対比のなかでその特徴を明らかにする。

＊Dr．－Ing．　岐阜大学助教授　工学部土木工学科　（〒501-11　岐阜市柳戸１－１）

2．篠原法のアウトライン [1,14,19]

非線形解法としての篠原法は，非線形支配方程式を多元連立微分方程式に変換し，初期値を出発点として数値積分して行く積分過程（外挿補間による予測子計算）と，数値積分の過程で派生した誤差により解軌道から外れた近似解を軌道修正するための反復過程（修正子計算）とから成る。n個の自由度を持つ系を考えると，まず積分過程における基礎式はつぎのようである。全体量に対するn本の支配方程式を，

$$\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{O}\} \qquad \text{式(1)}$$

とまとめる。ここに列ベクトル$\{\mathbf{F}\} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)^T$の各成分は変数$\{\mathbf{X}\} = (X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1})^T$のスカラー関数である。構造計算における荷重パラメータは，最後の（n＋1）番目の変数X_{n+1}とする。接線（増分）方程式は，式（1）を解曲線に沿う弧長sで偏微分することにより得られ，

$$[\mathbf{f}]\ \{d\mathbf{X}/ds\} = \{\mathbf{O}\} \qquad \text{式(2)}$$

となる。ここに$[\mathbf{f}]$はn×（n＋1）の長方形行列で，その（j，k）要素は，

$$f_{jk} = \partial F_j / \partial X_k \qquad \text{式(3)}$$

で与えられる。また

$$\{d\mathbf{X}/ds\} = (dX_1/ds,\ dX_2/ds, \ldots\ldots, dX_{n+1}/ds)^T \qquad \text{式(4)}$$

は，(n+1)次元空間における解曲線の単位接線ベクトルのスカラー成分である。式（2）は（n＋1）個の未知量に対するn本の同次方程式であるから，解そのものを求めることはできなくとも，解の間の連比だけは求めることができる。式（2）を実際に解くと

$$dX_k/ds = +\nu\,(-1)^k D_k \qquad \text{式(5)}$$

ただし，

$$D_k = \det\ [\mathbf{f}^{(k)}] \qquad \text{式(6)}$$

ここに右上添字の（k）は，k番目の列を除去することを意味し，$[\mathbf{f}^{(k)}]$は正方行列となる。νは比例定数で，式（4）が単位ベクトルであることより

$$\nu = \pm \left(\sum_{k=1}^{n+1} D_k^2 \right)^{-1/2} \qquad \text{式(7)}$$

と決まる。式（7）の右辺の±は解曲線に沿う進行方向に対応している。積分過程では(n+1)元の連立一階微分方程式（5）を，与えられた初期値から出発して解曲線に沿って数値積分してゆく。数値積分解が解軌道より遊離してしまった場合には，必要に応じつぎのような反復過程を挿入し，軌道修正を行う。まず数値積分の結果得られた近似解（最新の更新解）$\{\mathbf{X}^*\}$を式（1）の支配方程式に代入し，誤差ベクトル

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\} = -\{\mathbf{F}^*\} \qquad \text{式(8)}$$

で解の精度を測る。右肩の（＊）は，近似解$\{\mathbf{X}^*\}$を用いて評価されることを意味する。つぎに式（1）を Taylor 展開し，2次項以上の高次項を無視してつぎのような反復計算用の連立一次方程式を得る。

$$[\mathbf{f}^{(m)*}]\ \{d\mathbf{X}^{(m)}\}^{ter} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^*\} \qquad \text{式(9)}$$

ここに$\{d\mathbf{X}^{(m)}\}^{ter}$の右肩の（m）は，m番目の成分を除去することを，^{ter}は反復を意味する。すなわちm番目の変数の補正量をゼロに拘束しているわけである：

$$dX_m^{ter} = 0 \qquad \text{式(10)}$$

近似解$\{\mathbf{X}^*\}$を

$$\underset{\text{更新解}}{\{\mathbf{X}^*\}} = \underset{\text{積分解}}{\{\mathbf{X}^*\}} + \underset{\text{補正量の総和}}{\Sigma\{d\mathbf{X}\}^{ter}} \qquad \text{式(11)}$$

と更新する。つぎにまた式（8）⇒式（9）⇒式（11）と繰り返す。以上が1969年に京大の数理解析研究所から発表された篠原法の原版である。Riksは1984年に篠原法と酷似した解法(Continuation Method) を論じているが，反復法など実際の数値計算への応用については何ら言及しておらず理論的検討のみで終わっている[3]。

3. 行列式の計算

篠原法の積分過程の実際は（n＋1）個の正方行列の行列式（6）の計算の連続である。多自由度系において，この行列式の計算を一個一個まともにやっていては計算時間の点で，実用計算からかけ離れたものになってしまう。そこでつぎのような行列計算の高速化を考案した[14]。まず式（2）から式（5）を求める際に重要なのは，行列式D_kの値そのものでなく，（n＋1）個の行列式の間の比である。このことに注目すると，式（2）において$\{d\mathbf{X}/ds\}$の成分のどれかひとつ，例えばdX_m/dsが既知量となれば残りのn個の成分は計算できることになる。そこで第m番目の成分を

$$dX_m/ds = \overline{dX_m/ds} \qquad 式（12）$$

とし，式（2）の左辺の第m列を右辺に移行すると，

$$[\mathbf{f}^{(m)}]\{dX^{(m)}/ds\} = -\overline{dX_m/ds}\{f_m\} \qquad 式（13）$$

となる。ここに$\{f_m\}$は$[\mathbf{f}]$の第m列である。式（12）の右辺には行列式D_mの計算が必要であるが，これだけは式（6）を用いて計算することを勧める。D_mを計算せずに，例えば単に

$$dX_m/ds = 1.0 \qquad 式（14）$$

とおくこともできる。しかしこれは弧長増分法と同じように，増分量の±の判別が式（7）のなかで各積分ステップ毎に必要となり余分な手続きが要る。本研究では行列式D_mを式（6）を用いて計算することにする。式（5）の右辺で比例定数νを取り込まず式（12）を計算し，式（13）を解く。解$\{dX^{(m)}/ds\}$はνを含まない単なる連比となるから，式（7）を用いてνを計算する。

4. 増分形式への拡張

弾塑性問題などの多くの非線形構造問題は，式（2）のような接線（増分）方程式の形で与えられることが多い。篠原法の積分過程では，全体量に対する支配方程式（1）を直接使用してはおらず，そのまま増分方程式にも適応が可能である。しかし反復過程では式（9）の右辺項に全体方程式の残差を必要としているため，このままでは増分形式の定式化には使えない。そこで本研究では，篠原法の増分形式としてつぎのような変形スキームを提案する。

いま前計算ステップが終了し，その結果得られた解$\{\mathbf{X}\}$はちょうど解曲線上にあるものとする。即ち式（1）が成立する。つぎに積分過程が終了し，増分量$\{d\mathbf{X}\}^{teg}$を計算する。近似解を

$$\underset{近似解}{\{\mathbf{X}^*\}} = \underset{正解}{\{\mathbf{X}\}} + \underset{増分量}{\{d\mathbf{X}\}^{teg}} \qquad 式（15）$$

と更新する。ここに右肩の^{teg}は積分過程を意味する。

つぎに一回の反復計算による補正量を$\{d\mathbf{X}\}^{ter}$とすると，反復過程の結果，近似解は

$$\underset{更新解}{\{\mathbf{X}^*\}} = \underset{正解}{\{\mathbf{X}\}} + \underset{増分量}{\{d\mathbf{X}\}^{teg}} + \underset{補正量の総和}{\Sigma\{d\mathbf{X}\}^{ter}} \qquad 式（16）$$

となる。Σは反復回数に対応する。各反復計算における連立方程式の右辺項としては，式（8）の代わりにつぎの誤差ベクトルをもってくる。

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^*\} = -[\mathbf{f}^*]\{d\mathbf{X}\} \qquad 式（17）$$

ここに（＊）は最新の解（16）を用いて評価することを意味し，$\{d\mathbf{X}\}$は積分過程と反復過程の結果得られる前計算ステップでの正解$\{\mathbf{X}\}$からの変動量，すなわち

$$\underset{変動量}{\{d\mathbf{X}\}} = \underset{増分量}{\{d\mathbf{X}\}^{teg}} + \underset{補正量の総和}{\Sigma\{d\mathbf{X}\}^{ter}} \qquad 式（18）$$

である。反復計算用の連立方程式は，形式的には式（9）と全く同じである。

5．考察

以上の全体形式／増分形式の篠原法の特質を弧長増分法・変位制御法との比較のなかで考察する。1970年にRiksがStanford大学から発表した弧長増分法の原形は，ｎ本の増分方程式

$$[\mathbf{f}]\{dX\}=\{0\} \qquad 式（19）$$

の他にも弧長制御式として

$$\{dX\}^T\{dX\}=ds^2 \qquad 式（20）$$

を抱き込んで（ｎ＋１）個の未知量を（ｎ＋１）本の条件式で決めようとする提案である。式（19，20）を解くための非線形スキームとして，例えばRammは，各反復計算における補正量ベクトルと初期接線ベクトルとの直交条件を（ｎ＋１）番目の条件式とした。一方，Haisler/Stricklin の変位制御法では式（19）の他に，ある特定の変位増分を制御して

$$dX_m=\overline{dX_m} \qquad 式（21）$$

を採用する。これは弧長増分法の式（２０）のように解曲線の接線ベクトルの長さを規定するのではなく，接線ベクトルの特定の座標軸への投影ベクトルを規定していることに他ならない。篠原法の積分過程では一見して式（２０，２１）のような付加的な条件式は一切不要で，（ｎ＋１）個の変数間の関係を規定する解曲線をｎ個の条件式だけで追跡できることが特徴である。反復過程では，式（9）のようにｎ元連立方程式の解法で済むが，実は，これは本来は

$$[\mathbf{f}^*]\{dX\}^{ter}=\{\varepsilon^*\} \qquad 式（22）$$

および $\quad dX_m{}^{ter}=0 \qquad$ 式（10）再掲

を連立で解くべきところを，$dX_m{}^{ter}$ をすでに式（２２）のなかで消去してしまい，式（9）のサイズに納めているに過ぎない。さらに本研究で提案した行列式計算に関する式（１３）も実は，

$$[\mathbf{f}]\{dX/ds\}=\{0\} \qquad 式（2）再掲$$

および $\quad dX_m/ds=\overline{dX_m/ds} \qquad$ 式（12）再掲

を連立で解いていることに他ならない。この意味で篠原法は，変位法におけるHaisler/Stricklin の変位制御法の部類に属する。ただ変位制御法と異なるのは，常に固定した変位を制御するのではなく，前計算ステップの情報をもとに，解曲線の接線ベクトルの成分のうち，絶対値最大の成分を検出してこれを制御している（文献14）。Rammは7)のなかで『変位制御法はsnap-back を追跡することはできない』と述べているが，これは特定の節点変位のみに固執するためであって，式（１０）と式（１２）において指標ｍを逐次変更して計算して行くことが本研究で提案する非線形スキームの特徴のひとつである（篠原法の原版ではこのｍの選び方については明確な言及がない）。また変位制御法の式（２１）の右辺の規定量は入力データであるが本研究で使う式（１２）の右辺項は計算により必然的に決まる値である。式（２０）は増分量の自乗和となっているため，接線ベクトルの大きさは規定できても，その向きは規定できない。この結果，解軌道上の現在の位置を挟んで進行方向の前方と後方にある２点を解として持つ。しがって弧長増分法においては各増分過程において，常に進行方向の前方にある解を選択するような判別手続きが必要となる。これに関連して式（７）の右辺の±は，解軌道の追跡方向を指定するもので，計算開始時に一旦進行方向を指定すればあとは後戻りすることなく一方的に追跡を続行できる。式（７）は一見弧長を球制御しているように思われるが接線ベクトルの正規化によって必然的に得られるものであって，けっして未知変数を決めるための条件式ではない。篠原法では式（１０，１２）のように，多変数ではなく一変数のみが関与する究めて簡単な制御式を用いたため，容易にその未知量を消去でき，連立方程式の元数も（ｎ＋１）元ではなくｎ元に抑えられる結果となる。必要ならば連立方程式の係数行列の対称性も確保できる[9,13,17]。なお積分過程における式（１３）と反復過程における式（９）の類似性は注目に値する。

6．　計算例

全体形式／増分形式の篠原法をエラスチカ問題に適用してその妥当性を検証する。３連モーメント定理に基づく離散化エラスチカ方程式の誘導についてはすでに参考文献[11, 14, 16] で発表済なのでここではその詳細は割愛するが，その概要はつぎのようである。３連モーメント定理の部材基本式において節点変位の代わりに部材回転角を新たな未知量として導入し，隣接する部材間での節点回転角に対する適合条件より材端モーメントを消去する。系の一端の水平・鉛直支点反力をLagrangeの未定乗数とし，中間荷重を巻き込んだ部材の回転つり合い条件と，端の水平・鉛直変位の拘束条件を決定条件式として，部材回転角と一端の水平・鉛直支点反力を決める。このエラスチカ３連モーメント定理の特徴はつぎの４点である。①問題の非線形性の度合いを低く抑えることができる。②系全体の自由度は高々（部材数＋２）である。③定式化とプログラミングが簡単である。④計算結果の精度が③の割りにきわめて良い。以上のエラスチカ３連モーメント定理を用いて門形ラーメンと円形アーチについて例題計算を行った＊。数値積分はすべてオイラー法によった。

図１の門形ラーメンは文献20）からの引用で，はり部材に２個の集中荷重Ｐが作用する。ここでは対称変形モードからSide wayモードへの分岐現象を避けるため，ラーメンの左半分のみを等長の９本要素に離散化して解析する。L＝１， EI=1,それに積分過程の弧長刻み幅ds=0.1を入力データとした。収束判定を，全ての変数について｜補正量｜／｜全体量｜≦0.00001 とした。図２は荷重パラメータと，偶角部の節点７の水平変位（→を正），およびはり中央の節点10の鉛直変位（↑を正）との関係を示す。全体形式と増分形式の篠原法で解曲線を追跡した結果，両者の結果はよく一致し数値計算上の差は殆どない。反復回数は全体形式／増分形式ともに２～３回とほぼ一定であった。両解法とも極大点付近まで荷重パラメターを制御し，極大点付近では，対称軸上に設定したシヤーレス断面の水平反力を制御した。増分形式の篠原法では特に極大点付近において誤差が多少累積するきらいがあり，計算された最大耐力と対応する変位を，文献 20)，全体形式増分形式の順で比較するとつぎのようである：最大（PL^2/EI）＝１４．９，１５．３，１５．１，（$+U_7/L$）＝０．２８５，０．２８２，０．２８７，（$-V_{10}/L$）＝ ───，０．９６２，０．９６３。離散化誤差を別にすれば以上の値は実質的には大差ないものと考えることができる。図２のつり合い経路上に３分点c1～c3をとり，これらの点に対応する系の有限変位のうち，部材回転角で表される剛体変位の部分のみを図１に示した。剛体変位図はリンク構造の変位であるため多角形となるが，これに材端モーメントによる微小弾性変形を重ねると滑らかな弾性曲線となる。

図３はより複雑なルーピングつり合い曲線を示す円形エラスチカアーチである。これも分岐点は別扱いとするため，系全体の左半分を１０本の直線要素に離散化して解析した。まず全体形式の結果は図４において実線（―）で示した。これはEI=1.0，積分過程における弧長刻み幅dsを0.1 として計算したもので，反復回数も全ての反復過程において２回で常に安定に収束しており，実質的には離散化支配方程式の正解と見ることができる。曲線の折返し点c1～c6においても何らの不安定性も生じない。つぎに増分形式のスキームについては，ds=0.1とすると最初の折り返し点である点c1の直前で発散した。そこでds=0.025として解曲線を追跡した結果を点線（---）で示す。これは特に各折返し点（反復４回）において全体形式の結果との差が著しく，累積誤差のため点c1～c6と折返し点を経るにつれ顕著となる。そこでさらに増分形式でds=0.01 とした結果のうち折返し点付近での値のみを丸印（○）でプロットした。刻み幅をより小さくしたため，折返し点c1～c6付近での反復回数は３回と減少し，累積誤差は多少抑えられるもののやはり全体形式の結果との差はまだ目立つ。このことから増分形式の篠原法で折り返し点をいくつも含む複雑な解曲線を追跡する際，曲率の大きな折返し点付近では，積分過程における弧長刻み幅を適宜小さくするか，ルンゲ・クッタ法などの高次の数値積分法を採用するなどの対策が必要である。図３に各折返し点c1～c6に対応する剛体変位図を示した。解曲線に沿って折返し点を経るにつれ，軸線の波数が多くなるのがわかる。

＊snap-through　を追跡した計算例は，文献 23）で紹介されている。

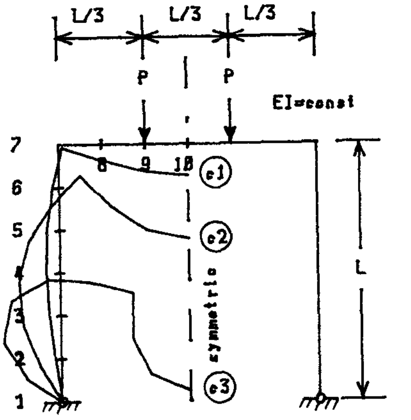

FIG.1 ELASTICA FRAME

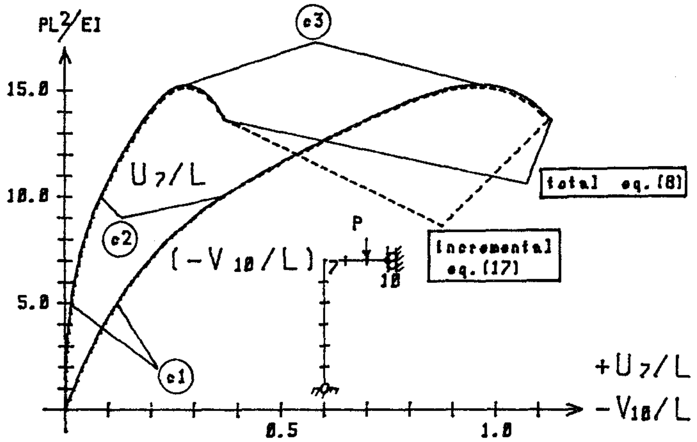

FIG.2 LOAD-DEFLECTION CURVES

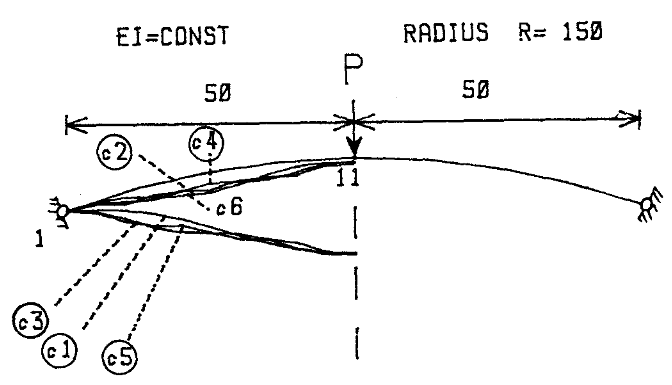

FIG.3 ELASTICA ARCH

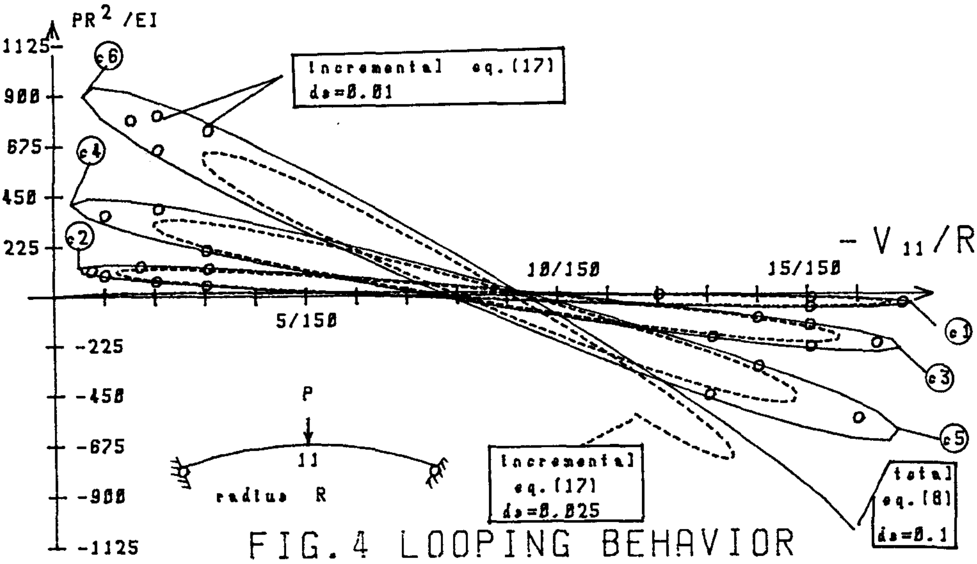

FIG.4 LOOPING BEHAVIOR

7. まとめ

本研究の内容と結論をまとめるとつぎのようである。

①非線形方程式の軌道追跡型解法のひとつである篠原法の原版（全体形式）に対して，反復計算の際に全体方程式を必要としない増分形式の変形ヴァージョンを提案した。

②Riks/Wempnerの弧長増分法，およびHaisler/Stricklin の変位制御法との比較から，その特質を考察してみた。篠原法はHaisler/Stricklin の変位制御法と同じ部類に属する非線形スキームとして位置づけることができる。

③ただし，ある特定の変数（変位）を終始制御するのではなく，接線ベクトルの成分のうち絶対値最大のものを逐次検出し，この成分（m番目）の増分を規定することを提案した。これがHaisler/Stricklin の変位制御法とのひとつの大きな違いである。

④計算例において全体形式／増分形式の篠原法による計算結果を相互に比較した。予想通り全体形式の篠原法は，収束に至るまでの反復回数と精度の点において増分形式の篠原法に勝る。ただし非線形問題の支配方程式が増分型である場合には，その解法は増分形式の篠原法を必要とすることは明らかである。

⑤単純増加／減少する解曲線の分枝においては全体形式／増分形式の違いは差ほど現れないが，特に曲率の大きな折り返し点付近において，両者の違いは顕著となる。

⑥このような曲率の大きな解曲線の部分では，増分形式の篠原法については積分過程の刻み幅を小さくとるか，高次の積分公式を採用するなどの対策を講ずる必要がある。

今後の課題として，全体形式の篠原法の非対称分岐問題への応用，および増分形式の篠原法の有限弾塑性問題での検証が考えられる。

謝辞　本研究をまとめるにあたり，徳島大学工学部篠原能材教授より貴重な助言をいただいたことに感謝する次第である。

参考文献

1) Shinohara, Y. : A geometric mehtod of numerical solution of nonlinear equations and error estimation by Urabe's proposition, Publications of RIMS, Kyoto University, Series A, Vol. 5, 1969
2) Riks, E.: On the numerical solution of snapping problems in the theory of elastic stability, SUDAAR, No. 401, Stanford University, Stanford California, 1970
3) Riks, E.: Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures, Computer methods in applied mechanics and engineering, 47(1984), pp.219-259
4) Riks, E.: The application of Newton's method to the problem of elastic stability, J.Appl. Mech., Vol. 39, pp.1060-1066, 1972
5) Riks, E.: An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, Int. J. Solids and Structures, Vol.15, pp.529-551, 1979
6) Ramm, E.: The Riks/Wempner approach- An extension of the displacement control method in nonlinear analyses, Recent Advances in Nonlinear Computational Mechanics, Pineridge Press Limited, Swansea, UK. pp.63-86, 1982
7) Ramm, E.: Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Springer-Verlag, pp.63-89,1981
8) Wempner, G.A.: Discrete approximations related to nonlinear theories of solids, Int. J. Solids and Structures, Vol.7, pp.1581-1599, 1971
9) Haisler, W.E., Stricklin, J.A. and Key, J.E. : Displacement incrementation in nonlinear structural analysis by the self-correcting method, Int. J. for Numerical Meth. in Engng., Vol.11, 3-10, 1977
10) Bellini, P.X. and Chulya, A: An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations, Computers & Structures, Vol. 26, No.1/2, pp.99-110, 1987
11) Fujii, F.: A simple mixed formulation for elastica problems, Computers & Structures, Vol.17, No. 1, pp. 79-88, 1983
12) Fujii, F. and Gong, S.X.: Field transfer matrix for nonlinear curved beams, ST, Proc.ASCE., Vol. 114, No.3, March 1988, pp. 675-692
13) Fujii, F., Kajita, T. und Naruoka, M.:Ein Berechnungsverfahren zur Grenztragfähigkeits-Untersuchung von Platten mittels der Methode der finiten Elemente, IVBH-Abhandlungen, Band 36-I, pp. 111-124, 1976
14) 藤井文夫，今井康幸: アーチのルーピングつり合い曲線の追跡に見る篠原法について，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第12巻(昭和63年7 月)， pp. 449-454
15) 臼田幸生，藤井文夫：剛体の有限変位問題として定式化した機構解析について，土木学会第４３回年次学術講演会（昭和６３年１０月）
16) 今井康幸，藤井文夫: ３連モーメント定理による snap-back および Looping を含むElastica解析，土木学会中部支部研究発表会概要集，1988年3 月，金沢大学工学部にて，
17) Batoz, J.-L. and Dhatt, G.: Incremental displacement algorithms for nonlinear problems, Int. J. for Nume. Meth. in Engng., 14, 1262-1266, 1979
18) Powell, G. and Simons, J.: Improved iteration strategy for nonlinear structures, Int. J. for Nume. Meth. in Engng., Vol. 17, 1455-1467, 1981
19) Shinohara, Y.: A geometric method for the numerical solution of nonlinear equations and its applications to nonlinear oscillations, Publications of the RIMS, Kyoto Univ., Vol. 8, No. 1, 1972
20) Lee, S.-L., Manuel, F.S. and Rossow, E.C.: Large deflection analysis and stability of elastic frames, Proc. ASCE., EM 2, Vol.94, 521-547, 1967
21) Eriksson, A.: On some path-related measures for nonlinear structural F.E. problems, Int. J. for Numer. Meth. in Engng., Vol. 26, 1791-1803, 1988
22) Bathe, K.-J. and Dvorkin, E.N.: On the automatic solution of nonlinear finite element equations, Computers & Structures, 17, 871-879, 1983
23) Fujii, F.: A scheme for elasticas with snap-back and looping, EM, Proc. ASCE., Oct. 1989 (to appear)

（１９８９年１月３１日受付）