

有限要素法による棒材の有限変位解析に関する研究

A STUDY OF FINITE DISPLACEMENT ANALYSES OF BEAM STRUCTURES BY THE FINITE ELEMENT METHOD

山口栄輝* ボラサック・カノクヌクンシャイ** 太田俊昭***

By Eiki YAMAGUCHI, Worsak KANOK-NUKULCHAI and Toshiaki OHTA

Lagrangian formulations for finite displacement analyses of beam structures by the finite element method are presented. A total Lagrangian formulation is first derived in the context of solid mechanics. Consistent linearization is performed to establish a Newton-Raphson solution scheme in conjunction with an arc length control method as well as a load control method. Based on this formulation, then, the description in an updated Lagrangian mode is obtained by means of a transformation of variables. The degeneration approach is employed to apply these formulations to the analysis of two-dimensional beam structures. The validity of the present formulations in both Lagrangian modes are demonstrated by solving numerical examples.

1. まえがき

有限要素法の発展に伴い、構造工学の分野においては幾何学的非線形構造解析が研究者の注目を集め、数多くの研究がなされている¹⁾。中でも、棒材の有限変位解析に関しては、多くの研究成果が発表されている。棒材の解析を有限要素法で行う場合、大別して二つの方法がある。一つは古典的な棒材の力学における支配方程式より有限要素定式化を行うものであり、もう一つは固体力学に基づいた定式化をまず行い、その後、有限要素および構成方程式に棒材の力学で用いる基本仮定を適用するものである。後者の方法はdegeneration法²⁾と呼ばれ、板や殻の定式化にもよく用いられている^{3), 4)}。この方法によれば、定式化が比較的容易になり、煩雑な式を取り扱わずに精度の良い解を得ることが可能となる。さらに、せん断ひずみの影響を考慮に入れることも容易であり、深い梁や厚い板、殻の解析にもすぐ適用できるという特色がある。本研究はこのdegeneration法を適用し、棒材の有限変位解析に関する研究を行うものである。

いま、初期形状 B_0 から変形後の時間 t の形状 B_t までが既知であるとして、次の時間 $t+\Delta t$ における形状を求めることが要求されているものとする。有限変位解析においては、この B_0 と B_t の形状を明確に区別する必要がある。 B_0 を基準形状として変数を定義し、定式化を行った場合、それはtotal Lagrangian(T.L.)定式化と呼ばれ、 B_t を基準形状にした場合はupdated Lagrangian(U.L.)定式化と呼ばれている。degeneration法に適

* Ph.D. 九州大学助手 工学部土木工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

** Ph.D. アジア工科大学助教授 構造工学部門 (タイ国バンコック市 10501 GPO Box 2754)

*** 工博 九州大学教授 工学部土木工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

用可能な固体力学に基づいた定式化としては、Washizu⁶⁾やBatheら^{6), 7)}のものがよく知られている。その定式化においては、T.L.、U.L.のいずれの場合もそれぞれの基準形状に対応した増分形式の仮想仕事式より誘導を始め、変位増分に関する高次項を除去することにより最終的な線形の離散化式を得、それを有限要素法による幾何学的非線形解析の基礎としている。しかしこうした増分量を用いた定式化ではひじょうに多くの項を取り扱うため、かなりの煩雑さを伴うことになる。また、T.L.、U.L.の二つの手法による解析およびそれらの比較はBatheら^{6), 7)}により行われているが、必ずしも厳密解と良く一致した解が得られているわけではなく、十分に研究されているとは思われない。

これら既存の研究に対し本報告では、増分形式の仮想仕事式を用いないT.L.定式化を提示し、さらにはT.L.の手法で得られた式をもとにしてU.L.定式化が容易に行えることを示す。また、通常よく用いられる荷重増分法だけでなく、より一般的な解析手法である弧長増分法に対応した定式化も提示する。本報告では棒材の2次元挙動を研究対象とするが、こうした定式化を棒材の解析に適用するため、次に、解析に用いる有限要素、構成方程式について論じる。棒材の力学における基本仮定はここで初めて適用される。最後に、T.L.、U.L.の二つの手法を用いて行った棒材の有限変位解析の結果を示す。解析例においては、有限要素法により得られた計算結果を厳密解と比較し、その精度を検討する。

2. 離散化つり合い方程式

第2種Piola-Kirchhoff(P-K)応力テンソル S_{ij} を用いたつり合い方程式、力学的境界条件は次のように表される⁸⁾。

$$(S_{ij}F_{j,j})_{,i} + \rho_0 b_i = 0 \quad (1)$$

$$n_{0i} S_{ij} F_{j,j} - t_{0i} = 0 \quad (2)$$

ここに $F_{j,j}$ は変形勾配、 ρ_0 は密度、 b_i は体積力、 n_{0i} は境界面での単位法線ベクトル、 t_{0i} は単位面積当りの表面力ベクトルを表す。添え字の 0 は B_0 において定義された量であることを示し、大文字の添え字は物体座標系、小文字の添え字は空間座標系に対応している。また、数式の記述においては総和規約を採用している。

Galerkin法を用いた重み付き残差法を式(1)、(2)に適用し、Greenの定理を用いれば

$$G(u, w) = \int_{V_0} S_{ij} F_{j,j} w_{i,i} dV - \int_{V_0} \rho_0 b_i w_i dV - \int_{A_0} t_{0i} w_i dA = 0 \quad (3)$$

を得る。ここに u は変位ベクトル、 w は重み関数、 V_0 は B_0 の内部、 A_0 は B_0 の境界面を表す。本研究ではアイソパラメトリック要素を用いることとし、 N^b を節点 b に対応する形状関数、 n を一要素当りの節点数とすれば、変位および重みは

$$u_i = \sum_{b=1}^n N^b U_i^b \quad (4)$$

$$w_i = \sum_{b=1}^n N^b W_i^b \quad (5)$$

と表わされることになる。これらの式を用いて式(3)を離散化すれば、一要素に関して次の表現を得る。

$$G^0(U, W) = \sum_{b=1}^n W_j^b (K_j^b(U) - R_j^b) \quad (6)$$

ここに

$$K_j^b = \int_{V_0} S_{ij} F_{j,j} N_{i,i}^b dV \quad (7)$$

$$R_j^b = \int_{V_0} \rho_0 b_i N_i^b dV + \int_{A_0} t_{0i} N_i^b dA \quad (8)$$

添え字の^oは一要素当りの量であることを示す。

式(6)は一要素における表現であり、これを重ね合わせるにより、全領域での離散化表示が次のように得られる。

$$G(U, W) = W_j (K_j(U) - R_j) = 0 \quad (9)$$

ここで W_j は任意であるから、結局、次の離散化つり合い方程式が得られる。

$$K_j(U) - R_j = 0 \quad (10)$$

式(7)、(8)における変数はすべて B_0 を基準形状として定義されているので、ここではT.L.定式化を行ったこととなる。

ところで、第2種P-K応力テンソル S_{ij} とCauchy応力テンソル σ_{ij} の間には次の関係がある。

$$\sigma_{ij} = J^{-1} F_{i1} F_{j2} S_{12} \quad (11)$$

ここに $J = |F_{ij}|$ である。この式(11)を用いれば、式(7)は次のように変換できる。

$$K_j^b = \int_{V_t} \sigma_{ij} N_j^b dV \quad (12)$$

また質量の保存則 $\rho_o / \rho_t = J$ および B_t に作用する単位面積当りの表面力ベクトル t_{ij} を用いれば、

$$R_j^b = \int_{V_t} \rho_t b_j N_j^b dV + \int_{A_t} t_{ij} N_j^b dA \quad (13)$$

を得る。式(12)、(13)において変数はすべて B_t を基準形状として定義されているので、これらを用いて式(10)を構築すれば、それはU.L.定式化となる。

ここでは、T.L.の手法で得た離散化つり合い方程式の積分変数を変換する方法でU.L.定式化を行ったが、Cauchy応力テンソルを用いたつり合い方程式および力学的境界条件より、式(12)、(13)の離散化式を直接導くことも可能である。

3. 接線剛性行列

有限変位解析では、式(10)を解くことにより荷重と変位の関係を求めることになるが、この式は非線形であり、その解法には一般に何らかの数値解析を必要とする。通常よく用いられるのは、荷重増分法にNewton-Raphson法を適用する手法である。この数値解析法では次の線形方程式を用いて繰り返し計算を行い、解を求めることとなる。

$$[DK(U^{(m)})] \{\Delta U^{(m)}\} = \{R_{(n)}\} - \{K(U^{(m)})\} \quad (14)$$

ここに $[DK(U^{(m)})]$ は接線剛性行列であり、添え字の (n) は荷重ステップ、 (m) は繰り返し計算の回数を示す。また $m+1$ 回目の変位は

$$\{U^{(m+1)}\} = \{U^{(m)}\} + \{\Delta U\} \quad (15)$$

で与えられる。この繰り返し計算は、あらかじめ定められた収束条件を満足するまで行われる。

荷重増分法では、まず荷重ベクトル $\{R_{(n)}\}$ を与え、それに対応する変位ベクトル $\{U_{(n)}\}$ を求めることとなる。従って荷重の極大値が存在する構造系の場合には、この解析法では不十分であり、他の方法を用いることが必要となる。本研究では、こうした場合、弧長増分法を用いることとし、以下にこの手法による解析手順を示す。

比例載荷を仮定し、その比例係数を r 、基準荷重ベクトルを $\{R_o\}$ とすれば、弧長増分法では次の非線形方程式を解くこととなる⁹⁾。

$$\{K(U)\} - r\{R_o\} = 0 \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^o (\alpha_j)^2 (U_j - U_j^*)^2 + (\alpha_r)^2 (r - r^*)^2 = (\Delta s)^2$$

ここに α_j 、 α_r 、 Δs は任意の定数、添え字の $*$ は1ステップ前の解を示し、 p は構造物の変位の自由度を表している。この手法では変位のみでなく、荷重の比例係数 r も未知数であり、弧長増分 Δs による制御が行われる。式(16)にNewton-Raphson法を適用すれば、次の線形方程式を用いた繰り返し計算により解を得ることとなる。

$$\begin{aligned} [DK(U_{(n)}^{(m)})]\{\Delta U\} - \{R_b\}\Delta r &= -\{K(U_{(n)}^{(m)})\} + r_{(n)}^{(m)}\{R_b\} \\ \sum_{j=1}^p 2(\alpha_j)^2 (U_{j(n)}^{(m)} - U_j^*) \Delta U_j + 2(\alpha_r)^2 (r_{(n)}^{(m)} - r^*) \Delta r \\ &= (\Delta s)^2 - \sum_{j=1}^p (\alpha_j)^2 (U_{j(n)}^{(m)} - U_j^*)^2 - (\alpha_r)^2 (r_{(n)}^{(m)} - r^*)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$m+1$ 回目の繰り返し計算においては、

$$\begin{aligned} \{U_{(n)}^{(m+1)}\} &= \{U_{(n)}^{(m)}\} + \{\Delta U\} \\ r_{(n)}^{(m+1)} &= r_{(n)}^{(m)} + \Delta r \end{aligned} \quad (18)$$

を用いることとなる。

いずれの数値解析法においてもNewton-Raphson法を用いているため、要素接線剛性行列を求めることが必要となるが、これは内力ベクトル K^b を節点変位ベクトル U^a で微分することにより得ることができる。すなわち、それは次式で与えられる。

$$DK_{ji}^{ba} = \frac{\partial K_{ji}^{ba}}{\partial U_i^a} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial U_i^a} F_{ij} N_{i,1}^b + S_{ij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial U_i^a} N_{i,1}^b \right) dV \quad (19)$$

ここで変形勾配、Greenひずみテンソルおよび変位の間の関係を用いて微分を行えば、T.L.定式化における要素接線剛性行列が次のように得られる。

$$DK_{ji}^{ba} = \int_{V_0} (F_{jL} C_{JLIK} F_{iK} + \delta_{ij} S_{ij}) N_{i,1}^a N_{j,1}^b dV \quad (20)$$

ここに δ_{ij} はKroneckerの記号である。また C_{JLIK} は

$$C_{JLIK} = \frac{\partial S_{JL}}{\partial E_{IK}} \quad (21)$$

で定義される。この式で E_{IK} はGreenひずみテンソルを表している。

離散化つり合い方程式の場合と同様に式(11)を用いて式(20)を変換すれば、次に示すU.L.の手法における要素接線剛性行列を簡単に得ることができる。

$$DK_{ji}^{ba} = \int_{V_t} (c_{ijkl} + \delta_{ij} \sigma_{kl}) N_{i,k}^a N_{j,l}^b dV \quad (22)$$

ここに

$$c_{ijkl} = J^{-1} C_{JLIK} F_{iJ} F_{jL} F_{kI} F_{lK} \quad (23)$$

である。

4. 棒材の力学における基本仮定の適用

これまで示した定式化は固体を対象としており、棒材などの特定の構造部材に対するものではない。従って、この定式化を棒材に適用するためには、平面保持、さらには軸線直角方向の直応力の無視、といった棒材の力学における基本仮定を何らかの方法で満足させる必要がある。ここでは、こうした仮定を有限要素および構成方程式に取り入れることにより棒材理論と整合させる。但し直角保持の仮定は考慮に入れない。

(1) 有限要素

degenerate棒要素としては様々なものが提案されているが、ここではKanok-Nukulchaiらにより開発されたB6棒要素¹⁰⁾を用いる。このB6棒要素はアイソパラメトリック要素の一種であるが、通常のものとは異なり、Fig.1に示すように軸線上に位置する三つのreference node、それらと対をなす三つのrelative nodeから成っている。relative nodeに割り当てられる座標、変位はともに

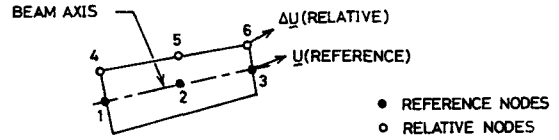


Fig.1. Typical B6 Beam Element

軸線上の節点からの相対位置、相対変位である。またこの要素では棒材の深さ方向に1次の形状関数がいわれているため、棒材の力学における平面保持の仮定が満たされることになる。

通常のアイソパラメトリック要素を用いて棒材の解析を行った場合、計算機が扱える桁数には制限があるため、アスペクト比(長さ/深さ)が非常に大きくなると数値計算上問題が出てくる。例えばBatheらの解析において、一要素当りのアスペクト比が100の場合の計算結果は、それが2の場合に比べて非常に悪い精度となっている⁷⁾。しかし、relative nodeを採用することにより、アスペクト比が相当大きな場合にも精度の良い解を得ることが可能となる¹⁰⁾。またrelative nodeにより、回転角を節点変数に組み込む必要もなくなる。このことは、3次元解析においてさらに有用になるものと思われる。

剛性行列を求める際に厳密な積分を行うと、剛性が過大に評価され良い結果が得られないことがある¹¹⁾。これは棒材の深さや板厚が小さい場合に特に大きな問題となる。この現象はshear lockingと呼ばれており、その対策としてはselective reduced integrationが挙げられる¹¹⁾。この方法は解の精度を上げるのみならず、計算量も減少させることになるので、実用上、非常に有効である。本研究で用いるB6棒要素においても、せん断変形に関する項については厳密な積分を行うための3x2ではなく、2x2の積分点を用いたGaussの数値積分を行う必要があると報告されている¹⁰⁾。本報告の数値解析においてもこれに従い、後に示す計算例ではすべての項の積分を、2x2の積分点を用いて行っている。

(2) 構成方程式

ここまでの定式化は構成則と無関係に行われているので、弾塑性等の非線形な応力-ひずみ関係を持つ材料にも適用可能である。しかし、本研究では第2種P-K応力テンソルとGreenひずみテンソルの間に線形関係が成立する等方性の弾性材料のみを取り扱うこととする。すなわち C_{JLIK} が定数であり、次式で表される材料をここでは考える。

$$C_{JLIK} = \lambda \delta_{JL} \delta_{IK} + \mu (\delta_{JI} \delta_{KL} + \delta_{JK} \delta_{LI}) \quad (24)$$

ここに λ 、 μ はLameの定数である。

棒材の力学においては軸線直角方向の直応力は無視されるので、本研究で行う平面棒材の解析では次の構成則を用いることになる。

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここに E 、 G はそれぞれヤング率、せん断弾性係数である。また Z はfictitious coefficientと呼ばれ、本来は存在しないものであるが、安定した数値解を得るために導入されている^{2), 4)}。当然のことではあるが、

この Z が計算結果に及ぼす影響は非常に小さく、B6棒要素の場合、 Z は、一要素当りの深さ／長さの2乗とヤング率の積の0.1倍から 10^8 倍の大きさを取ることができる¹⁰⁾。

式(23)から明らかなように、 C_{ijkl} が定数の場合、U.L.定式化に現れる c_{ijkl} は定数とはならない。すなわち c_{ijkl} は変形に応じて変化し、その値は式(23)を用いて求める必要があり大きな計算量が要求される。ところで棒材の問題では、変位は大きいがひずみは微小であるという場合が少なくない。その際には、式(23)において $J=1$ が仮定でき、さらには変形勾配の代わりに剛体回転を表す座標変換行列を用いてもかまわないと考えられる。このことは、 $Z=E$ 、 $G=E/2$ となる場合、すなわち式(25)における材料剛性行列が等方性として取り扱える場合には、式(23)の変換が不要であることを意味し、U.L.定式化における計算量の大幅な減少を示唆している。

5. 数値計算例

本解析手法の妥当性を検証し、また式(23)の取り扱いについて考察するために、T.L.、U.L.の二つの定式化により数値解析を行った。構造的に安定なものだけでなく、不安定現象を示す非線形性の高い構造系も取り上げた。すべての解析においてNewton-Raphson法を適用しており、変位増分ノルムが変位ノルムの $1/10^5$ 以下になるまで繰り返し計算を行った。各ステップにおいて必要とした繰り返し計算回数は、解析結果とともに以下に示している。なお、ここで行った解析では $Z=E$ 、 $G=E/2$ となる構成則を用い、式(23)の変換は行わなかった。

(1) 片持梁

まず先端に集中荷重を受ける片持梁の解析を行った。ここでは、Fig. 2の中に示すように、片持梁を3要素でモデル化している。梁の深さは長さに比べてかなり小さく、アスペクト比の大きな棒材となっている。解析に当たっては荷重増分法を用いた。

得られた結果はFig. 2に示している。この図は荷重－変位曲線を表しており、縦軸は荷重 P を曲げ剛性 EI と梁の長さ L で無次元化し、横軸は梁先端のたわみ W を梁の長さ L で無次元化している。図中の実線はMattiassonによる厳密解¹²⁾であり、○、△はそれぞれT.L.、U.L.の手法による解である。図より明らかなように、T.L.、U.L.の二つの定式化をもとにした計算結果は、たわみの大きな領域で若干のずれが見られるものの、互いに良く一致している。このずれは式(23)の変換を省略したこと起因していると考えられるが、その大きさは無視できる程度のものである。また少ない要素数にもかかわらず、有限要素法による解は厳密解と良く一致しており、本研究で行った定式化の妥当性を示している。要素数を増やすことにより、有限要素解の精度をさらに高めることも可能であり、例えば8要素を用いてT.L.の手法で解析を行った場合、 $PL^2/EI=4.0$ における W/L の誤差はわずか0.13%であった。Newton-Raphson法では繰り返し計算の回数が計算の労力に大きくかわ

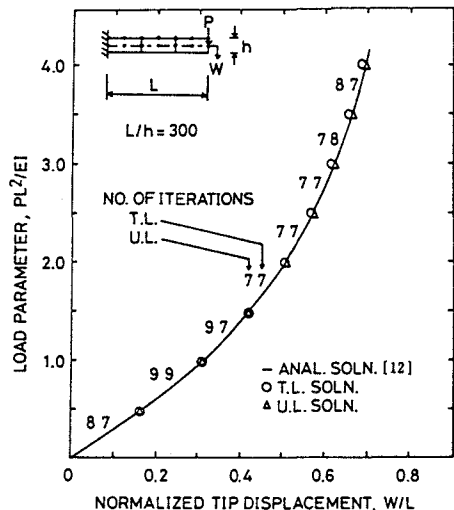


Fig. 2 Load-Deflection Curve of Cantilever Beam

ってくるが、T.L.、U.L.のいずれの手法を用いても計算回数に大きな差は認められなかった。

(2) エラスティカ

次の数値解析例としてエラスティカを選んだ。解析に際しては、5要素を用いて柱のモデル化を行い(Fig. 3)、不安定現象を生じさせるために1/1000の傾きを初期不整として与えた。この解析にも荷重増分法を適用した。

解析結果として、座屈荷重 P_{cr} と柱の長さ L を用いて無次元化した荷重-変位曲線をFig. 3に示している。座屈荷重 P_{cr} は、この場合 $\pi^2 EI/4L^2$ で与えられる。○、△はそれぞれT.L.、U.L.の手法による解を表すが、先の解析例同様互いに良く一致しており、また繰り返し計算回数にも大きな差は見られなかった。実線は楕円積分による解析解¹³⁾を示すが、有限要素法で得られた解はこれと変形の小さな領域において若干のずれを生じている。これは有限要素解析において初期不整を導入したことによるものであり、その影響が小さくなる変形の大きな領域では厳密解と有限要素解との差は無視できるものとなっている。例えばTable 1の()内に示すように、 $P/P_{cr}=1.063$ における誤差はT.L.で0.86%、U.L.で0.53%、 $P/P_{cr}=1.152$ における誤差はT.L.で0.28%、U.L.で0.17%である。この結果は本解析の精度の高さを示すものである。

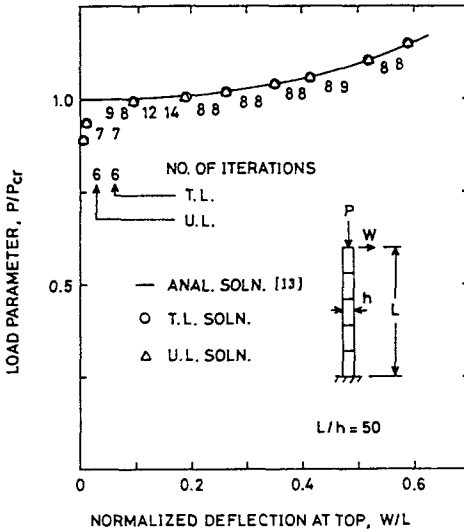


Fig.3 Load-Deflection Curve of Elastica Problem

Table 1 Comparison of FEM Results with Analytical Solutions for Elastica

P/P_{cr}	W/L		
	ANAL. ¹³⁾	T.L.	U.L.
1.063	.422	.4256 (0.86%)	.4242 (0.53%)
1.152	.593	.5947 (0.28%)	.5940 (0.17%)

(3) 円弧アーチ

最後に、中央部の頂点に集中荷重を受ける一端固定、一端ヒンジの円弧アーチを解析した。アーチの形状はFig. 4の中に示しているが、そのモデル化には8要素を用いた。このタイプの構造物の荷重-変位曲線は荷重の極大値を有し、その傾きが負になる不安定領域が存在する。このため、通常の荷重増分法ではこの極大値近傍で数値計算上の困難が生じることとなる。従って本解析においては、最初の4ステップでは荷重増分法を用いたものの、その後は弧長増分法を適用して解析を行った。弧長増分法では、 α_j の値には単位の値を選び、 α_r の値は初期状態で $\alpha_r |r-r^*| = \max(\alpha_j |U_j - U_j^*|)$ となるように選んだ⁹⁾。

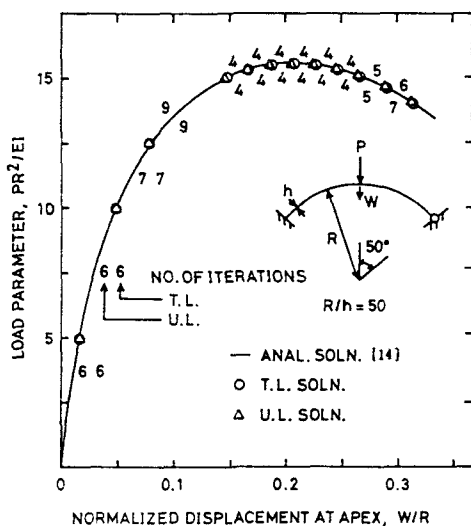


Fig.4 Load-Deflection Curve of
Clamped-Hinged Arch

Fig.4に計算結果を示す。この図は、アーチの曲率半径 R 、曲げ剛性 EI を用いて無次元化した荷重-変位曲線を表しており、図中の実線はDaDeppoらによる厳密解¹⁴⁾を示している。T.L.、U.L.の二手法による解は変形の大きな領域で少しずれを生じるが、その大きさはごくわずかであり、両方の解とも文献14)に荷重-変位曲線の形で示されている厳密解と極めて良く一致している。

ところで、数値解析においては有限個の解のみが得られる。このため、ここで行ったアーチの解析においても、極大荷重を求めるには何らかの補間法を用いることが必要となる。ここでは3次多項式を使ったスプライン関数を用いて、Fig.4に示す有限要素法で得られた解を補間し、荷重の極大値およびそれに対応する変位を求めた。結果はTable 2にまとめている。これらの値に関してDaDeppoらは厳密解を数字で与えているので、これもTable 2に表示している。表中、()内の数字は誤差を示しているが、いずれの場合も1%以下であり、ここで行った有限要素解析の精度の高さを示している。またこの解析においても、T.L.とU.L.の間に繰り返し計算回数差は殆ど見られなかった。

6. まとめ

第2種P-K応力テンソルを用いたつり合い方程式、力学的境界条件をもとに、T.L.定式化における離散化つり合い方程式をまず導いた。これに対応する接線剛性行列は、内力ベクトルを節点変位で微分することにより誘導した。このT.L.定式化は、増分量を特に取り扱うことがないため、増分形式の仮想仕事式に基づく定式化に比べて簡潔なものとなっている。さらにT.L.定式化で得られた離散化つり合い方程式、接線剛性行列において積分変数の変換を施せば、簡単にU.L.定式化が行えることを示した。この誘導方法によれば、T.L.定式化とU.L.定式化の違いは単に積分変数の違いであることが、容易に理解される。従って、厳密な計算を行えば、この二つの手法により全く同じ解が得られることは明らかである。この定式化は固体に対するものであるため、最後に棒材への適用法を提示し、数値解析を行った。解析例においては、T.L.、U.L.のいずれの手法を用いても十分精度の良い解が得られ、棒材の有限変位問題における本解析手法の妥当性、有効性が

Table 2 Comparison of FEM Results with
Analytical Solutions for Arch

	ANAL. ¹⁴⁾	T.L.	U.L.
PR^2/EI	15.42	15.50 (0.55%)	15.57 (0.97%)
W/R	.2038	.2049 (0.53%)	.2054 (0.76%)

示された。ここでは棒材の2次元挙動を研究対象としたが、本解析手法では回転角を取り扱わないため、3次元空間への拡張も比較的容易であると思われる。

ところで、U.L.定式化で用いる弾性テンソル c_{ijkl} は、構成則が第2種P-K応力テンソルとGreenひずみテンソルの間で定められた場合には、式(23)の変換により求めねばならない。しかし、本研究の数値解析例ではこの変換を無視したにもかかわらず、十分精度の良い解を得ることができた。これより、棒材の材料剛性行列が等方性として扱える場合において、変位は大きいがひずみは微小であると考えられる際には、この変換を省略しても差し支えないことが判明した。これは計算効率を考える際には重要なポイントであり、この点を踏まえ、T.L.、U.L.の二つの手法を計算効率の観点から比較することが、今後の課題である。

参考文献

- 1) 吉田裕：有限要素法による幾何学的非線形構造解析法の現状と課題、土木学会論文集、第374号/I-6、pp.25-37、1986年。
- 2) Kanok-Nukulchai, W., Hasegawa, A. and Nishino, F. : Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements, Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE, Vol.3, pp.53s-61s, 1986.
- 3) Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C. : Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.2, pp.419-451, 1970.
- 4) Kanok-Nukulchai, W., Taylor, R.L. and Hughes, T.J.R. : A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method, Comput. Structures, Vol.13, pp.19-27, 1981.
- 5) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd ed., Pergamon Press, 1982.
- 6) Bathe, K.J., Ramm, E. and Wilson, E.L. : Finite element formulations for large deformation dynamic analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.9, pp.353-386, 1975.
- 7) Bathe, K.J. and Bolourchi, S. : Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.14, pp.961-986, 1979.
- 8) Eringen, A.C. : Continuum Physics, Vols. I and II, Academic Press, 1974.
- 9) タウイーブ・シャイソンボブ、ボラサック・カノクヌクンシャイ、西野文雄：弧長自動変更アルゴリズム、構造工学論文集、Vol.34A、pp.43-50、1988年。
- 10) Kanok-Nukulchai, W. and Sze, K.H. : An accurate degenerate beam element for large deformation analysis, Proc. Int. Conf. on Finite Element Methods, Shanghai, pp.727-733, 1982.
- 11) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M. : Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.3, pp.275-290, 1971.
- 12) Mattiasson, K. : Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.17, pp.145-153, 1981.
- 13) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961.
- 14) DaDeppo, D.A. and Schmidt, R. : Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load, J. Appl. Mech., ASME, Vol.42, pp.894-896, 1975.

(1988年10月12日受付)