構造工学論文集　Vol.35 A（1989年3月）　　土木学会

面内組合せ荷重を受ける鋼桁腹板の座屈強度

Buckling Strength of Web Plates of Plate Girders under In-Plane Combined Loading

森脇良一*・奈良　敬**
By Yoshikazu MORIWAKI and Satoshi NARA

This paper presents elastic buckling strength of web plates subjected to in-plane combined loading. The plates are simply supported at loading edges and clamped at unloading edges. A new deflection function for boundary conditions of fixed supports, which has been already proposed by one of the authors, makes buckling analysis of the plates greatly simplified. Making use of this deflection function, a number of buckling analysis are carried out and characteristics of buckling strength are clarified. Moreover, interaction curves of buckling strength are proposed.

1．まえがき

連続桁の中間支点近傍やゲルバー桁の片持部の支点近傍の腹板では、面内曲げとせん断の組合せ応力を受ける。このような組合せ荷重下で、しかも種々の境界条件でのプレートガーダーの腹板の座屈性状を知ることは設計および解析面で重要なことである。一方、実際のプレートガーダーの腹板ではフランジや補剛材の剛性および作用荷重のいかんによって、周囲の拘束条件は単純支持に近いものから固定に近いものまで種々変化する。通常のプレートガーダーのフランジ剛性、補剛材剛性および面内曲げやせん断などの荷重下では、腹板の境界条件は非載荷辺である上下辺固定、載荷辺である左右辺単純支持に近いものが相当ある[1]と考えられている。

井口は、周辺固定支持の圧縮板のたわみを多項式と三角級数を併用した関数で表現し無限級数に展開する解法[2]を発展させ、周辺固定支持板のせん断座屈荷重を求めている[3]。Nölke は、周辺固定支持板の他、上下辺が固定で左右辺が単純支持された平板に面内曲げが作用する場合の座屈解析を実施している[4]。

面内組合せ荷重を受ける平板の座屈解析については、面内曲げ圧縮をうける平板を対象とした Nölke[5]、圧縮せん断を対象とした Wagner[6]、Chwalla[7]および井口[3]、曲げせん断を対象とした Timoshenko[8]、Stein[9] および Way[10] の研究が代表例として挙げられる。これらのうち、周辺固定支持平板ならびに上下辺固定、左右辺単純支持の平板を取り扱った Nölkeを除き、すべて単純支持平板を対象とした研究例である。

このように既往の多くの研究例をみると、面内曲げモーメントとせん断力の組合せ荷重を受ける周辺単純支持平板に関する座屈解析は1930年代にかなり見られるものの、上下辺固定で左右辺単純支持の境界条件をもつ平板についての検討はほとんど行われていないのが現状である。

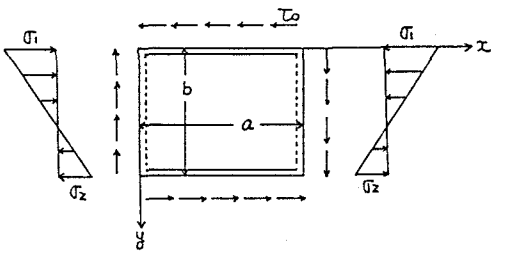
*　工博　岐阜大学教授　　工学部土木工学科　（〒501-11　岐阜市柳戸 1-1）
**　工博　岐阜大学助教授　工学部土木工学科　（〒501-11　岐阜市柳戸 1-1）

ところで座屈解析における数値解析法としては、有限要素法に代表されるように、たわみを離散化する方法と、Ritz法に代表されるように関数化したものがある。後者で解析を行う場合、そのたわみ関数が非常に重要となる。例えば周辺単純支持板のたわみ関数は二重フーリエ級数で表される。この場合の座屈計算はかなり簡単で、しかも項数が少なくても精度の良い計算結果が得られる。一方、支持条件が固定の場合は双曲線関数と三角関数が含まれる複雑な関数が一般的である。このようなこともあって、上下辺固定、左右辺単純支持平板の組合せ荷重下での座屈解析結果がほとんど見られないものと考えられる。さらに、座屈設計ガイドライン[11]においても明らかなように、鋼板の極限強度を評価する上でも、弾性座屈理論に基づく幅厚比パラメータRが重要であることから、この種の鋼板の座屈強度を明確にしておくことは大切であると思われる。

本研究では、固定支持の境界条件を対象として新しく開発された極めて簡単なたわみ関数[12]を用いて、上下辺固定、左右辺単純支持条件を有するプレートガーダーの腹板が面内曲げモーメントとせん断力の組合せ荷重を受ける場合の座屈問題について解析的に検討を加える他、その座屈強度特性を明らかにすることを目的とする。

2．座屈解析

解析モデルは、図－1に示すように、xおよびy軸方向の辺長がそれぞれaおよびbの上下辺固定、左右辺単純支持平板である。面内荷重については、次式に示すように、x軸方向の単位幅あたりの荷重N_xと平板の辺に沿って等分布している単位幅あたりのせん断力N_{xy}を組合せて導入する。



図－1　圧縮力、面内曲げおよびせん断の組合せ荷重作用下でのモデル

$$N_x=\sigma_1 t\left(1-\phi\frac{y}{b}\right) \qquad (1)$$

$$N_{xy}=\tau_0 t \qquad (2)$$

ここに、σ_1は図－1に示す最大縁圧縮応力、tは板厚である。また、ϕは応力パラメータで、$\phi=(\sigma_1-\sigma_2)/\sigma_1$で表される。すなわち、$\phi=0$の時は純圧縮、$\phi=1$の時は三角形分布圧縮、さらに、$\phi=2$の時は純曲げ状態を意味する。また$\tau_0$は、せん断応力である。

次に、座屈によるたわみ形状を表す関数としては、次式に示すように、新しく開発された極めて簡単でかつ境界条件を満足するたわみ関数を用いる。

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\left\{\cos\frac{n-1}{b}\pi y-\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\} \qquad (3)$$

ところで、平板が面外に微小変形した時の面外方向のつり合い方程式は、式（4）で与えられる。

$$f(x,y)=D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)$$
$$-\left(N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)=0 \qquad (4)$$

ここに、$D=Et^3/12(1-\nu^2)$、Eはヤング係数、νはポアソン比である。

式（1）～（3）を式（4）に代入すると式（5）が得られる。ただし、ここでは、y軸方向の荷重項であるN_yは零としている。

$$f(x,y)=D\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 m^4\sin\frac{m\pi x}{a}\left\{\cos\frac{n-1}{b}\pi y-\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\}\right.$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 m^2\sin\frac{m\pi x}{a}\left\{(n-1)^2\cos\frac{n-1}{b}\pi y-(n+1)^2\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{b}\right)^4\sin\frac{m\pi x}{a}\left\{(n-1)^4\cos\frac{n-1}{b}\pi y-(n+1)^4\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\}$$

$$+\sigma_1 t\left(1-\phi\frac{y}{b}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 m^2\sin\frac{m\pi x}{a}\left\{\cos\frac{n-1}{b}\pi y-\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\}$$

$$+2\tau_\theta t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{a}\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)m\cos\frac{m\pi x}{a}\left\{(n-1)\sin\frac{n-1}{b}\pi y-(n+1)\sin\frac{n+1}{b}\pi y\right\} \tag{5}$$

一方、ガラーキン法において、関数f（x，y）と重み関数Φ_{ij}との積を全領域で平均的に零とする条件は、式（6）で表される。

$$\int_0^b\int_0^a f(x,y)\,\Phi_{ij}\,dx\,dy=0 \tag{6}$$

ここで、重み関数Φ_{ij}は式（7）のとおりである。

$$\Phi_{ij}=\sin\frac{i\pi x}{a}\left\{\cos\frac{j-1}{b}\pi y-\cos\frac{j+1}{b}\pi y\right\} \tag{7}$$

式（5）、（7）を式（6）へ代入すると式（8）が得られる。

$$D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 m^4\int_0^a\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx$$

$$\cdot\int_0^b\left\{\cos\frac{n-1}{b}\pi y-\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\}\left\{\cos\frac{j-1}{b}\pi y-\cos\frac{j+1}{b}\pi y\right\}dy$$

$$+2D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 m^2\int_0^a\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx$$

$$\cdot\int_0^b\left\{(n-1)^2\cos\frac{n-1}{b}\pi y-(n+1)^2\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\}\left\{\cos\frac{j-1}{b}\pi y-\cos\frac{j+1}{b}\pi y\right\}dy$$

$$+D\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{b}\right)^4\int_0^a\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx$$

$$\cdot\int_0^b\left\{(n-1)^4\cos\frac{n-1}{b}\pi y-(n+1)^4\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\}\left\{\cos\frac{j-1}{b}\pi y-\cos\frac{j+1}{b}\pi y\right\}dy$$

$$+\sigma_1 t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 m^2\int_0^a\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx$$

$$\cdot\int_0^b\left\{\cos\frac{n-1}{b}\pi y-\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\}\left\{\cos\frac{j-1}{b}\pi y-\cos\frac{j+1}{b}\pi y\right\}dy$$

$$-\sigma_1 t\phi\frac{y}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 m^2\int_0^a\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx$$

$$\cdot\int_0^b\left\{\cos\frac{n-1}{b}\pi y-\cos\frac{n+1}{b}\pi y\right\}\left\{\cos\frac{j-1}{b}\pi y-\cos\frac{j+1}{b}\pi y\right\}dy$$

$$+2\tau_\theta t\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{\pi}{a}\right)\left(\frac{\pi}{b}\right)m\int_0^a\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx$$

$$\cdot\int_0^b\left\{(n-1)\sin\frac{n-1}{b}\pi y-(n+1)\sin\frac{n+1}{b}\pi y\right\}\left\{\cos\frac{j-1}{b}\pi y-\cos\frac{j+1}{b}\pi y\right\}dy=0 \tag{8}$$

ここで、mとnをそれぞれ5項まで考慮すると、係数A_{mn}は、A_{11}からA_{55}の25個となる。一方、式（8）は重み関数内の任意のi，jについても成り立たなければならない。そこで、i，jについて5項まで考えるものとするとそれらの組合せで、式（8）より25の式が得られる。これらの25の式において、係数A_{mn}がすべて零の場合を除く解をもつためには、未定係数A_{mn}の係数行列式が零であることが必要である。得られた行列式を解き、最大圧縮応力σ_1の最小値を座屈応力σ_{cr}として次式で表す。

$$\sigma_{cr}=K\frac{\pi^2 D}{b^2 t} \qquad (9)$$

ここで、Kは座屈係数である。

表－1　たわみ関数の項数と座屈係数（三角形分布圧縮）

a/b	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
3項	17.9	14.9	13.8	13.8	14.4	15.6	14.9	14.2	13.8	13.7	13.8	14.0
4項	17.9	14.9	13.8	13.8	14.4	15.5	14.9	14.2	13.8	13.7	13.8	14.0
5項	17.8	14.8	13.7	13.7	14.3	15.4	14.8	14.1	13.7	13.6	13.7	13.9
Nölke	17.7	14.7	13.7	13.7	14.3	15.4	14.7	-	13.7	-	13.7	-

表－2　たわみ関数の項数と座屈係数（せん断）

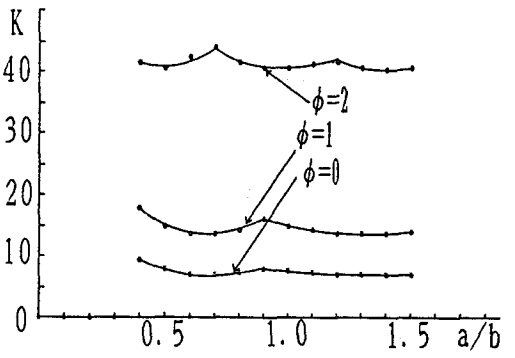
a/b	0.33	0.4	0.5	0.67	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
3項	60.15	40.86	27.34	18.01	13.07	12.00	-	-	-
5項	54.91	39.99	27.01	17.67	12.72	10.95	-	-	-
Iguchi	55.53	40.00	26.80	17.50	12.28	11.12	10.21	9.81	9.61

3．解析結果とその考察

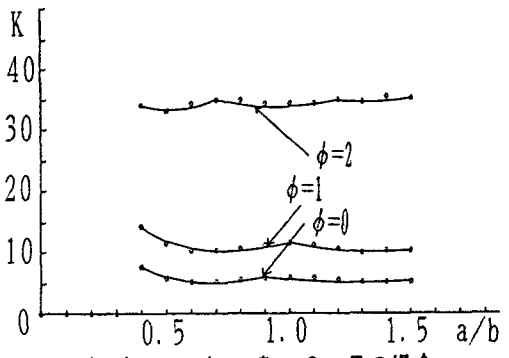
まず、軸方向力、面内曲げモーメントおよびせん断力の組合せ荷重下での上下辺固定、左右辺単純支持平板の座屈解析結果について述べる。

図－2（a）～（c）は、それぞれ $\tau_{cr}/\tau_{cr}^*=0,\ 0.5$ および 0.8に変化させたときに、応力パラメータϕをパラメータとして、縦横比と座屈係数Kの関係を示したものである。ただし、τ_{cr}は組合せ荷重下でのせん断座屈応力、τ_{cr}^*はせん断力のみが作用したときの座屈応力を示す。せん断応力の大きさにかかわらず、$\phi=2$では a／b＝0.5、$\phi=0$と$\phi=1$ではa／b＝0.7 前後で、座屈係数Kが最小値をとることがわかる。また、x軸方向のたわみ波形が1半波形から2半波形に変化する点が、$\phi=2$ではa／b＝0.7 でほぼ一定であるが、$\phi=0$および$\phi=1$においてはせん断力が大きくなるにつれてa／b＝0.9 から1.1 へと変化していくことがわかる。

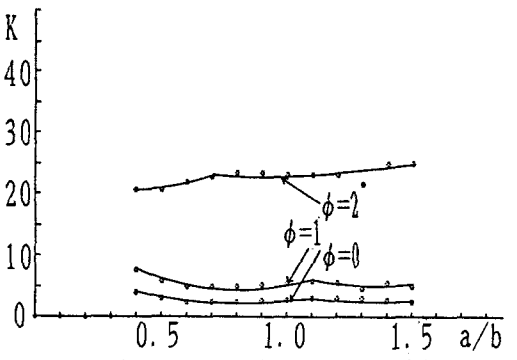
ここで、式（3）に示したたわみ関数において、前



（a）$\tau_{cr}/\tau_{cr}^*=0$の場合



（b）$\tau_{cr}/\tau_{cr}^*=0.5$の場合

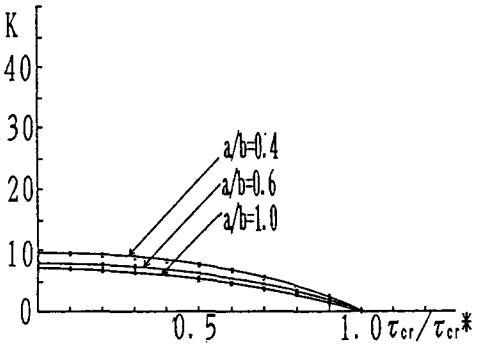


（c）$\tau_{cr}/\tau_{cr}^*=0.8$の場合

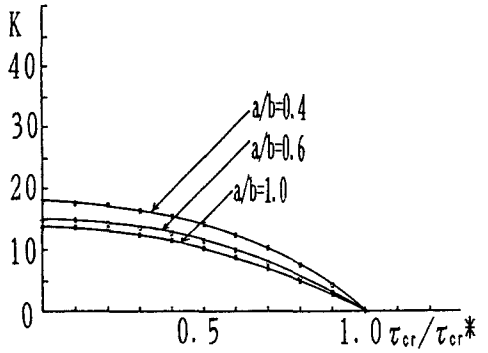
図－2　縦横比a／bと座屈係数Kの関係

述したように項数を５項まで考慮した。これは双曲線関数と三角関数が含まれる従来型のたわみ関数[4]と比較した結果、５項までとれば正解値に収束することが確認されているからである[11]。 その一例として、三角形分布圧縮のみを受ける場合およびせん断力を受ける場合の座屈係数Ｋの値を、項数をパラメータとして検討した結果を表－１および表－２に示す。これらの表からも、５項までとれば十分であることがわかる。ただし、せん断力を受ける場合は７項までとる必要があると思われる。

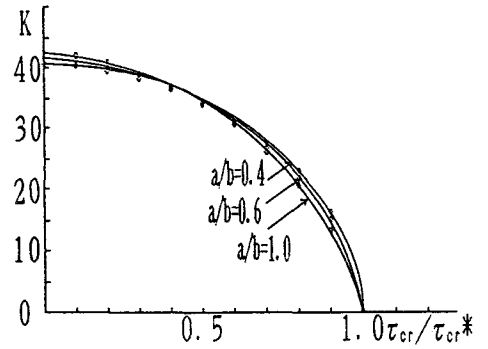
次に、図－３（ａ）～（ｃ）は、それぞれ$\phi=0$、$\phi=1$および$\phi=2$の場合に、縦横比ａ／ｂをパラメータとして、τ_{cr}/τ_{cr}^*と座屈係数Ｋの関係を示したものである。$\phi=2$の場合にはτ_{cr}/τ_{cr}^*が小さい値、すなわち$\tau_{cr}/\tau_{cr}^*<0.3$の範囲で、曲線の勾配はなだらかで、せん断応力が座屈応力に及ぼす影



（ａ）$\phi=0$の場合

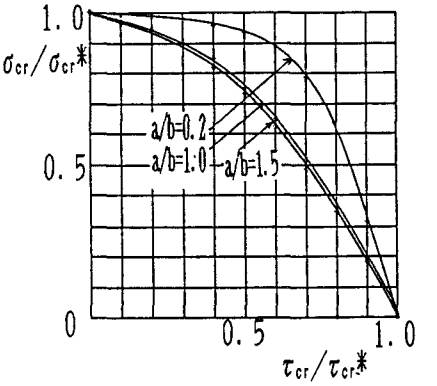


（ｂ）$\phi=1$の場合

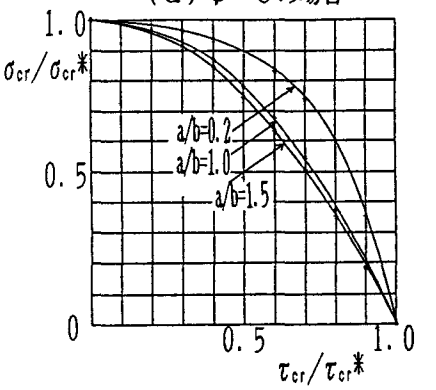


（ｃ）$\phi=2$の場合

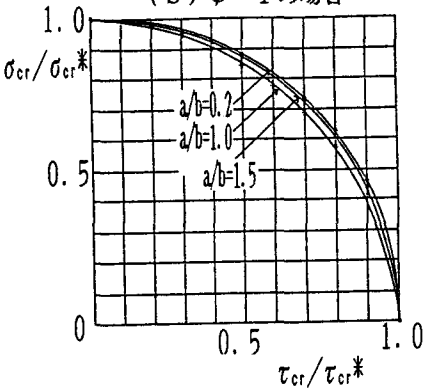
図－３　せん断力が加わった平板の座屈相関曲線



（ａ）$\phi=0$の場合



（ｂ）$\phi=1$の場合

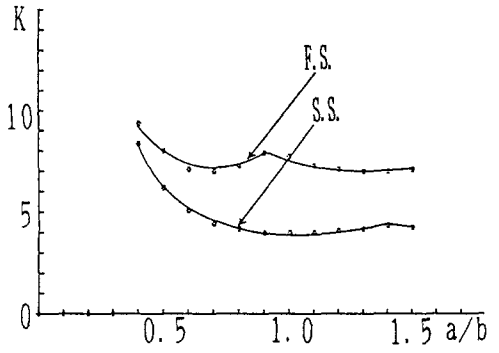


（ｃ）$\phi=2$の場合

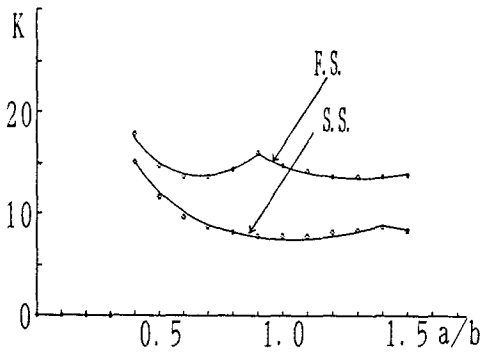
図－４　τ_{cr}/τ_{cr}^*と$\sigma_{cr}/\sigma_{cr}^*$の関係

響は小さいことがわかる。しかし、τ_{cr}/τ_{cr}^* が 1.0に近づくと、曲線は急な傾斜となりその影響が大きくなることを示している。これは、せん断応力に若干の曲げ応力成分が組合わさっても、せん断力のみによる座屈係数と殆んど変わらないことを意味する。また、$\phi=0$と$\phi=1$の場合に関しても、$\phi=2$の場合に比較して座屈係数は小さくなるものの、ほぼ似通った形状を呈している。

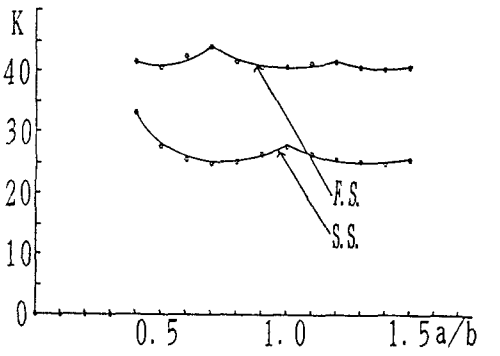
さらに、図－4（a）～（c）は、無次元パラメータ$\sigma_{cr}/\sigma_{cr}^*$と$\tau_{cr}/\tau_{cr}^*$をパラメータとした、座屈相関曲線を示す。ここで、$\sigma_{cr}^*$は、x軸方向の面内荷重のみを受ける場合の座屈応力$\sigma_{cr}$である。図－4（a）に示す$\phi=0$の場合および図－4（b）に示す$\phi=1$の場合は、縦横比により座屈相関曲線の形状が若干変化する。一方、図－4（c）に示す$\phi=2$の場合では座屈相関曲線は縦横比にかかわらずほぼ一定している。



（a）$\phi=0$の場合

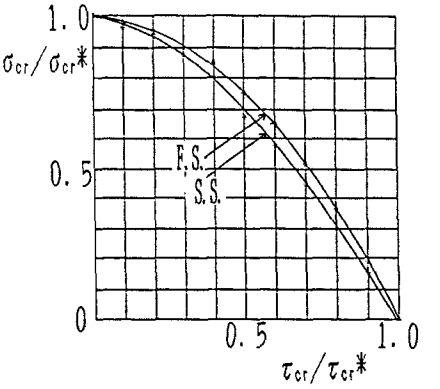


（b）$\phi=1$の場合

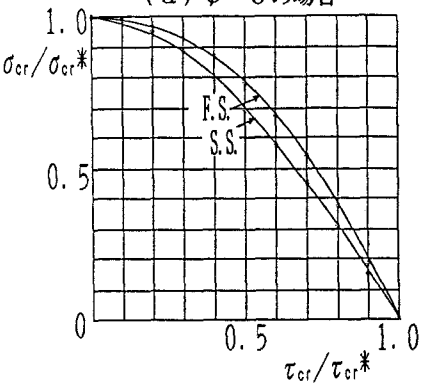


（c）$\phi=2$の場合

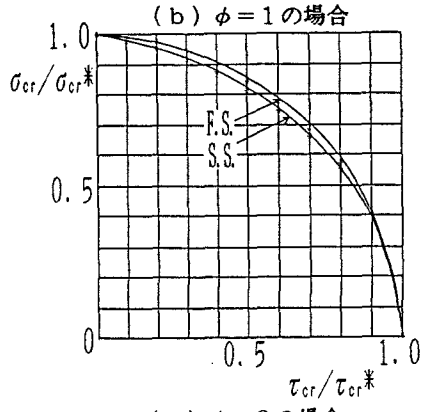
図－5　$\tau_{cr}/\tau_{cr}^*=0$の時の境界条件の比較



（a）$\phi=0$の場合



（b）$\phi=1$の場合



（c）$\phi=2$の場合

図－6　座屈相関曲線における境界条件の比較

これらの曲線より次式に示すような座屈相関曲線の近似式が提案できる。まず、面内曲げとせん断力が同時に作用する平板の座屈相関曲線は、式（１０）で精度よく表される。

$$\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*}\right)^2+\left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_{cr}^*}\right)^2=1 \qquad (10)$$

また、$\phi=0$と$\phi=1$の場合の相関曲線は、a／b≧1.0 では、式（１１）で精度よく近似できることがわかる。

$$\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*}\right)+\left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_{cr}^*}\right)^2=1 \qquad (11)$$

一方、a／b≦0.3 となる場合は、むしろ$\phi=2$の場合の式（１０）に近似されることがわかるが、式（１１）で十分安全側の評価ができる。

次に、周辺単純支持平板（以下、「S.S.」と呼ぶ）と上下辺固定左右辺単純支持平板（以下、「F.S.」と呼ぶ）について座屈係数の比較検討を行う。

図－５（ａ）～（ｃ）は、$\tau_{cr}/\tau_{cr}^*=0$ の場合について、それぞれ$\phi=0$、$\phi=1$および$\phi=2$を対象に、応力パラメータϕをパラメータとして、S.S.とF.S.の両者の比較を行ったものである。これらの図より、全ての荷重条件に対して座屈係数Ｋの値が、S.S.よりもF.S.の方が大きくなるのは周知の通りであるが、$\phi=0$と$\phi=1$の場合、縦横比が比較的小さいａ／ｂ≦0.4 の範囲では、座屈係数Ｋの値の開きは小さいことがわかる。一方、縦横比が 1.0前後からはその差はほぼ一定となる。$\phi=2$の場合はａ／ｂ＝0.5 前後より座屈係数の値の差は一定となることがわかる。

図－６（ａ）～（ｃ）は、それぞれ$\phi=0$、$\phi=1$および$\phi=2$の場合について得られた座屈相関曲線を基にして、S.S.とF.S.の両者の比較をａ／ｂ＝1.0 のときに行った結果を示している。$\phi=0$と$\phi=1$の場合は、S.S.の場合の座屈相関曲線と比較してF.S.の場合の曲線は、より式（１１）の近似式に近いものとなる。また純曲げの場合もF.S.の曲線はより式（１０）の近似式に近いものであることがわかる。

なお、軸方向力、面内曲げモーメントおよびせん断力が加わった場合、式（１２）で近似することが可能である。

$$\frac{1+\psi}{2}\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*}\right)+\frac{1-\psi}{2}\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^*}\right)^2+\left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_{cr}^*}\right)^2=1 \qquad (12)$$

ただし、ψは応力比で、$-1\leqq\psi=\sigma_2/\sigma_1\leqq1$で表される。

４．結論

本研究では、軸方向力、面内曲げモーメントおよびせん断力の組合せ荷重を受ける鋼桁腹板の座屈解析を通常の鋼桁腹板の境界条件としてもっとも近いとされている上下辺固定、左右辺単純支持の境界条件の下で行った。その結果、得られた事柄を列挙する。

（１）面外支持条件が固定の場合は、双曲線関数と三角関数が含まれる複雑なたわみ関数が一般的であるが、新しく開発された極めて簡単なたわみ関数を用いてガラーキン法によって解析を試みた結果、普及タイプのパーソナルコンピュータで十分な精度を持つ計算結果が得られることが明らかとなった。

（２）面内曲げ応力とせん断応力の組合せ応力状態にさらに軸方向圧縮応力成分が組合わさった場合の上下辺固定、左右辺単純支持平板の座屈強度が定量的に明らかとなった。

（３）面内曲げ応力とせん断応力の組合せ応力状態に若干の軸方向圧縮応力成分が加わることによって、座屈相関曲線が円の式より放物線の式に急激に近づくことが明らかとなった。

（４）この種の鋼板の座屈相関曲線が明らかとなり、その近似式を提案することができた。

謝辞

本研究において数値計算を実施するにあたっては、当時岐阜大学工学部４年生の大西賢二君（現在、(株)鴻池組に勤務）に協力を頂いた。また、原稿の作成にあたり、岐阜大学大学院の森田浩隆君の協力を得た。ここに、謝意を表する。

参考文献

1) 例えば、森脇良一・藤野眞之：初期不整を有するプレートガーダーの純曲げ強度に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 294号，1977年 8月，pp.1-15．または、関西橋梁鉄骨溶接研究会：プレートガーダーの耐荷力に関する理論と実験，1965年 7月．

2) Iguchi, S. : Allgemeine Lösung der Knickungsaufgabe für rechteckige Platten, Ingenieur Archiv, J.7, S.207-215, 1936.

3) Iguchi, S. : Die Knickung der rechteckigen Platten durch Schubkräfte, Ingenieur Archiv, J.9, S.1-12, 1938.

4) Nölke, K. : Biegungsbeulung der Rechteckplatte,. Ingenieur Archiv, J.8, S.403, 1937.

5) Nölke, K. : Biegungs-Beulung der Rechteckplatte mit eingespanter Längsrändern, Bauingenieur, J.17, S.111, 1936.

6) Wagner, H. : Über Konstruktions- und Berechnungs-fragen des Blechbaues, Jb. wiss. Ges. Luftf., S.113-125, 1928.

7) Chwalla, E. : Beitrag zur Stabilitätstheorie des Stegbleches vollwandiger Träger, Der Stahlbau, J.9, S.161, 1936.

8) Timoshenko, S. : The Stability of the Webs of Plate Girders, Engg., Vol.138, pp.207-209, 1934.

9) Stein, O. : Stabilitäts ebener Rechteckbleche unter Biegung und Schub, Bauingenieur, J.17, S.308, 1936.

10) Way, S. : Stability of Rectangular Plates under Shearing and Bending Force, Journal of Applied Mechanics, Vol.3, No.4, 1936.

11) 土木学会：座屈設計ガイドライン，1987年10月．

12) 森脇良一・安井義則・滝本哲四郎：平板の座屈解析におけるたわみ関数，土木学会第42回年次学術講演会講演概要集，I-81，1987年 9月．

（1989年10月12日受付）