

有限回転を伴う空間曲線充実棒部材の動的解析

Dynamic Analysis of Naturally Curved and Twisted Rods with Finite Rotations

*

**

井浦雅司 S. N. Atluri

By Masashi Iura and S. N. Atluri

The objective of this paper is to analyze a dynamic behavior of highly flexible 3-dimensional rods with finite rotations. The case of conservative force loading, which may also lead to configuration-dependent moments, is considered. Using the Lagrangian components of rotation tensor, a symmetric tangent stiffness matrix is derived at all times even though an external moment is applied. In the total Lagrangian description, the consistent mass matrix depends nonlinearly on the rotation parameters. An apparent damping matrix is derived from the effects of finite rotations. A Newmark time-integration scheme is employed to integrate the semi-discrete finite element equation in time. Several numerical examples are presented to illustrate the validity of the theoretical methodology developed in this paper.

1. はじめに

3次元空間において有限回転を伴うTimoshenko梁の研究は、AntmanとJordan(1), Reissner(2, 3), Simo(4), 井浦と平嶋(5), IuraとAtluri(6, 7)らによってなされている。これらの研究の中で、文献(1)～(4)では、平衡方程式の誘導の際に、変形に依存しない外力モーメントの存在があらかじめ仮定されている。しかしながら、Argyris et al.(8)らが指摘しているように、変形に依存しない外力によって生じる外力モーメントは、一般に、変形に依存する量である。文献(5)では、変形に依存する外力モーメントが定義されているものの、その物理的説明はなされていない。文献(6, 7)では、仮想仕事の原理を用いて外力モーメントの定義がなされており、文献(8)と同様の定義を得ている。通常、外力は梁の表面に作用することが多く、更に、剛体により外力が伝達される場合など、これらの外力によって生じるモーメントの変形依存性は必ずしも無視できない場合がある。

既に知られているように、回転成分については、各研究者間でさまざまな定義が用いられている。文献(8)で、Argyrisらは、空間に固定された座標系に関する回転成分を用いて、非対称の接線剛性マトリックスを導いており、この理由として有限回転が可換でないことを挙げている。一方、SimoとVu-Quoc(9)は、非対称テンソルに関連する回転成分を用いて、接線剛性マトリックスは釣合状態の時のみ対称になると結論している。更に、分布外力モーメントが存在する場合、釣合状態においても、接線剛性マトリックスは非対

* 工博 東京電機大学助教授 理工学部建設工学科 (〒160 埼玉県比企郡鳩山町)

** Dr. Sci., Regents' Professor, Georgia Institute of Technology (Atlanta, GA 30332)

称になるとしている。この様に、微小回転とは異なり、有限回転の時には、用いる回転成分により、接線剛性マトリックスの対称性が失われる場合がある。これらの研究に対して、IuraとAtluri (6, 7) は、回転テンソルのLagrange成分を用いることにより、分布外力モーメントが作用していても、ポテンシャルが存在することを示している。すなわち、釣合い状態であっても接線剛性マトリックスは、微小回転の時と同様に、常に対称となることを示している。このことは、数値計算を行なう場合、接線剛性マトリックスの作成時間が削減されることを意味しており、大きな長所である。一般に、変形に依存する外力が作用する場合、ポテンシャルは存在しない。しかしながら、上で述べたように、本報告において定義される外力モーメントは、変形に依存しない外力により生じるため、外力モーメントが変形に依存する量であっても、回転テンソルの任意のLagrange成分を用いることによりポテンシャルが存在する。

有限回転における特異点の回避方法には様々な手法がこれまでにも提案されており、大別すると、3成分を用いて何らかの方法で特異点を回避するものと、4成分を用いて特異点が生じないようにするものに分けられる。これらの方法にはそれぞれ一長一短があり、ここでは、前者の方法を用いている。3成分としては、CRV (Conformal Rotation Vector) のLagrange成分を用いており、特異点は比較的簡単な方法で回避することができる。

本報告では、弾性材料を対象としており、Timoshenko梁理論に含まれている仮定以外は何の近似も行なわず、変位、回転、歪等の大きさにも制限はない。そのため、離散化された支配方程式には、微小回転の時とは異なり、非線形の質量マトリックスが表われる。更に、角速度に関連した項も表われるが、これは有限回転の影響によるものであり、減衰項とは無関係である。数値積分にはNewmarkの β 法を用いており、更に、非線形代数方程式の解法にはNewton-Raphson法を用いている。数値計算例では、本手法の妥当性を確認したあとに、外力モーメントの変形依存性について調べ、更に、3次元空間において大回転を伴う両端自由梁の動的解析を行なう。

なお、本報告では、() はベクトルを、() はテンソルを示し、総和規約を用いている。

2. 変形の幾何量

本報告で用いる仮定は以下のようである。

- (1) 変形前に平面である横断面は、棒軸に沿って一定であり、変形後も平面を保持し、その形状は変化しない。

棒軸に沿って Y^3 座標系を、横断面内に Y^1, Y^2 座標系をとり、それぞれの単位規底ベクトルを $\underline{E}_m$ とする。横断面内の任意点における規底ベクトルは、Frenet-Serretの公式により以下のように表わされる (図-1 参照)。

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \underline{E}_1, & \underline{A}_2 &= \underline{E}_2, & \underline{A}_3 &= -Y^2 K_3 \underline{E}_1 + Y^1 K_3 \underline{E}_2 + g_0 \underline{E}_3 \\ g_0 &= 1 - Y^1 K_2 + Y^2 K_1 \end{aligned} \quad (1a-c)$$

ここに、

$$\underline{E}_{m,3} = \underline{K} * \underline{E}_m, \quad \underline{K} = K_m \underline{E}_m, \quad ()_{,3} = d()/dL \quad (2a,b)$$

であり、 K_1, K_2 は初期曲率、 K_3 は初期捩率、 $*$ は掛算、 L は変形前の棒軸に沿った弧長パラメータである。

ベクトル $\underline{E}_m$ が、回転テンソル $\underline{R}$ により剛体回転した時、そのベクトルを $\underline{e}_m$ とすると、 $\underline{e}_m = \underline{R} \underline{E}_m$ なる関係式が得られる。一般に、ベクトル $\underline{e}_3$ は、剪断変形のために変形後の接線ベクトルにならない。変形後の接線ベクトルはその定義により、

$$\underline{e}_3^* = u^m l_{3s} \underline{E}_m, \quad u^m l_{3s} = (\delta^m_3 + u^m l_3) / g, \quad g = \sqrt{(u^1 l_3)^2 + (u^2 l_3)^2 + (1 + u^3 l_3)^2} \quad (3a-c)$$

と表わされる。ここに、 $\underline{u} = u^m \underline{E}_m$ は棒軸における変位ベクトルを、 δ_{mn} はKroneckerのデルタであり、 $(\cdot)_{l_3}$ は変形前の棒軸に関する共変微分を示す。

任意点における変位ベクトル $\underline{U}$ は、ここでの仮定より $\underline{U} = \underline{u} + Y^\alpha (\underline{e}_\alpha - \underline{E}_\alpha)$ と表わされる。これより、変形後の任意点における規底ベクトルは以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \underline{e}_1, \quad \underline{a}_2 = \underline{e}_2, \quad \underline{a}_3 = (g \sin \beta_1 - Y^2 k_3) \underline{e}_1 + (g \sin \beta_2 + Y^1 k_3) \underline{e}_2 + \\ &\quad (g \beta_3 - Y^1 k_2 + Y^2 k_1) \underline{e}_3 \quad (4a-c) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \sin \beta_\alpha &= (\underline{R} \cdot \underline{E}_\alpha) \cdot (\underline{u} \parallel \underline{E}_m) \\ \beta_3 &= (\underline{R} \cdot \underline{E}_3) \cdot (\underline{u} \parallel \underline{E}_m), \\ k_1 &= \varepsilon_{1jk} [(\underline{R} \cdot \underline{E}_j) \cdot \underline{e}_3] \cdot (\underline{R} \cdot \underline{E}_k) / 2 \quad (5a-c) \end{aligned}$$

であり、 ε_{ijk} は交代記号である。また、 $\underline{k} = k_m \underline{e}_m$ は、 $\underline{e}_{m,3} = \underline{k} * \underline{e}_m$ を満足する。

3. 仕事率と歪エネルギー

変形前の単位体積あたりの仕事率 ' W_0 ' は、

$$W_0 = \underline{t} : \underline{F}^T = \underline{S}_1 : \underline{F} \quad (6)$$

と表わされ (Atluri [10])、ここに、 $\underline{t}$ と $\underline{S}_1$ はそれぞれ第1種と第2種のPiola-Kirchhoffの応力テンソルを、 $\underline{F}$ は変形勾配テンソルを、 $\underline{F}$ はGreen

の歪テンソルを、 $:$ はテンソルのスカラー積を示している。断面力は、その定義より

$$\underline{T} = \int g_0 \underline{A}^3 \cdot (\underline{S}_1 \underline{F}^T) dA, \quad \underline{M} = \int Y^\alpha \underline{e}_\alpha * [\underline{g}_0 \underline{A}^3 \cdot (\underline{S}_1 \underline{F}^T)] dA \quad (7a, b)$$

となる。ここに、 $dA = dY^1 dY^2$ である。断面力を成分表示すると

$$\underline{T} = T^m \underline{e}_m, \quad \underline{M} = M_m \underline{e}_m \quad (8a, b)$$

と表わされる。式(7)と(8)を用いると、梁の単位長さ当たりの仕事率 ' MP ' が以下のように得られる。

$$MP = T^m h_m + M^m k_m, \quad h_1 = g \sin \beta_1, \quad h_2 = g \sin \beta_2, \quad h_3 = g \beta_3 \quad (9a-d)$$

ここで、式(8)の成分を陽に表わすと、

$$\begin{aligned} T^m &= \int t^{3m} g_0 dA, \quad M^1 = \int t^{33} Y^2 g_0 dA, \quad M^2 = -\int t^{33} Y^1 g_0 dA, \\ M^3 &= \int (t^{32} Y^1 - t^{31} Y^2) g_0 dA \end{aligned} \quad (10a-d)$$

となり、ここに、 $t^{mn} = S_1^{mj} \underline{a}_j \cdot \underline{e}_n$, $\underline{S}_1 = S_1^{mn} \underline{A}_m \underline{A}_n$ である。応力による仕事率が等しいという条件から、 t^{mn} の共役な歪テンソルは $\underline{e}_{mn} = \underline{a}_m \cdot \underline{e}_n - \underline{A}_m \cdot \underline{E}_n$ と求まる。これより、本報告では構成条件式として、以下の式を仮定する。

$$t^{31} = G e_{31}, \quad t^{32} = G e_{32}, \quad t^{33} = E e_{33} \quad (11a-c)$$

ここに、 G は剪断弾性係数を、 E は Young 係数を示している。また、文献(5)に示されているように、断面保持の仮定より $S_1^{\alpha\beta} = 0$ となる。式(11)より、変形前の単位長さ当たりの歪エネルギーが以下のように求まる。

$$\begin{aligned} W_0 &= GA_0(h_1)^2/2 + GA_0(h_2)^2/2 + EA(h_3-1)^2/2 + EI_{11}(k_1-K_1)^2/2 + EI_{22}(k_2-K_2)^2/2 + \\ &\quad GJ(k_3-K_3)^2/2 + EI_1(h_3-1)(k_1-K_1) - EI_2(h_3-1)(k_2-K_2) - EI_{12}(k_1-K_1)(k_2-K_2) - \\ &\quad GI_1 h_1(k_3-K_3) + GI_2 h_2(k_3-K_3) \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、

$$A = \int g_0 dA, \quad A_0 = k^* A, \quad I_1 = \int Y^1 g_0 dA, \quad I_2 = \int Y^2 g_0 dA, \quad I_{12} = \int Y^1 Y^2 g_0 dA,$$

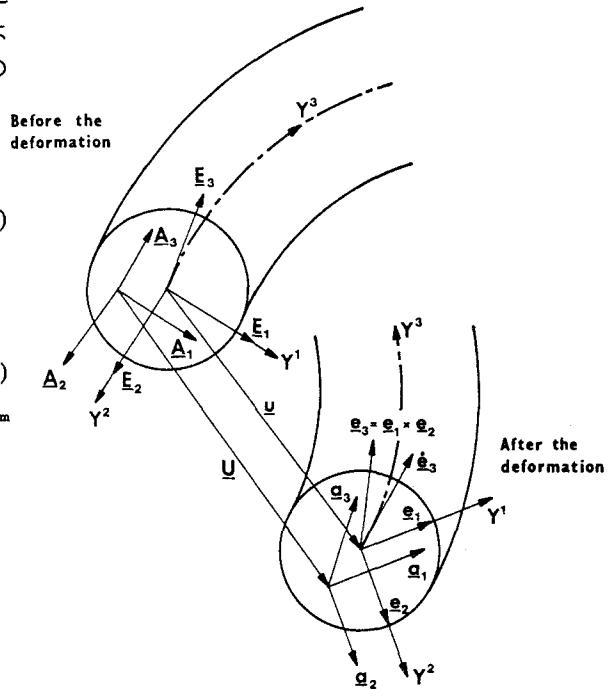


Fig. 1. Kinematic scheme for highly flexible space-beam analysis.

$$I_{11} = \int (Y^2)^2 g_0 dA, \quad I_{22} = \int (Y^1)^2 g_0 dA, \quad J = \int \rho g_0 dA, \quad \rho = (Y^1)^2 + (Y^2)^2 \quad (13a-h)$$

であり、 k^* は修正係数である (Cowper [11])。

4. 平衡方程式

ここでは、以下に示される仮想仕事の原理を用いて平衡方程式を導く。

$$\int [\delta T - I V W + E V W] dt = 0 \quad (14)$$

ここに、 T は運動エネルギーを、 $I V W$ は内力による仮想仕事を、 $E V W$ は外力による仮想仕事を表わしており、それぞれ次式のように表わされる。

$$T = \int \rho_0 \cdot \underline{U} \cdot \underline{U} dV, \quad I V W = \int S_{ij}^{(1)} \delta e_{ij} dV, \quad E V W = \int \underline{P}_b \cdot \delta \underline{U} dV + \int \underline{P}_o \cdot \delta \underline{U} dS_o + [\int \underline{P}_e \cdot \delta \underline{U} dS_e] \quad (15a-c)$$

ここに、 ρ_0 は変形前の密度を、 $\underline{P}_b$ は物体力を、 $\underline{P}_o$ は梁の表面に作用する外力を、 $\underline{P}_e$ は梁の両端に作用する外力を示す。

外力としては、変形に依存しない保存力を仮定すると、それぞれ以下のように表わされる。

$$\underline{P}_b = P^1_b \underline{E}_1, \quad \underline{P}_o = P^1_o \underline{E}_1, \quad \underline{P}_e = P^1_e \underline{E}_1 \quad (16a-c)$$

式(16)を式(15)に代入し、 $E V W$ を書き直すと

$$E V W = \int [\underline{q} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\phi}] dL + [\underline{\bar{q}} \cdot \delta \underline{u} + \underline{\bar{m}} \cdot \delta \underline{\phi}]_{s_e} \quad (17)$$

となり、ここに、 $\delta \underline{\phi} \cdot \underline{J} = \delta \underline{R} \cdot \underline{R}^T$ ($\underline{J}$ は単位テンソル)である。さらに、

$$\begin{aligned} \underline{q} &= q^1 \underline{E}_1, \quad \underline{\bar{q}} = \bar{q}^1 \underline{E}_1, \quad \underline{m} = m_{\alpha j} e_{\alpha} \cdot \underline{E}_j, \quad \underline{\bar{m}} = \bar{m}_{\alpha j} e_{\alpha} \cdot \underline{E}_j, \\ q^j &= \int p^j_b g_0 dA + \int p^j_o \cdot \underline{1} \underline{S}_{,s} \cdot \underline{S}_{,s} ds, \quad m_{\alpha j} = \int Y^{\alpha} p^j_b g_0 dA + \int Y^{\alpha} p^j_o \cdot \underline{1} \underline{S}_{,s} \cdot \underline{S}_{,s} ds, \\ \bar{q}^j &= \int p^j_e ds_e, \quad \bar{m}_{\alpha j} = \int Y^{\alpha} p^j_e ds_e. \end{aligned} \quad (18a-h)$$

であり、 $\underline{S}$ は変形前の梁の表面における位置ベクトルであり、 $(\cdot)_{,s}$ は変形前の梁の横断面における輪郭線に沿った座標系に関する微分を示す。

式(18c,d)に示されているように、モーメントベクトル $\underline{m}$ 、 $\underline{\bar{m}}$ の定義式に変形後の規底ベクトル $\underline{e}_m$ が含まれていることから、 $\underline{m}$ と $\underline{\bar{m}}$ は変形に依存する量であることがわかる。この事は、図-2を用いて説明できる。変形前に点oに作用する荷重はベクトル $\underline{f}$ だけである。一方、変形後の点oには、ベクトル $\underline{f}$ だけでなく、モーメント $\underline{m}$ ($= \underline{1} \underline{P} \underline{1} \underline{E}_1 \cdot a \underline{e}_1$) も作用することが分かる。この様に、変形に依存しない外力によって生じるモーメントは、変形に依存することが分かる。

前に述べたように、回転成分のとり方には様々な方法があり、平衡方程式の形もその成分に依存する。ここでは、最初に、回転成分として $\delta \underline{\phi}$ ($\delta \underline{\phi} \cdot \underline{J} = \delta \underline{R} \cdot \underline{R}^T$) をとり、得られた平衡方程式の形が、釣合法より得られるものと一致することを確認する。次に、 $\delta \underline{\phi}$ を用いる限りポテンシャルが存在しないことを示し、新たな回転パラメータを提案する。そして、新たな回転成分に関する平衡方程式が、 $\delta \underline{\phi}$ に関するものと等価であることを示す。式(14)より、運動方程式は、

$$\underline{T}_{,s} + \underline{q} = \underline{\dot{L}}_t \quad (\delta \underline{u}), \quad \underline{M}_{,s} + (\underline{x} + \underline{u})_{,s} \cdot \underline{T} + \underline{m} = \underline{\dot{H}}_t - J_{\alpha} \dot{\underline{e}}_{\alpha} \cdot \underline{\dot{u}} \quad (\delta \underline{\phi}) \quad (19a, b)$$

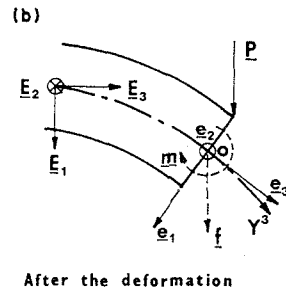
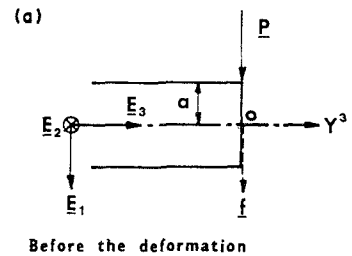


Fig. 2. Configuration dependency of prescribed external moments.

と表わされ、ここに、

$$\begin{aligned} \underline{L}_t &= A \underline{\dot{u}} + J_{\alpha} \underline{\dot{e}}_{\alpha}, & \underline{H}_t &= J_{\alpha} \underline{e}_{\alpha} * \underline{\dot{u}} + \underline{J}_{\rho} \cdot \underline{W}, \\ \underline{J}_{\rho} &= J_{\alpha\beta} (\underline{e}_{\alpha} \cdot \underline{e}_{\beta}) \underline{J} - J_{\alpha\beta} \underline{e}_{\alpha} \underline{e}_{\beta}, & \underline{W} * \underline{J} &= \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R}^T, \\ A_{\rho} &= \int \rho g_0 dA, & J_{\alpha} &= \int \rho Y^{\alpha}_{g_0} dA, & J_{\alpha\beta} &= \int \rho Y^{\alpha} Y^{\beta}_{g_0} dA \end{aligned} \quad (20a-g)$$

である。境界条件は、

$$\underline{T} = \underline{q}, \quad \underline{M} = \underline{m} \quad \text{on } S_{\sigma}, \quad \delta \underline{u} = 0, \quad \delta \underline{\phi} = 0 \quad \text{on } S_u \quad (21a-d)$$

と表わされる。式 (19) に示された平衡方程式は、釣合い法により得られる式と全く一致することが確かめられる。

ここで、内積 $\underline{m} \cdot \delta \underline{\phi}$ について調べる。式 (18c) で定義されているように、ベクトル $\underline{m}$ は変形に依存しているため $\delta (\underline{m} \cdot \underline{\phi}) \neq \delta \underline{m} \cdot \underline{\phi}$ となる。この様に、 $\delta \underline{\phi}$ を用いる限り外力に関するポテンシャルは存在しないことが分かる。しかしながら、 $\underline{R} = R_{mn} \underline{A}_m \underline{A}_n$ とおくと、

$$\underline{m} \cdot \delta \underline{\phi} = \underline{E}_j \cdot (\delta \underline{\phi} * m_{\alpha j} \underline{e}_{\alpha}) = \underline{E}_j \cdot (m_{\alpha j} \delta \underline{R} \underline{E}_{\alpha}) = \delta (m_{\alpha j} R_{j\alpha}) \quad (22)$$

となることから、回転テンソル $\underline{R}$ の Lagrange 成分 α^m を新たな回転パラメータにすることより、外力に関するポテンシャルが存在することが分かる。

次に、 $\delta \alpha^m$ に関する平衡方程式を考える。ここで、 $\delta \underline{u}$ に関する基本式は不変であるから、 $\delta \underline{R} \underline{R}^T = \underline{R}_{j;m} \underline{R} \delta \alpha^m = \delta \alpha^m \underline{R}_{jm} * \underline{J} = \delta \underline{\phi} * \underline{J}$ (ここに、 $(\cdot)_{;m} = d(\cdot)/d\alpha^m$) となることを考慮すると、

$$[\underline{M}_{j;s} + (\underline{x} + \underline{u})_{j;s} * \underline{T} + \underline{m} - \underline{H}_t + J_{\alpha} \underline{\dot{e}}_{\alpha} * \underline{\dot{u}}] \cdot \underline{R}_{jm} = 0 \quad (\delta \alpha^m) \quad (23)$$

となり、境界条件は、次式のように表わされる。

$$(\underline{M} - \underline{m}) \cdot \underline{R}_m = 0 \quad \text{on } S_{\sigma}, \quad \delta \alpha^m = 0 \quad \text{on } S_u \quad (24a,b)$$

以上より、 $\delta \alpha^m$ と $\delta \underline{\phi}$ に関する平衡方程式がお互いに等価であることが確かめられた。

5. 有限要素法による定式化

本報告では、以下に示す Hamilton の原理に基づき、有限要素法の定式化を行なう。

$$\delta \int [T - \pi_p] dt = 0 \quad (25)$$

ここに、

$$\pi_p = \int [W_s(\underline{u}, \alpha^m) - \underline{q} \cdot \underline{u} - m_{\alpha j} R_{j\alpha}] dL - [\underline{q} \cdot \underline{u} + \underline{m}_{\alpha j} R_{j\alpha}]_{s_{\sigma}} \quad (26)$$

である。これまでは、 α^m について回転テンソル $\underline{R}$ の Lagrange 成分であると規定しただけで、その具体的な形については述べていない。数値計算を行なう場合、その具体的な形を知る必要がある。ここでは、以下に示す有限回転ベクトルの Lagrange 成分を α^m にとることとする。

$$\underline{\theta} = 4 \tan(\omega/4) \underline{e} = \alpha^m \underline{E}_m \quad (27)$$

ここで定義された有限回転ベクトル $\underline{\theta}$ は、 $\omega = \pm 2\pi$ の時、無限大となる。よって、それ以前にパラメータの置き換えをしなければならない。簡単にその操作を述べると、 $\underline{\theta}$ が π を越えた時点で、

$$\hat{\alpha}^m = -16 \alpha^m / (\alpha^k \alpha^k) \quad (28)$$

なる新たなパラメータを導入する。このようにして、簡単に特異点を回避することができる。

変位関数は、 u^m および α^m について以下のように一次関数を仮定する。

$$u^m = u^m_{\alpha} N^{\alpha}, \quad \alpha^m = \alpha^m_{\alpha} N^{\alpha}, \quad N^{\alpha}: L \text{ に関する一次関数} \quad (29a,b)$$

初期及び最終時刻において、変位が規定されているものとすれば (Washizu [12])、離散化された運動方程式として次式が得られる。

$$\underline{M}(\ddot{\underline{d}}, \ddot{\underline{r}}, \underline{r}) + \underline{C}(\dot{\underline{r}}, \underline{r}) + \underline{k}(\underline{d}, \underline{r}) = \underline{f}(\underline{r}) \quad (30)$$

ここに、 $\underline{d} = \{u^i_{\beta}\}$ 、 $\underline{r} = \{\alpha^i_{\beta}\}$ である。上式において、 $\underline{C}$ は減衰項でなく、回転が有限であるために表われた項であることに注意を要する。

これまでに様々な時間積分方法が提案されているが、ここでは Newmark の β 法を用いて式 (30) を積分する。なお、詳細については文献 (13) に述べられているのでここでは省略する。

非線形代数方程式についても多くの手法が開発されているが、ここでは、2 次の収束が期待できる Newton-Raphson 法を用いている。

6. 数値計算例

ここでは、直線部材よりなる構造物の動的解析を行なう。断面の図心は、 $I_{\alpha} = 0$, $I_{12} = I_{21} = 0$, $J_{\alpha} = 0$, $J_{12} = J_{21} = 0$ を満足するように定める。Newmark の β 法における定数は、 $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ とする。"Shear Locking"

(Zienkiewicz [14]) を除去する

ために、接線剛性マトリックスは Gauss の 1 点積分を用い、それ以外は、Gauss の 2 点積分を用いて積分した。なお、収束判定には、不平衡力のノルムを用いた。

6.1 変形に依存しない外力とモーメントを受ける両端自由梁

図-2 に示すように、一般に、保存力によって生じるモーメントは変形に依存する。しかしながら、ここでは、本手法の妥当性を確かめるために、Vu-Quoc [15] により解析された、変形に依存しない外力とモーメントを受ける両端自由梁の問題を扱う。材料定数及び荷重条件等は図-3 に示されている。図-4 は計算結果を示すが、両者の間には良い一致が見られる。

前にも述べたように、Vu-Quoc は、回転パラメータとして $\delta \phi$ を用いているために、接線剛性マトリックスが対称になるのは不平衡力が零に等しい時であり、それ以外是非対称になっている。一方、本報告では、不平衡力が零でない時でも、常に接線剛性マトリックスは対称になることに注意を要する。

6.2 3次元変形を伴う片持ち梁

3次元空間において、有限回転を伴う梁の計算結果はそれほど多くはない。ここでは、図-5 に示す片持ち梁を対象に、Vu-Quoc [15] の結果と本結果との比較を行なう。図-6 に計算結果を示す。本例題では、梁の先端における撓み量が腕の長さとはほぼ等しいほどの大きな回転が生じているにも拘

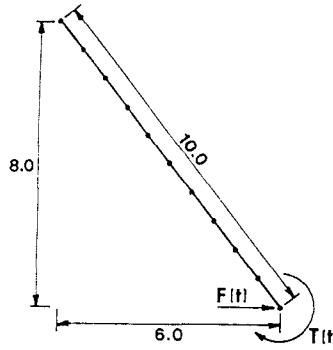


Fig. 3. Flexible beam in free flight, subject to constant force and constant moment. Problem data.

Material Properties:

$$EA = GA_s = 10,000$$

$$EI_{11} = EI_{22} = GJ = 500$$

$$A\rho = 1$$

$$J_{11} = J_{22} = 10$$

F.E. Mesh: 10 linear elements

Time history of F(t) and T(t):

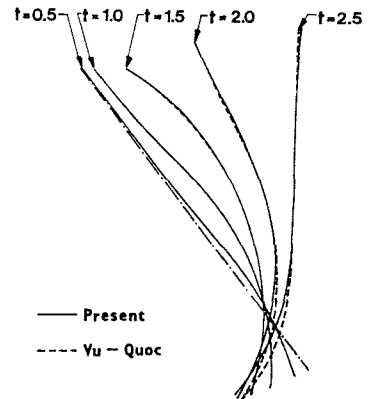
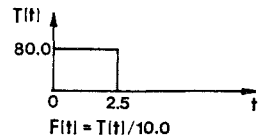


Fig. 4. Flexible beam in free flight, subject to constant force and constant moment. Comparison of the present results and those of Vu-Quoc. Time step $\Delta t = 0.1$.

Material Properties:

$$EA = GA_s = 10^6$$

$$EI_{11} = EI_{22} = GJ = 10^3$$

$$A\rho = 1$$

$$J_{11} = J_{22} = 10$$

Time history of loading:



Fig. 5. Right angle cantilever beam. Problem data.

らず、両者の結果には良い一致が見られる。また、本手法では、少ない要素数でもかなり良い結果が得られることが理解できた。

6.3 変形に依存するモーメントを受ける両端自由梁

6.1 では、変形に依存しないモーメントの存在を仮定したが、ここでは、初期条件が6.1 と等しくなるような1個の外力が作用する場合を考える。荷重条件を図-7に示すが、棒軸に作用する等価モーメントは変形に依存することに注意を要する。図-8に計算結果を示すが、参考に6.1の結果も示した。両者の差異は、モーメントの定義の違いからくるものであり、本例題では、モーメントの変形依存性は無視できないことがわかる。

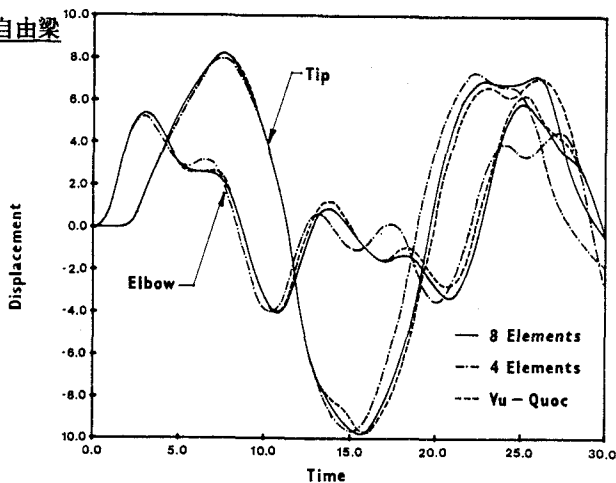


Fig. 6. Right angle cantilever beam. Comparison of the present results and those of Vu-Quoc. Time step $\Delta t = 0.25$.

6.4 3次元空間において有限回転を伴う両端自由梁

6.1 および 6.2 において、本手法の妥当性が示され、更に、6.3 では変形に依存するモーメントを受ける梁を解析した。ここでは、図-9に示す梁を取り上げ、 180° 以上の回転を伴う計算例を示す。荷重条件として、棒軸に作用する外力 F_1 と F_2 を、棒軸に作用しない外力 F_3 を考える。また、剛に近いものから非常にフレキシブルな梁となるように、3種類の材料定数を考える。図-10に示された計算結果より、 180° を越えるような大きな回転を伴う場合も、簡単な操作で本手法が適用できることが確かめられた。

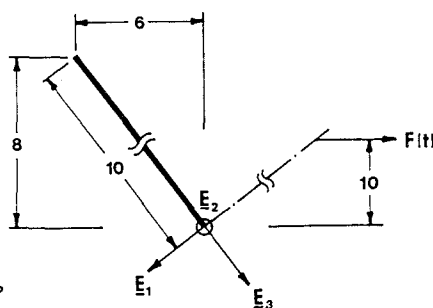


Fig. 7. Flexible beam in free flight, subject to conservative force. Problem data.

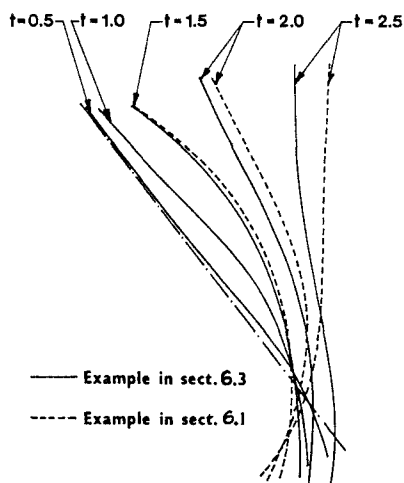


Fig. 8. Flexible beam in free flight, subject to conservative force. Comparison of the present problem and that in Sec. 5.1. Time step $\Delta t = 0.1$.

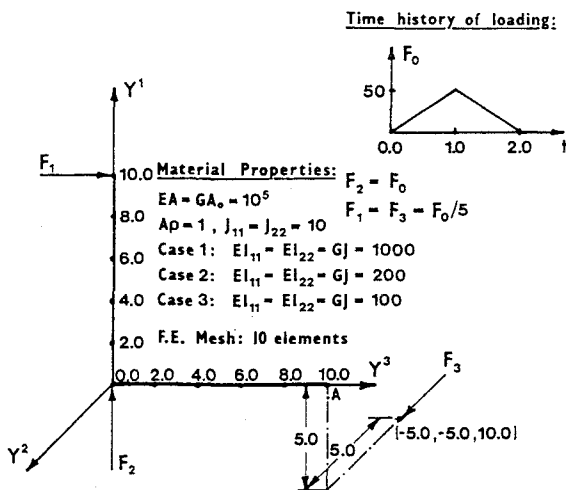


Fig. 9. Right angle beam in free flight. Problem data.

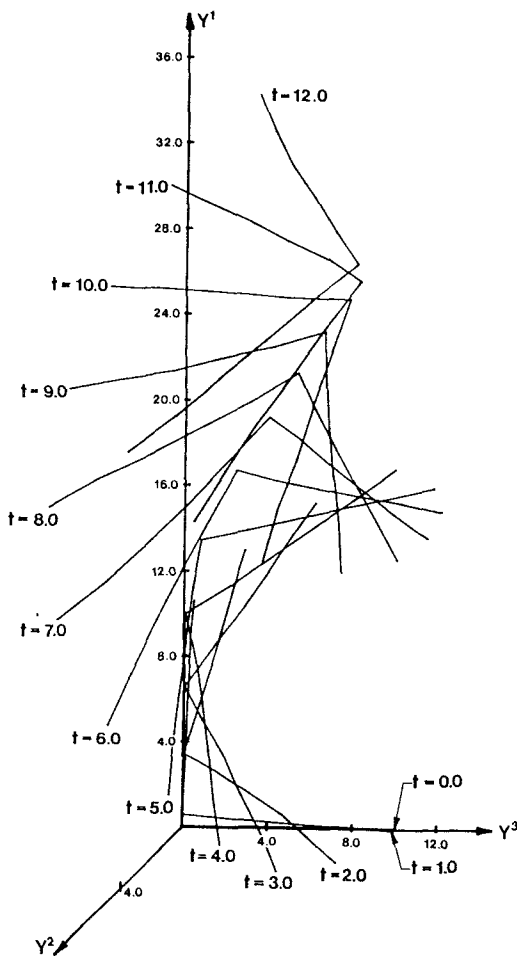


Fig. 10a. Right angle beam in free flight. Sequence of motion in Case 1. Time step $\Delta t = 0.1$.

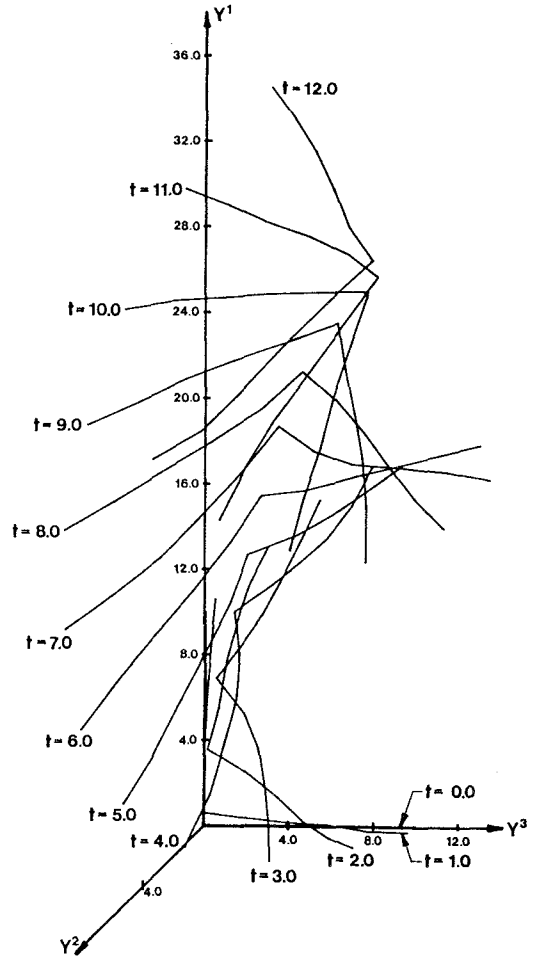


Fig. 10b. Right angle beam in free flight. Sequence of motion in Case 2. Time step $\Delta t = 0.1$.

7. おわりに

本報告では、Lagrangeの手法により有限回転を伴う空間曲線充実棒の定式化を行なった。これまで、保存外力によって生じる外力モーメントの変形依存性は指摘されてはいたものの、その結果、接線剛性マトリックスが非対称になると報告されていた。本報告では、回転成分として有限回転テンソルの成分を用いることにより、接線剛性マトリックスが常に対称となることを示した。また、それに付随して得られる平衡方程式も、釣合法により得られるものと形は異なるものの、等価であることを示した。最後に数値計算を行ない、本報告の定式化の妥当性を示すとともに、外力モーメントの変形依存性について数値的に検証した。

8. 謝辞

本報告の一部は、文部省科学研究費の援助によって行なわれた。ここに記して謝意を表わします。

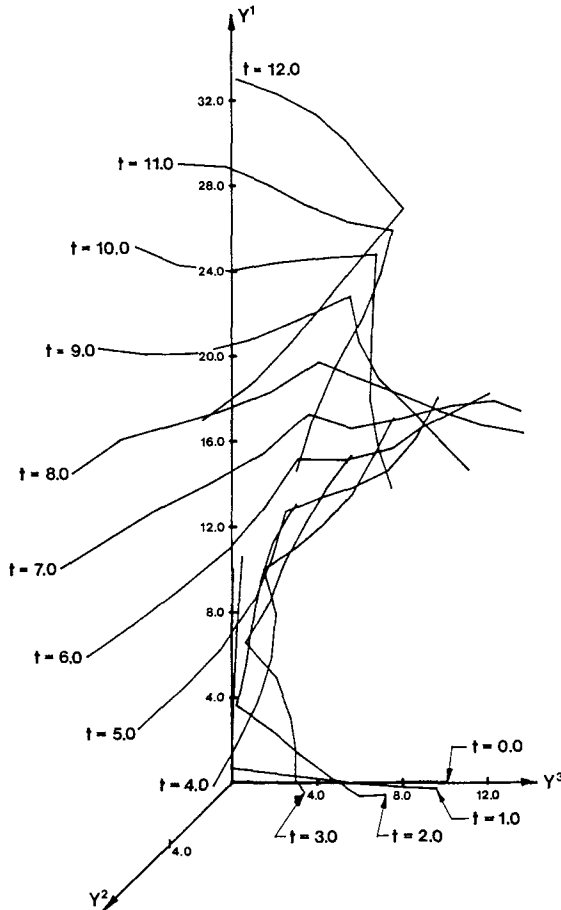


Fig. 10c. Right angle beam in free flight. Sequence of motion in Case 3. Time step $\Delta t = 0.1$.

7. 参考文献

- [1] S.S.Antman and K.B.Jordan : Qualitative aspects of the spatial deformation on non-linearly elastic rods, Proc. R. Soc. Edinb. 73 A (5), 85 -105, 1975.
- [2] E.Reissner : On one- dimensional large-displacement finite-strain beam theory, Studies Appl. Math., Vol.52, 87-95,1973.
- [3] E.Reissner : On finite deformations of space-curved beams, J. Appl. Math. Phys., 32, 734-744, 1981.
- [4] J.C.Simo : A finite strain beam formulation. The three- dimensional dynamic problem. Part 1, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol. 49, 55-70, 1985.
- [5] 井浦雅司、平嶋政治 : 3次元 有限回転を伴うTimoshenko梁の幾何学的非線形理論、土木学会論文集 第 380 号 / I - 7, 411-417, 1987.
- [6] M. Iura and S.N.Atluri : On a consistent theory, and variational formulation, of finitely stretched and rotated 3-D space-curved beams, Int. J. Comput. Mech. (in press)
- [7] M. Iura and S.N.Atluri : Dynamic analysis of finitely stretched and rotated three-dimensional space-curved beams, Computers and Structures, Vol.29, No.5, 875-889, 1988.

- [8] J.H.Argyris, P.C.Dunne and D.W.Scharpf : On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 14, 401-451, 1978.
- [9] J.C.Simo and L.Vu-Quoc : A three-dimensional finite-strain rod model-2. Computational aspects, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 58, 79-116, 1986.
- [10] S.N.Atluri : Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analyses of finitely deformed solids, with application to plates and shells-1. Theory, *Comput. Struct.*, 18, 93-116, 1984
- [11] G.R.Cowper : The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, 33, 335-340, 1966
- [12] K.Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd edn., Pergamon Press, New York, 1982.
- [13] T.Belytschko and T.J.R.Hughes : Computational Methods for Transient Analysis, Elsevier, Amsterdam, 1983.
- [14] O.C.Zienkiewicz : The Finite Element Method, 3rd edn., McGraw-Hill, New York, 1977.
- [15] L.Vu-Quoc : Dynamics of flexible structures performing large overall motions: a geometrically -nonlinear approach. Electronics Research Laboratory Memorandum UCB/ERL M86/36, Univ. of California, Berkeley, 1986.

(1988 年 10 月 12 日 受付)