

棒理論の拡張による薄肉開断面部材の 断面変形を考慮した弾塑性座屈解析

ANALYSIS OF ELASTO-PLASTIC DISTORTIONAL BUCKLING OF THIN-WALLED
OPEN SECTION MEMBERS BY EXTENDED BAR THEORY

彦坂 熙*・丸山 義一**・ミアン アマル マムード***

By Hiroshi HIKOSAKA, Yoshikazu MARUYAMA and Amar Mahmood MIAN

A new method is presented for analyzing elasto-plastic buckling of arbitrary thin-walled open section members taking into account the effect of cross-sectional distortion. The governing equations for instability of the members, based on the extended bar theory, are introduced. The theory is applied for calculating the buckling loads of an H-section column under axial compression and a U-section girder subjected to uniform bending. The accuracy of the method is discussed by comparing some solutions with those obtained using a more complex method based on plate theory. The new method makes it possible to predict elasto-plastic eigenvalues for the distortional buckling of thin-walled members using a relatively small number of degrees of freedom in the analysis.

1. 緒言

Bernoulli-Eulerの弾性曲げ理論に端を発する棒部材の力学は、構造物の大型化・軽量化に伴って現れた諸問題を解決するため、微小変位から有限変位問題へ、弾性から弾塑性領域へと理論の精密化および適用範囲の拡大が図られて、今日に至っている。棒部材の力学とは、断面寸法に比べて長さが十分に大きい部材の特徴に基づいて断面形状の変化を無視し、同時に断面内無応力をも仮定して、3次元空間にある棒のすべての変形量を部材軸方向座標のみの関数として取り扱う力学をいう。このとき、断面を含む2次元の諸量についても、断面積、断面二次モーメント、ねじり定数など1次元の軸線上の諸値に変換される。

鋼構造物においては、力学的有利さと経済性から、一般に薄肉断面部材が主構として用いられる。薄肉の主構部材は、その局部変形や局部座屈を防止するため、横構、対傾構、ダイアフラムおよび十分剛な補剛材などの配置が不可欠であり、またそれにより初めて棒部材の力学の適用対象となる。すなわち、これら各種の補剛材は、それがなければ主構部材の断面が変形することを前提として配置されており、補剛材の効果を明らかにするためには、断面変形を起こす主構部材の挙動を知る必要がある。

断面の広がりが多い薄肉断面部材では、断面を構成する板それぞれが程度の差はあるものの一つの部材として挙動するゆえ、たとえばオイラー座屈や横倒れ座屈として扱われる固有値問題において、断面形状の

* 工博	九州大学教授	工学部土木工学科	(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)
** 工修	九州大学助手	工学部土木工学科	(同 上)
*** 工修	九州大学大学院	土木工学専攻博士後期課程	(同 上)

変化が部材全体座屈の固有値を低下させることが知られている^{1)~4)}。さらに、局部座屈と部材全体座屈の連成問題は、まだ解明が不十分な重要問題である。

棒部材に残された未解決の問題の一つとされる、断面形状の変化およびそれに伴う断面内応力を考慮する薄肉開断面部材の理論は、既に弾性微小変位理論^{5)~7)}および弾性有限変位理論⁸⁾の基礎方程式の誘導が試みられており、特定の2軸対称I形断面部材に関しては、弾塑性横倒れ座屈に及ぼすウェブの変形の影響⁹⁾も解析されている。本論文は、従来3次元の有限要素法や有限帯板法の適用対象とされてきた、任意形状薄肉開断面部材の構成板要素の変形を考慮した弾塑性座屈問題が、棒理論の拡張により1次元の力学問題として解析可能であることを示し、棒部材の力学の精密化と適用範囲の拡大に寄与せんとしたものである。

2. 断面変形の定義および座屈前後の応力の取り扱い

図-1のような多角形状薄肉開断面を持つ直線部材において、図心Cを原点とし、 x, y 軸を断面主軸とする右手系直交座標 (x, y, z) を定める。 (x, y) 座標とは別に、部材断面上で板厚中心線に一致する座標 s と、その法線方向座標 n を定め、板厚 t は s の関数とする。各板要素の

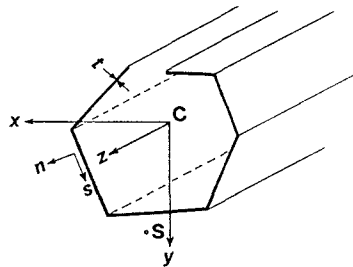


図-1 薄肉開断面部材と座標系

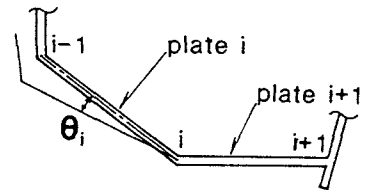


図-2 断面変形 θ_i の定義

図-1 薄肉開断面部材と座標系 図-2 断面変形 θ_i の定義
 接合線と部材断面との交点を節点と呼び、板要素の総数を N 枚とすると、節点総数は $N-1$ 個となる。図-2のように節点 i において、板要素 $i+1$ の板厚中心線 $i-(i+1)$ に対し板要素 i の中心線 $(i-1)-i$ が反時計回りになす相対回転角 θ_i ($i=1, 2, \dots, N-1$)で断面変形を定義する。各板要素の実際の接合点以外に、板要素の任意点に節点を設けることにより、断面変形の自由度を増すことが出来る。

断面変形を考慮した薄肉開断面部材の変位場は、断面剛の仮定に基づくせん断中心 $S(x_s, y_s)$ の x, y 方向変位 u_s, v_s 、図心 C の z 方向変位 w_c 、点 S を通る部材軸まわりの断面回転角 ϕ の4成分に、上に定義した $N-1$ 個の相対回転角 θ_i ($i=1, 2, \dots, N-1$)を加えた都合 $N+3$ 自由度で表される。文献8)には、この変位場の仮定に基づき、変位成分の3次以上の微小項を無視した弾性有限変位理論の基礎方程式が、仮想変位の原理より誘導されている。

本研究は、任意の残留応力 σ_r を持つ薄肉開断面部材が中心軸圧縮力 P または断面主軸 x まわりの一定曲げモーメント M_a を受ける場合の、断面変形を考慮した弾塑性座屈を、接線係数理論による固有値問題として解析するものであるゆえ、部材の初期たわみの影響は考慮されていない。このとき、与えられた残留応力と荷重のもとで座屈前には断面変形が生じない。

断面剛を仮定する既往の棒理論では、部材軸に直交する方向の断面内直応力は無視される。これに対し本論では、座屈時に生じる相対回転角 θ_i に起因する板要素単位幅 $dz=1$ 当たりの面外曲げモーメント M_s と曲げ応力 σ_s を考慮する。ただし、 M_s は座屈前には存在せず、座屈時の断面変形にともなってはじめて生じる微小量であるから、 M_s と θ_i の関係を次の線形式で表すことにする。

$$M_s = \sum_{i=1}^{N-1} M_i \theta_i \quad (1)$$

ここに、 M_i は単位の断面変形 $\theta_i=1$ のみにより生じる面外曲げモーメントである。すなわち、部材の任意断面 z において切り出される単位幅 $dz=1$ の多角形フレームに関し、部材 $1 \sim i$ の部材回転角を全て -1 、部材 $i+1 \sim N$ の部材回転角を0とした変形状態に対して、つり合い条件式を解くことにより M_i が決定される。 M_i の算定に必要な板要素の面外曲げ剛性は $E I_s$ (E はヤング係数、 $I_s = t^3/12$)で与えられる。

有限変位理論の基礎方程式⁸⁾における非線形項(断面力と変位の積)の断面力を、すべて座屈前の部材軸方向直応力 $\sigma_z^{(0)}$ から定義される既知量で置き換えることにより、所要の弾塑性座屈のつり合い方程式が得られる。その具体例は、後述の計算例において示す。なお、本論で取り扱う部材の境界条件はすべて単純支持とする。すなわち、部材長を L とすれば、 $z = 0, L$ において次式が成立する。

$$u_s = v_s = \phi = \theta; u_s'' = v_s'' = \phi'' = \theta'' = 0 \quad (2)$$

ここに、 $(\)''$ は z に関する2次の微係数を表す。

3. 弾塑性時の部材軸方向直応力分布と断面定数

弾塑性座屈解析を行うにあたって次の仮定を設ける。

- 1) 材料は降伏応力 σ_y の完全弾塑性体とする。
- 2) 降伏状態は部材軸方向の直応力 σ_z のみによって決まる。
- 3) 座屈時の微小な断面変形に伴って生じるサンブナンのせん断応力 τ_{zs} と部材軸直角方向直応力 σ_s はフックの法則を満たすものとする。

座屈前の部材軸方向直応力分布および座屈時の断面定数を計算するため、各薄板要素の断面をそれぞれ微小要素に分割する。ただし、ここでは他の断面寸法に比べ板厚は十分小さいものとして、板厚方向には分割しない。曲率による各微小要素の図心の部材軸方向直ひずみを ε_b 、微小要素の図心の残留ひずみを ε_r 、さらに断面一様に生ずる直ひずみを ε_0 とすると、微小要素の図心の直ひずみ ε_z は

$$\varepsilon_z = \varepsilon_b + \varepsilon_0 + \varepsilon_r \quad (3)$$

で与えられ、直応力 $\sigma_z^{(0)}$ が次式により求められる。

$$\sigma_z^{(0)} = \begin{cases} E \varepsilon_z & (|\varepsilon_z| < \varepsilon_y) \\ \sigma_y \operatorname{sgn}(\varepsilon_z) & (|\varepsilon_z| \geq \varepsilon_y) \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 sgn はsignum記号であり、 $\operatorname{sgn}(\)$ のカッコ内が正のときは1を、負のときは-1を与える。

各微小要素の断面積を ΔA とすると、部材軸方向の力のつり合いより

$$P = \sum \sigma_z^{(0)} \Delta A \quad (5)$$

与えられた $\varepsilon_b, \varepsilon_r$ に対して ε_0 を任意に仮定し、試行錯誤法により式(5)が成立するときの ε_0 を決定する。これにより座屈前直応力 $\sigma_z^{(0)}$ の分布が求められ、座屈前曲げモーメント M_0 が次式で得られる。

$$M_0 = \sum \sigma_z^{(0)} y \Delta A \quad (6)$$

接線係数理論に基づいて弾塑性座屈解析を行う場合、図心、せん断中心および断面定数は、断面の弾性域に対してのみ定義される。ただし、仮定3)よりサンブナンのねじり剛性および板要素の部材軸直角方向曲げ剛性 $E I_s$ の計算においては全断面有効とする。

4. 数値計算例

4.1 中心軸圧縮力を受ける2軸対称H形断面柱の弾塑性座屈

図-3に示す2軸対称H形断面柱が中心軸圧縮力 P を受けるとき、 x 軸方向の全体曲げ座屈に及ぼす x 軸に関し対称な断面変形の影響について解析する。なお、断面変形の自由度の相違による影響を調べるため、自由度1の解析モデルAと自由度2のモデルBを考える。このとき、 x 軸方向変位 u_s と相対回転角 θ_1, θ_2 に関する次の座屈支配方程式が得られる。

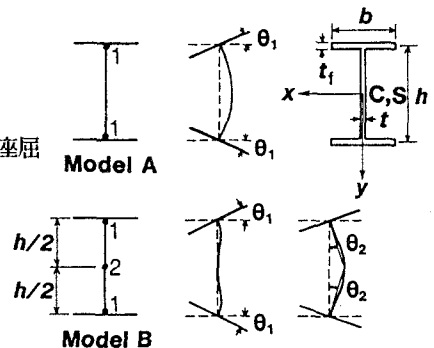


図-3 断面変形の節点と基本モード

モデルAについて：

$$E I_y u_s'''' + P u_s'' = 0 \quad (7)_a$$

$$2 \{ E I_w \theta_1'''' - (G J^f + K \{ \frac{q}{2} \} \theta_1'') \} + f \frac{q}{2} \theta_1 = 0 \quad (7)_b$$

モデルBについて：

$$E I_y u_s'''' + P u_s'' - E H_{2y} \theta_2'''' + M_x \{ \frac{q}{2} \} \theta_2'' = 0 \quad (8)_a$$

$$2 \{ E I_w (\theta_1 + \theta_2)'''' - (G J^f + K \{ \frac{q}{2} \} (\theta_1 + \theta_2)'') \} + f \frac{q}{2} \theta_1 + f \frac{q}{2} \theta_2 = 0 \quad (8)_b$$

$$- E H_{2y} u_s'''' + M_x \{ \frac{q}{2} \} u_s'' + 2 \{ E I_w \theta_1'''' - (G J^f + K \{ \frac{q}{2} \} \theta_1'') \} \\ + 2 \{ E I_w \theta_2'''' - (G J^f + K \{ \frac{q}{2} \} \theta_2'') \} + f \frac{q}{2} \theta_1 + f \frac{q}{2} \theta_2 = 0 \quad (8)_c$$

ここに、

$$f \frac{q}{2} = 4E I_s / h, \quad f \frac{q}{2} = 16E I_s / h, \quad f \frac{q}{2} = -8E I_s / h$$

$$J^f = b t^3 / 3, \quad J^T = (2b t^3 + h t^3) / 6$$

$$K \{ \frac{q}{2} \} = 2 \int_{A_{uf}} \sigma_z^{(0)} \{ x^2 + (y + h/2)^2 \} dA, \quad K \{ \frac{q}{2} \} = 2 \int_{A_{uT}} \sigma_z^{(0)} \{ x^2 + (y + h/2)^2 \} dA$$

$$M_x \{ \frac{q}{2} \} = 2 \int_{A_{uw}} \sigma_z^{(0)} (y + h/2) dA$$

ただし、 A_{uT} はH形断面を2分した上側T形断面の面積を表わし、 A_{uw} および A_{uf} は上側T形断面のうち、それぞれウェブおよびフランジの面積を表わす。

I_y はy軸まわりの断面二次モーメント、 I_w および I_w はそれぞれフランジ1枚およびH形断面を2分した片側T形断面のそりねじり定数、 H_{2y} は断面変形のそり関数のy軸に関する一次モーメントであり、これらはいずれも断面の弾性域のみで定義される定数である。

モデルAにおける2つの方程式は連成しておらず、それぞれ独立に解くことができる。式(7)_aは周知のEuler座屈の方程式であり、式(7)_bは部材の曲げを伴わないフランジの局部座屈の方程式となる。したがって断面変形の自由度を1にとったモデルAによっては、Euler座屈に及ぼす断面変形の影響を評価できないことがわかる。

部材Lが非常に短い両端ピン支持のH形断面柱では、Lを座屈モードの半波長とする1次の局部座屈を生じるが、Lが長くなるとともに2次以上の局部座屈が生じ得るゆえ、式(7)、(8)の解を次式で表す。

$$u_s = C_1 \sin(m\pi z/L), \quad \theta_i = C_{1+i} \sin(m\pi z/L) \quad (9)$$

ただし、 $i=1, 2$ および $m=1, 2, \dots, \infty$, $C_1 \sim C_3$ は任意定数。

これらの解を式(7)、(8)に代入し部材長Lについて解けば、H形断面柱に関する非弾性座屈曲線を描くことができる。

図-4、5は、H形断面柱の弾性座屈曲線を両対数グラフで示したものである。簡単のため座屈次数は $m=1$ に限定している。図-4はモデルAによる解析結果であり、上述のようにフランジの局部座屈と部材の全体曲げ座屈の固有値 P_{cr} がそれぞれ独立に得られる。一方、図-5は図-4と同じ断面諸元のH形断面柱について、モデルBによる固有値を実線で示している。また、互いに交差する3本の破線については、下に凸の破線がフランジの局部座屈、右下がりの破線が全体曲げ座屈、さらに右上がりの破線がモデルAによっては得られないウェブの局部座屈を表している。図中に代表的な(a)～(g)点における断面変形モードを示しているが、(c)点付近ではこの断面変形によって曲げ座屈荷重が低減している。一方、(d)点から(e)点、(f)点から(g)点の付近でも全体曲げ座屈は断面変形の影響を受けていることがわかる。

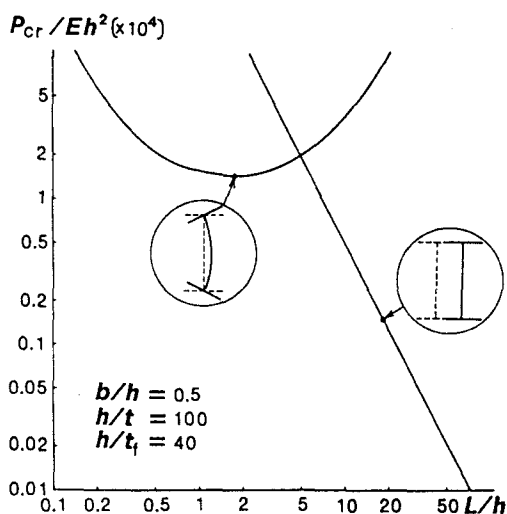


図-4 $P_{cr}-(L/h)$ 曲線 (モデルA)

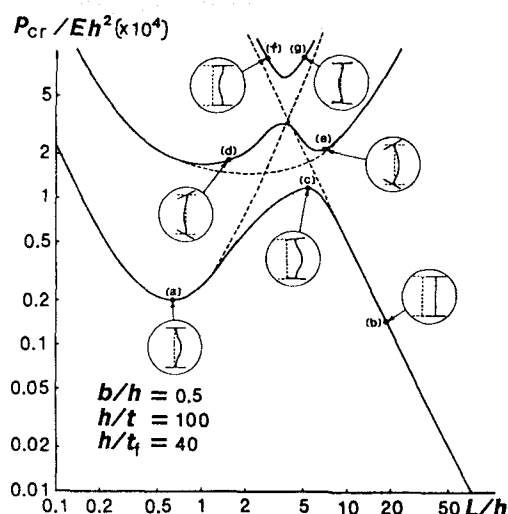


図-5 $P_{cr}-(L/h)$ 曲線 (モデルB)

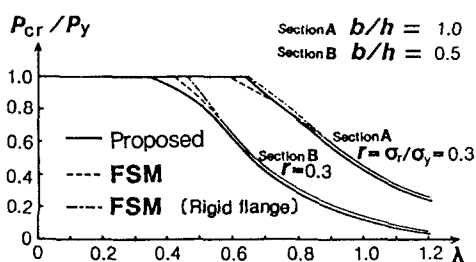


図-6 局部座屈強度曲線(1)

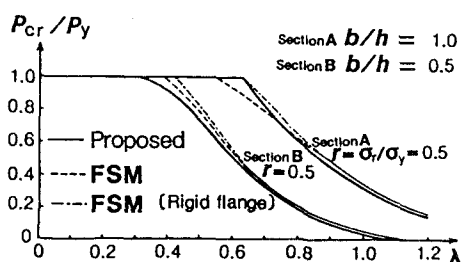


図-7 局部座屈強度曲線(2)

次に、弾塑性座屈荷重の精度を検証するために、モデルBによる計算値と有限帯板法²⁾による結果とを図-6および図-7において比較した。ただし、断面変形の影響が小さい全体曲げ座屈に関しては両者による解が非常によく一致するので、ここでは局部座屈の固有値の極小値を縦軸にとり、比較を行った。横軸は $\lambda = \sqrt{\sigma_y / E} \cdot (b/2t)$ である。扱った断面諸元は b/h の異なるA、Bの2例であるが、両断面ともフランジとウェブの板厚は等しいものとする。断面Aではフランジの座屈が支配的であり、断面Bではウェブの座屈が支配的となるため、それぞれ支配的な局部座屈の固有値のみを図示している。残留応力は図-8の圧延形の分布モデルを考慮し、 $r = \sigma_r / \sigma_y = 0.3$ (図-6) および 0.5 (図-7) とする。有限帯板法(FSM)による解のうち破線はフランジの横断面内の曲げ変形を考慮し、1点鎖線は無視している。ここに提案した棒理論の拡張解析によれば、部材の全体座屈に及ぼす断面変形の効果を評価できるのみならず、本例のような簡単な断面における局部座屈の問題にも近似的に対処できることがわかる。しかも変形の自由度が16(断面A)および20(断面B)である有限帯板法に対し、本解析値の自由度は3であり、極めて少ない自由度にもかかわらずかなり良好な結果が得られるといえる。

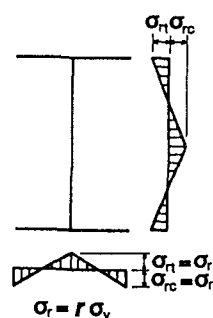


図-8 残留応力の分布モデル

4.2 一定曲げモーメントを受ける1軸対称U形断面桁の弾塑性座屈

U形断面桁は下路式桁構造や合成箱桁橋の床版コンクリート打設前、あるいは打設中の鋼桁の断面構造として考えられる構造形式である。この構造は曲げによる圧縮側フランジの断面を大きくとれないため、曲げ圧縮によるフランジの座屈安定問題が曲げ耐荷力に対して重要な意味を持つ。¹⁸⁾

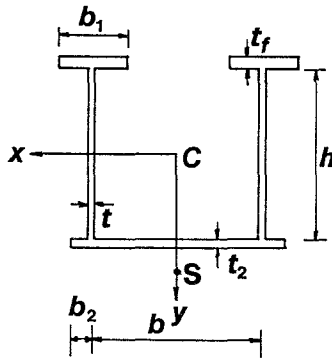


図-9 断面諸元

図-9に示す1軸対称U形断面桁にx軸まわりの一定曲げモーメント M_0 が作用する場合について解析を行う。ここでは、図-10に示す断面変形の節点と基本モードを設定した。断面変形の自由度8に、全体横倒れ変形の自由度2(u_s, ϕ)を合わせて、解析の総自由度は10である。残留応力は図-11に示すy軸に関して対称な溶接形の分布を考慮した。

このときの座屈支配方程式のうち、特に全体横倒れ座屈に対応する2式のみを示せば次の通りである。

$$E I_y u_s'''' + M_0 \phi'' + \sum_{j=1}^8 (-E H_{jy} \theta_j''' + M_x^{(0)} \theta_j'') = 0 \quad (10)_a$$

$$M_0 u_s'' + E I_w \phi'''' - (G J + K^{(0)}) \phi'' + \sum_{j=1}^8 \{E H_{jw} \theta_j''' - (G J + L^{(0)}) \theta_j'\} = 0 \quad (10)_b$$

上式において断面変形 θ_j に関する項をすべて省略すれば、断面剛を仮定する周知の全体横倒れ座屈の支配方程式となる。式中の $M_x^{(0)}$ 、 $L^{(0)}$ は座屈前応力 $\sigma_z^{(0)}$ により定義される断面力、また H_{jy} 、 H_{jw} 、 J は断面変形に固有の定数である。

図-12は、 $h=b=1500\text{mm}$ 、 $b_1=390\text{mm}$ 、 $b_2=100\text{mm}$ 、 $t=9\text{mm}$ 、 $t_1=22\text{mm}$ 、 $t_2=12\text{mm}$ の諸元を持つU形断面桁について、弾性および弾塑性座屈曲線と断面剛の仮定のもとに求めた全体横倒れ座屈曲線を、座屈次数 $m=1$ のみにて示したものである。逆対称な断面変形は全体横倒れ座屈荷重 M_{cr} を低減させるが、対称断面変形は全体横倒れ座屈とは独立に存在する。また、弾塑性解における $M_{cr}/M_y=0.7$ (M_y は降伏モーメント)付近の段差は、荷重がそれ以下では全断面弾性である上フランジにおいて圧縮残留応力の平坦部が一挙に塑性化することに起因する。この例では、 $L/h < 18$ では上フランジの局部座屈(対称断面変形)、 $18 < L/h < 47$ では逆対称断面変形を伴って固有値の低減された全体横倒れ座屈が支配的である。なお、本例のように曲げモーメントを受ける開断面部材の座屈荷重については、弾塑性解が弾性解

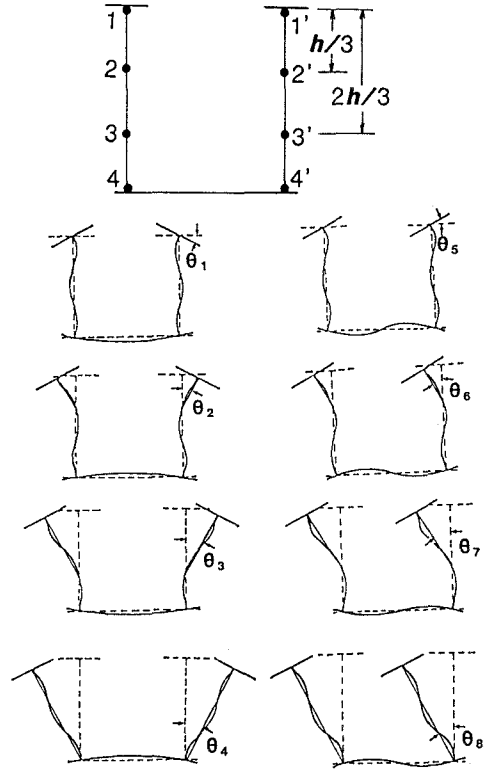


図-10 断面変形の節点と基本モード

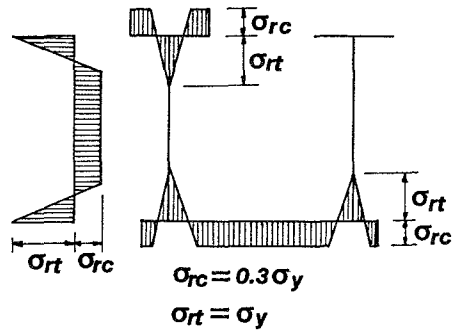


図-11 残留応力の分布モデル

また、弾塑性解における $M_{cr}/M_y=0.7$ (M_y は降伏モーメント)付近の段差は、荷重がそれ以下では全断面弾性である上フランジにおいて圧縮残留応力の平坦部が一挙に塑性化することに起因する。この例では、 $L/h < 18$ では上フランジの局部座屈(対称断面変形)、 $18 < L/h < 47$ では逆対称断面変形を伴って固有値の低減された全体横倒れ座屈が支配的である。なお、本例のように曲げモーメントを受ける開断面部材の座屈荷重については、弾塑性解が弾性解

より大きくなる場合がある。⁹⁾

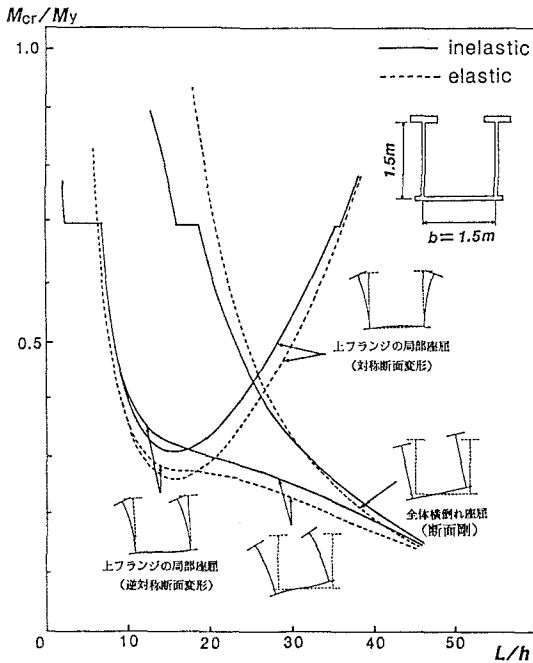


図-12 U形断面桁の座屈曲線(1)

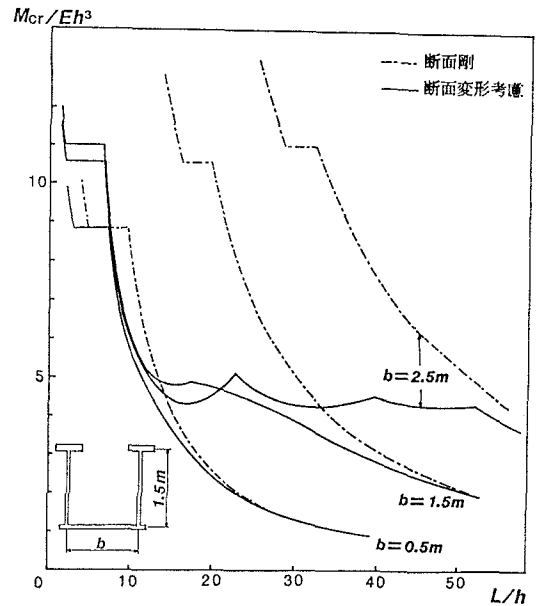


図-13 U形断面桁の座屈曲線(2)

図-13は、腹板間隔 b のみを変えて、2次以上の座屈をも考慮し、 M_{cr}/Eh^3 の最小値をプロットしたものである。また、断面剛の全体横倒れ座屈曲線を一点鎖線で示している。面内曲げ剛度が面外曲げ剛度より大きい断面においては全領域において全体横倒れ座屈が支配的であり、逆に面外曲げ剛度が大きい断面においては上フランジの局部座屈が支配的となり、全体座屈の影響はほとんど現れないことがわかる。

5. 結 語

棒理論の拡張により、任意形状薄肉開断面部材の構成板要素の変形を考慮した弾塑性座屈問題が、部材軸方向の1次元の力学問題として解析可能であることを示した。断面不変の仮定を出発点として導かれる棒部材の古典的座屈理論は、本解析法により得られる座屈支配方程式の特例となることが確かめられ、本研究が棒部材の力学の精密化と適用範囲の拡大に寄与しうものと考えられる。

本法の実用的価値は、従来3次元の有限要素法や有限帯板法の適用範囲とされてきた問題を棒理論の適用対象としたことにより、取り扱う変形の自由度を著しく減少させる点にある。大型コンピュータによる離散化解析法により、高精度の結果を得ることは可能であるが、著者らは、支配方程式の各項の物理的意味を把握しやすい棒理論の拡張解析にも、工学的価値を認めることができると考えている。ただし、本論文は部材の初期不整のうち残留応力のみを考慮し、弾塑性座屈を接線係数理論による固有値問題として解析したに留まっているため、今後、初期たわみや座屈前断面変形を考慮した真の非弾性耐荷力解析にまで発展させる必要がある。

参 考 文 献

- 1) Hancock, G.J. : Local, Distortional and Lateral Buckling of I-Beams, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.104, No.ST11, pp.1787~1798, 1978

- 2) 吉田 博：H形鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度，土木学会論文報告集，第243号，pp.19～32，1975.
- 3) 深沢泰晴・杉原美好：I形ばりの弾性横座屈に及ぼすウェブの変形の影響，構造工学論文集，Vol.31A，pp.15～23，1985.
- 4) 彦坂 熙・高海克彦・丸山義一：薄肉開断面部材の断面変形を考慮した有限変位理論と弾性安定問題への応用，構造工学論文集，Vol.32A，pp.265～275，1986.
- 5) 高橋邦弘・水野正夫：薄肉開き断面部材の断面変形（一自由度断面変形・一軸対称断面の場合）：日本機械学会論文集（第1部），44巻378号，pp.460～467，1978.
- 6) 高橋邦弘・水野正夫：薄肉開き断面部材の断面変形（多自由度断面変形の場合）：日本機械学会論文集（A編），45巻400号，pp.1545～1553，1979.
- 7) Hikosaka, H. and Takami, K. : Formulation of Distortional Behavior of Thin-Walled Curved Beam with Open Cross Section, Proc.JSCE, Vol.2, pp.91～100, 1985.
- 8) Hikosaka, H. et al. : Analysis of Elastic Distortional Instability of Thin-Walled Members with Open Polygonal Cross Section, Proc.JSCE, Vol.4, No.1, pp.57～66, 1987.
- 9) 深沢泰晴・杉原美好：ウェブの変形を考慮したI形ばりの弾塑性横倒れ座屈強度，構造工学論文集，Vol.33A，pp.93～102，1987.
- 10) 福本嘯士・久保全弘：U形断面桁の横倒れ座屈強度，土木学会論文報告集，第264号，pp.17～32，1977.

（1988年10月12日受付）