

面内変動せん断力を受ける長方形板の動的安定性

Dynamic Stability of a Rectangular Plate Subjected to In-plane Dynamic Shearing Forces

高橋和雄*・夏秋義広**・川副洋一***・小西保則****

By Kazuo TAKAHASHI, Yoshihiro NATSUAKI, Yoichi KAWAZOE and Yasunori KONISHI

In this paper, dynamic stability of a rectangular plate subjected to in-plane sinusoidally time-varying shearing forces is presented. The problem is analyzed by the linear theory of the thin plate. The basic equation of motion is solved by using a Galerkin method and the harmonic balance method.

As numerical examples, the buckling and vibration properties of a rectangular plate subjected to in-plane static shearing forces are examined. Then, the dynamic unstable regions of the present problem are obtained for various boundary conditions and compared with the results by using the method of Hsu.

1. まえがき

平板構造に面内変動動的荷重が作用すると、係数励振振動あるいは動的不安定現象によって面外振動が生ずることが知られている。これまで、この方面の研究は一様分布面内力を対象とした研究がほとんどであった^{1),2)}。しかし、橋桁の腹板やラーメン構造では軸力に起因する一様分布面内力の他に、曲げに基づく三角形分布の面内力やせん断力によるせん断応力が作用している。著者等は、これまで面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性^{3),4)}と安定を失った後の非線形応答^{5),6)}を明らかにしている。これらの研究によって、面内変動荷重を受ける長方形板の面外不安定領域は、負荷形式によって著しく異なることを示した。

橋梁の主桁の支点やラーメン部材の隅角部では、曲げの他にせん断力も作用しており、板構造の動的安定性を明らかにするうえで、せん断力を受ける場合を解明しておくことが必要である。特に、橋梁の腹板を対象とする場合、腹板は主としてせん断力を負担することを考慮すると、曲げや軸力に比べて、せん断力が支配的な荷重となることが予想される。そこで、本研究では、面内変動せん断力を受ける長方形板の動的安定性を解析するものである。本研究では、微小変形理論に基づいて、面外不安定振動の発生領域を明らかにするものである。解析にあたっては、係数励振振動型の偏微分方程式をGalerkin法と調和バランス法を用いて

* 工博 長崎大学助教授	工学部土木工学科	〒852 長崎市文教町1の14
** (株)片山鉄工所	技術開発室	〒551 大阪市大正区南恩加島6丁目2-21
	(長崎大学大学院学生 海洋環境建設学講座)	
*** (株)三井建設	土木部	〒101 千代田区岩本町3-10-1
****工博 長崎大学教授	工学部土木工学科	〒852 長崎市文教町1の14

離散化する方法を採用する⁷⁾。数値解析において、まず、安定性解析の基礎となる静的せん断力を受ける場合の固有振動特性を明らかにし、次いで、動的安定性を明らかにするものである。

2. 基礎式および境界条件

図-1に示すような長方形板に x, y 座標系を導入し、 x, y 平面に対して直角方向を z 軸とする。この長方形板の面外方向の変位を $w(x, y, t)$ とする。 $x=0, a$ および $y=0, b$ の辺に静的せん断力 N_{xy0} と変動せん断力 $N_{xyt} \cos \Omega t$ の和からなるせん断力 N_{xy} が作用するものとする。安定を失った直後の長方形板の運動方程式は次式で与えられる。

$$L(w) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - 2(N_{xy0} + N_{xyt} \cos \Omega t) \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1)$$

ここに、 ρ : 板の密度、 h : 板厚、 $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$: 板剛度、 E : ヤング率、 ν : ポアッソン比、 Ω : 励振円振動数、 t : 時間、 $\nabla^2 = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)^2$ 。

境界条件として、次のような2ケースについて考える。すなわち、

case I : 全周単純支持

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, (x=0, a); w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, (y=0, b) \quad (2a)$$

case II : 一对辺単純支持、他對辺固定

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, (x=0, a); w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, (y=0, b) \quad (2b)$$

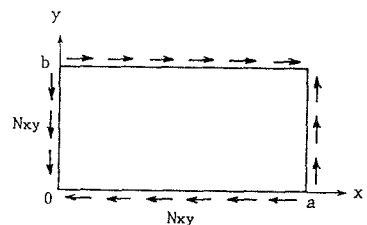


図-1 長方形板の一般図

3. 解法

式(1)の解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (3)$$

ここに、 T_{mn} : 未知の時間関数、 W_{mn} : 境界条件を満足する座標関数。

係数励振振動による不安定振動は、各々の固有振動が生ずるのであるから、式(3)の座標関数 W_{mn} として、静的せん断力 N_{xy0} が作用しない長方形板の曲げ振動の固有振動形を用いるのが合理的で、 W_{mn} は次のように定義される³⁾。

$$\text{case I : } W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4a)$$

$$\text{case II : } W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sum_{i=1}^n a_i \left\{ \cos \frac{(i-1)\pi y}{b} - \cos \frac{(i+1)\pi y}{b} \right\} \quad (4b)$$

ここに、 a_i : 定数、 m, n : x, y 方向の半波数。

式(3)を式(1)に代入して、Galerkin法を適用する。すなわち、

$$\int_0^a \int_0^b L(w) W_{ij} dx dy = 0 \quad (5)$$

ここに、 $i, j = 1, 2, \dots$ 。

上式の定積分を実行し、さらに、無次元化すれば、次式が得られる。

$$[A]\{\ddot{T}\} + [B]\{\dot{T}\} + (\bar{N}_{xy0} + \bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau)[C]\{T\} = \{0\} \quad (6)$$

ここに、 $[A], [B], [C]$: 係数行列 (Appendix A 参照)、 $\{T\} = \{T_{11} \ T_{12} \ T_{13} \ \dots \ T_{1N} \ T_{21} \ T_{22} \ T_{23} \ \dots \ T_{2N} \ T_{31} \ T_{32} \ \dots \ T_{3N} \ \dots\}^T$ (N : 採用した級数の項数、 $m, n = 1, 2, \dots, N$)、 $\bar{N}_{xy0} = N_{xy0} / N_{cr}$ 、 $\bar{N}_{xyt} = N_{xyt} / N_{cr}$ 、 $N_{cr} = \lambda_{cr} D \pi^2 / b^2$ 、 N_{cr} : 座屈せん断力、 λ_{cr} : 座屈固有値、 $\tau = \Omega_1 t$: 無次元時間、 $\bar{\omega} = \Omega / \Omega_1$: 無次元励振振動数、 $\Omega_1 = k_{11}^2 \sqrt{D / \rho h b^2}$ 、 k_{11} : 1次(最低次)の振動の固有値、 k_{rs} : 振動の固有値。

[A]の逆行列[A]⁻¹を式(6)に前から掛けると、次式が得られる。

$$[I]\{T\}+[F]\{T\}+(\bar{N}_{xy0}+\bar{N}_{xyt}\cos\bar{\omega}\tau)[G]\{T\}=0 \quad (7)$$

ここに、[F]=[A]⁻¹[B]=diag(k₁₁⁴/k₁₁⁴, k₁₂⁴/k₁₁⁴, ..., k₂₁⁴/k₁₁⁴, ..., k_{NN}⁴/k₁₁⁴)、[G]=[A]⁻¹[C]。

式(6)の解を次のように仮定する。

$$\{T\}=e^{\lambda\tau}\left\{\frac{1}{2}b_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin k\bar{\omega}\tau+b_k\cos k\bar{\omega}\tau)\right\} \quad (8)$$

ここに、λ：未定々数、b₀, a_k, b_k：未知のベクトル。

式(8)を式(7)に代入して、調和バランス法を適用すれば、次のようなb₀, a_k, b_kを求めるための同次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} (\lambda^2[I]+[F]+\bar{N}_{xy0}[G])b_0+\bar{N}_{xyt}[G]b_1 &= \{0\} \\ 2\{(\lambda^2-k^2\bar{\omega}^2)[I]+[F]+\bar{N}_{xy0}[G]\}a_k-4\lambda k[I]b_k+\bar{N}_{xyt}[G](a_{k+1}+a_{k-1}) &= \{0\} \\ 4\lambda k[I]a_k+2\{(\lambda^2-k^2\bar{\omega}^2)[I]+[F]+\bar{N}_{xy0}[G]\}b_k+\bar{N}_{xyt}[G](b_{k+1}+b_{k-1}) &= \{0\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、a₀=0。

上式は、行列を用いて、次のように一般的に表される。

$$[D]\{X\}=\{0\} \quad (10)$$

ここに、{X}={b₀ b₁ b₂ ... a₁ a₂ ...}^T, [D]：係数行列。

式(10)の行列[D]は、その性質から次のような3個の行列に分解される。

$$[D]=[M_0]-\lambda[M_1]-\lambda^2[M_2] \quad (11)$$

ここに、[M₀], [M₁], [M₂]：λの0, 1, 2次の係数行列。

ここで、{Y}=λ{X}なる新しいベクトルを導入すれば、式(11)は2倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (12)$$

式(12)は非対称行列の固有値問題である。与えられた加振振動数 $\bar{\omega}$ と変動せん断力の振幅 $\bar{N}_{xyt}$ の組合せに対して、得られた固有値の実数部R_e(λ)の値がすべて負ならば安定、逆に一つでも正ならば不安定であるという条件から、安定性が評価される。不安定な状態において、長方形板には面外振動が発生する。

4. 面内変動せん断力を受ける長方形板の動的安定性の基本的性質

式(7)の微分方程式から得られる不安定領域は、行列[F], [G]の要素構成によって定まる。行列[F]は対角行列であり、その対角線要素は固有円振動数の自乗から構成される。一方、時間関数{T}の構成を{T₁₁, T₁₂, T₁₃, T₂₁, T₂₂, T₂₃, T₃₁, T₃₂, T₃₃}^Tの9自由度まで採用した場合(x, y方向の半波数を3個採用した場合)、対応する行列[G]は次のように表される。

$$[G]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & f_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{1221} & 0 & f_{1223} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{1322} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & f_{2112} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2132} & 0 \\ f_{2211} & 0 & f_{2213} & 0 & 0 & 0 & f_{2231} & 0 & f_{2233} \\ 0 & f_{2312} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2332} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & f_{3122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{3221} & 0 & f_{3223} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{3322} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここに、 $g_{ki}=g\{j+(i-1)N, n+(m-1)N\}=f_{mni j}$ 、 $N=3$ (項数)、 $f_{mni j}=f_{ijmn}$ (対称行列)。

式(13)から明らかなように、行列[G]の対角線要素は零であり、また、対称行列である。

式(7)の微分方程式の不安定領域には、次の2種類がある。

$\bar{\omega}=2\omega_{mn}/k$ の付近に生ずる単純共振

(14)

$\bar{\omega}=(\omega_{mn}\pm\omega_{ij})/k$ の付近に生ずる結合共振(ここに、+和形、-差形)

つまり、加振振動数 $\bar{\omega}$ が固有振動数の2倍($2\omega_{mn}$)の整数分の1($1/k$)付近に生ずる単一の固有振動形をもつ単純共振と、加振振動数 $\bar{\omega}$ が2個の固有振動数の和、または差($\omega_{mn}\pm\omega_{ij}$)の整数分の1($1/k$)付近に生ずる2個の固有振動数をもつ結合共振である。式(7)の行列[G]の要素構成によって、これらのうち、どの不安定領域が卓越するかが決定される。

Hsuの摂動法による近似解法⁹⁾によれば、単純共振と結合共振の主不安定領域の境界の第1近似値は次のように与えられる。

単純共振：

$$1 - \bar{N}_{xyt} \frac{f_{ijij}}{4\omega_{ij}^2} \leq \frac{\bar{\omega}}{2\omega_{ij}} < 1 + \bar{N}_{xyt} \frac{f_{ijij}}{4\omega_{ij}^2} \quad (15a)$$

結合共振：

$$1 - \frac{\bar{N}_{xyt}}{2(\omega_{mn}\pm\omega_{ij})} \sqrt{\frac{|f_{mni j} f_{ijmn}|}{\omega_{mn}\omega_{ij}}} \leq \frac{\bar{\omega}}{\omega_{mn}\pm\omega_{ij}} \leq 1 + \frac{\bar{N}_{xyt}}{2(\omega_{mn}\pm\omega_{ij})} \sqrt{\frac{|f_{mni j} f_{ijmn}|}{\omega_{mn}\omega_{ij}}} \quad (15b)$$

ここに、+のとき($f_{mni j}=f_{ijmn}$)：和形の結合共振、-のとき($f_{mni j}=-f_{ijmn}$)：差形の結合共振。

したがって、せん断力を受ける長方形板の面外不安定領域は、式(13)のように対角線要素が零であるから、式(15a)の単純共振の主不安定領域は存在しないことがわかる。一方、式(15b)からわかるように、非零の非対角要素から結合共振が得られる。いま、行列[G]は対称行列であるから、和形の結合共振が存在する⁹⁾。式(13)から得られる不安定領域 $\omega_{mn}+\omega_{ij}$ ($f_{mni j}$)には次のような組合せが存在する。すなわち、 $\omega_{11}+\omega_{22}$ (f_{1122})、 $\omega_{12}+\omega_{21}$ (f_{1221})、 $\omega_{12}+\omega_{23}$ (f_{1223})、 $\omega_{13}+\omega_{22}$ (f_{1322})、 $\omega_{21}+\omega_{32}$ (f_{2132})、 $\omega_{22}+\omega_{31}$ (f_{2231})、 $\omega_{22}+\omega_{33}$ (f_{2233})、 $\omega_{23}+\omega_{32}$ (f_{2332})・・・などである。存在しうる結合共振 $\omega_{mn}+\omega_{ij}$ に注目すると、 $m \neq i$ 、 $n \neq j$ であるから、x方向の半波数(m または i)とy方向の半波数(n または j)が相異なる固有振動形をもつ結合共振が存在することがわかる。

5. 静的せん断力を受ける場合の固有振動特性

不安定領域の決定に先立って、固有振動数および固有振動形に及ぼす静的せん断力の影響を評価する。す

なわち、式(7)において、 $\bar{N}_{xyt}=0$ とおけば静的せん断力 $\bar{N}_{xy0}$ を受ける長方形板の運動方程式が得られる。この方程式を固有値解析すれば固有振動数が求められる(Appendix B)。case I およびcase IIの正方形板(縦横比 $\mu=1.0$)に対する静的せん断力による固有振動数の変化は、図-2、3に示すとおりである。なお、計算にあたっては、級数の項数 N を10項まで採用している。図中において、横軸 $\bar{n}=\Omega_{mn}/\Omega_{11}$ は、各次の固有円振動数 Ω_{mn} を静的せん断力 $\bar{N}_{xy0}$ が作用しない場合の最低次の固有振動数 Ω_{11} で基準

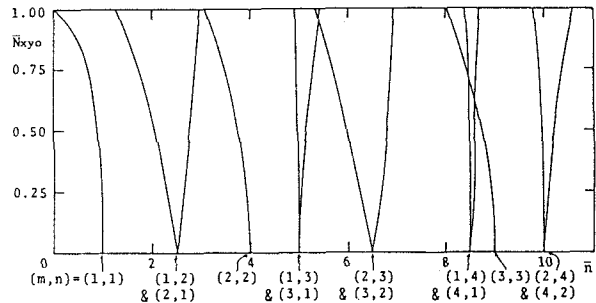


図-2 正方形板の固有振動数に及ぼす静的せん断力の影響(case I)

化した無次元固有振動数である。また、縦軸 $\bar{N}_{xy0}$ は無次元静的せん断力である。図中の記号 (m, n) は ω_{mn} 、すなわち、静的せん断力が作用しない場合の x 方向の半波数 m 、 y 方向の半波数 n の固有振動形をもつ無次元固有振動数を意味する。静的せん断力が作用すると ($\bar{N}_{xy0} \neq 0$)、後述のように固有振動形の対称性が失われるから、 x 、 y 方向の半波数の意味がなくなるので、あくまでも (m, n) が意味を持つのは $\bar{N}_{xy0} = 0.0$ の場合だけである。

図-2, 3に示すように、静的せん断力を受ける正方形板の固有振動数は振動次数によって著しく異なる。静的せん断力の効果は、一般に固有振動数を減少させる効果をもつが、特定の振動次数では増大する場合がある。また、図-4に $\bar{N}_{xy0} = 0.0$ および 1.0 のときの最低次の固有振動形の比較を示す。図-2, 3に示したように、最低次の固有振動数は $\bar{N}_{xy0}$ の増加とともに $\bar{n} = 1.0$ から 0.0 に変化する。つまり $\bar{N}_{xy0} = 1.0$ 、 $\bar{n} = 0.0$ は静的せん断力による座屈状態に対応し、平板は復元力をもたないために、振動数が零となっている。このときの固有振動形は座屈波形に一致する。

このように、静的せん断力が作用すると、固有振動形が変化してくる。長方形板の対角線に沿って、せん断力による圧縮力と引張力が作用している。このため、固有振動形の $x = a/2$ もしくは $y = b/2$ の軸に関する対称・逆対称性が失われてくる。case I の正方形板 ($\mu = 1.0$) の $\bar{N}_{xy0} = 0.0$ と $\bar{N}_{xy0} = 1.0$ の節の形状を示せば、図-5のようになる。なお、座屈解析は式(4a)および式(4b)において、 $i = 1$ とおいた場合の試行関数を用いて行った。10項まで採用した場合の解は表-1に示すとおりであり、エネルギー法と比較すると、同程度の解が得られている。

6. 面外不安定領域

(1) 本解析法による不安定領域

式(13)に示した行列 $[G]$ の要素構成の非零要素から、面外不安定領域が得られる。面内曲げを受ける長方形板の動的安定性の論文³⁾と同じく、不安定領域を求めるあたっては、1次の固有振動数の10倍までの振動数の範囲を対象とした。つまり、式(12)から得られる不安定領域のうち、また、 $\bar{N}_{xyt} = 0.5$ で、不安定領域

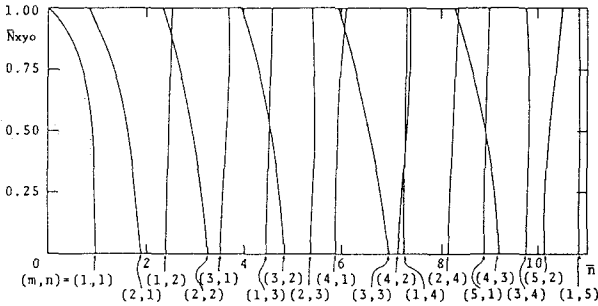


図-3 正方形板の固有振動数に及ぼす
静的せん断力の影響 (case II)

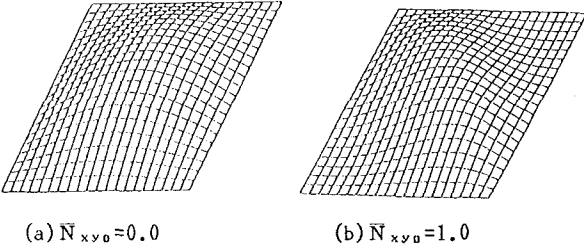


図-4 正方形板の最低次の固有振動形の変化 (case I)

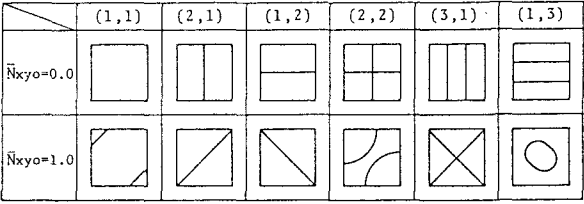


図-5 正方形板の節の形状 (case I)

表-1 座屈固有値

case	I	II
本 法	9.34	12.65
エネルギー法	9.40	12.28

の幅が0.1以上のものをプロットし、0.1以下の幅の狭い不安定領域は省略する。

図-6および7はcase I (縦横比 $\mu=1.5$) とcase II ($\mu=1.0$) の面外不安定領域を $\bar{N}_{xyt}=0.0$ に対して示したものである。なお、case I の正方形板 ($\mu=1.0$) では、固有振動数が重根をもつために、不安定領域が一つの振動数領域に重なる。不安定領域の表示を簡単にするために、縦横比は1.5としている。各ケースの無次元固有円振動数 ω_{mn} および定数 k_{11}, λ_{cr} を表-2に示す。図中において、横軸 $\bar{\omega}$ は無次元加振振動数を、縦軸 $\bar{N}_{xyt}$ は無次元せん断力の振幅を表す。図中の右下がりの斜線部が結合共振を意味する。不安定領域に示した記号 ($\omega_{mn} + \omega_{ij}$) は結合共振を意味する。これらの斜線部において、面内変動せん断力 $\bar{N}_{xyt} \cos \bar{\omega} \tau$ の作用下において、平板には面外振動が生ずる。式(13)から予想されるように、図-6および7の不安定領域は、結合共振の主不安定領域が卓越している。せん断力 $\bar{N}_{xyt}$ を受ける場合の不安定領域は、発生する中心振動数 $\omega_{mn} + \omega_{ij}$ が2個づつ重なるので、同一の振動数で、異なる自由度の組合せからなる2種類の結合共振が生ずる。これらの結合共振の主不安定領域の他に、低い振動数領域に、副不安定領域が生ずるはずであるが、その幅は無視できるほど狭い。

(2) Hsuの方法⁸⁾による不安定領域

面内変動せん断力 $\bar{N}_{xyt}$ を受ける長方形板の面外不安定領域は、図-6, 7に示すように不安定領域が重なる。このために、不安定領域の分離が困難である。結合共振の主不安定領域が支配的であることに注目すると、式(15b)で示したHsuの方法による近似解法の適用が可能となる。

Hsuの方法によるcase I の $\mu=1.5$ の面外不安定領域を図-8に示す。Hsuの方法では、 $\bar{N}_{xyt}$ が微小であることを前提としているために、境界線が直線で与えられるが、図-6のより厳密な解法による結合共振と

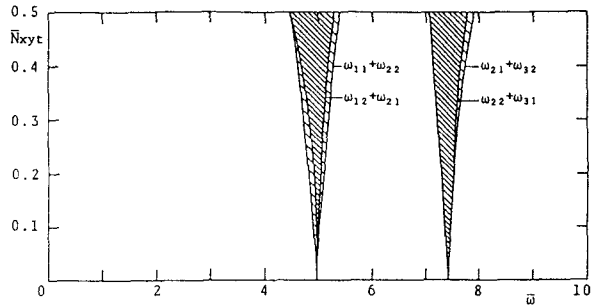


図-6 長方形板の面外不安定領域
($\mu=1.5, \bar{N}_{xy0}=0.0, \text{case I}$)

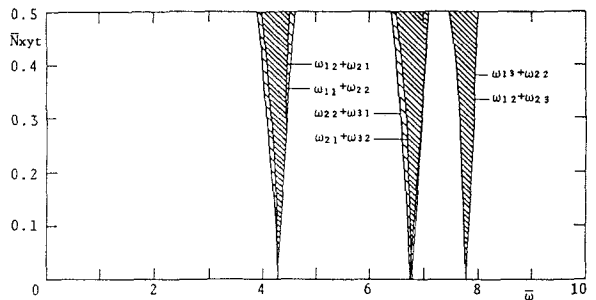


図-7 正方形板の面外不安定領域
($\mu=1.0, \bar{N}_{xy0}=0.0, \text{case II}$)

表-2 無次元固有円振動数

case	I			II		
m n	1	2	3	1	2	3
1	1.000	3.070	6.538	1.000	2.398	4.494
2	1.923	4.000	7.462	1.891	3.273	5.392
3	3.462	5.538	9.000	3.530	4.853	6.964
k_{11}	1.444			2.935		
λ_{cr}	7.150			13.070		

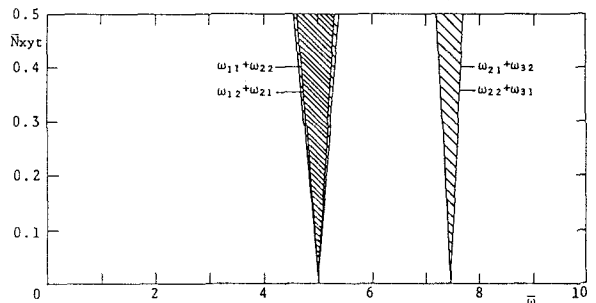


図-8 長方形板の面外不安定領域
($\mu=1.5, \bar{N}_{xy0}=0.0, \text{case I}$)

同等の解が得られている。したがって、本題のように主不安定領域が卓越する不安定領域を求めるにあたってはHsuの方法を使用することは、不安定領域の種類の判定のみならず、計算時間の短縮にも有効と考えられる。

(3) 負荷条件の影響

著者は、文献3)において面内曲げを受ける長方形板の動的安定性を明らかにしている。文献3)の(14.a),(14.b)に面内曲げおよび一様分布(垂直)荷重が作用する場合の係数行列の要素構成が示されている。これらを式(13)で言えば、面内曲げを受ける場合には、主対角線の3個の小行列(3行3列)に非零の要素が並び、非対角の小行列はいずれも零である。また、一様分布荷重の場合には、対角行列となる。これらより、面内曲げを受ける場合も結合共振が卓越するが、現われる不安定領域の種類は根本的に異なる。つまり、 $\omega_{mn} + \omega_{mj}$ のように、 x 方向の半波数が同じである場合の結合共振のみが存在する。また、一様分布荷重の場合には、単純共振のみが存在する。これらに対して、せん断力を受ける場合には、 $\omega_{mn} + \omega_{ij}$ のように、 x, y 方向とも異なった半波数をもつ結合共振が存在する。以上のように、負荷形式によって現われる不安定領域が著しく異なるといえる。したがって、板構造の動的安定性を取り扱うためには、負荷形式によって異なる面内力の分布を反映した解析を行うことが必要である。また、不安定領域の広さに注目すると、せん断力を受ける場合が、曲げ(文献3の図-4,5)および一様分布(垂直)荷重(文献3の図-8)の場合よりも狭いといえる。しかし、はり構造を対象とする場合、腹板は主としてせん断力を受けもつことを考慮すると、せん断力による励振力 N_{xy} の大きさは曲げや一様分布荷重の値よりも大きい。他の負荷形式に比べて不安定領域が狭いという事実は、ただちに動的安定性が問題にならないということにつながらない。また、動的安定性を議論する場合、必ずしも固有振動数の2倍で単純共振の不安定領域が現われるとは限らないことに注意を要する。

7. まとめ

本研究は、面内変動せん断力を受ける長方形板の動的安定性を解析したものである。得られた結果をまとめると、次のとおりである。

(1) 静的せん断力を受ける長方形板の固有振動形は、静的せん断力が作用しない場合と著しく異なる。固有振動数に及ぼす静的せん断力の影響は、振動次数によって異なる。

(2) 変動せん断力を受ける場合の面外不安定領域は、2個の固有振動形をもつ和形の結合共振の主不安定領域が支配的である。単純共振および副不安定領域は無視できるほど狭い。また、面内曲げを受ける場合と比較すると同じように結合共振が卓越するが、不安定領域の幅は面内曲げの場合と比べ狭い。

(3) 変動せん断力による面外不安定領域では、複数個の和形の結合共振が同一の振動数領域で発生する特性をもつ。このために、不安定領域の種類を分類することが一般に困難で、他の方法との併用が望まれる。

本研究では、微小振動の範囲で問題を解析しているために、不安定振動が生ずる振動数領域のみが得られている。不安定振動の振幅を定めるためには、幾何学的非線形を考慮した取り扱いが必要である。不安定振動の振幅の決定法、実橋でのパラメーターの大きさ、減衰および初期変形の影響、また曲げとせん断力が同時に作用する場合の動的安定性については、今後逐次発表する予定である。

本稿をまとめるにあたっては、平川倫明氏(大学院修士課程)の援助を得た。数値計算には長崎大学情報処理センターのFACOM M-360を使用したことを付記する。

Appendix A

$$[A]の要素: a_{kl} = \int_0^a \int_0^b W_{mn}(\xi, \eta) W_{ij}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (A-1)$$

ここに、 $k = j + (i-1)N$, $l = n + (m-1)N$, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$

$$[B] \text{の要素: } b_{ki} = \left(\frac{k_{mn}}{k_{11}} \right)^2 \int_0^1 \int_0^1 W_{mn}(\xi, \eta) W_{ij}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (A-2)$$

$$[C] \text{の要素: } c_{ki} = -\frac{2 \lambda_{cr}}{k_{11}^2 \beta} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \xi \partial \eta} W_{ij}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (A-3)$$

Appendix B

一定のせん断力 $\bar{N}_{xy0}$ を受ける長方形板の運動方程式は、式(7)より次のように与えられる。

$$[I]\{\ddot{T}\} + [F]\{T\} + \bar{N}_{xy0}[G]\{T\} = \{0\} \quad (B-1)$$

ここで $\{T\} = \exp(i \bar{n} \tau) \{\bar{T}\}$ とおけば、式(B-1)は次のように書き改められる。

$$([F] + \bar{N}_{xy0}[G])\{\bar{T}\} = -\bar{n}^2 \{\bar{T}\} \quad (B-2)$$

上式は次のような行列の固有値問題に変換される。

$$[A]\{\bar{T}\} = \lambda \{\bar{T}\} \quad (B-3)$$

ここに、 $[A] = [F] + \bar{N}_{xy0}[G]$, $\lambda = -\bar{n}^2$ 。

参考文献

- 1) Bolotin, V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, Inc., pp.382-416, 1964.
- 2) 八巻・永井: 周期的な圧縮荷重を受ける矩形板の動的安定, 東北大学高速力学研究所報告, 第36巻, 第351号, pp.147-168, 1975.
- 3) 高橋・田川・池田・松川: 面内曲げを受ける長方形板の動的安定性, 土木学会論文報告集, 第341号, pp.179-186, 1984.
- 4) Takahashi, K. and Konishi, Y.: Dynamic Stability of a Rectangular Plate Subjected to Distributed In-plane Dynamic Force, Journal of Sound and Vibration, Vol.123, pp.115-127, 1988.
- 5) Takahashi, K., Konishi, Y. and Kawano, R.: Nonlinear Response of a Rectangular Plate Subjected to Inplane Dynamic Moment, Proc. of JSCE, No.374/I-6, pp.79-87, 1986.
- 6) Takahashi, K., Konishi, Y., Kawano, R. and Urakawa, S.: Dynamic Stability of an Initially Deflected Rectangular Plate under an Inplane Dynamic Moment, Proc. of JSCE, No.392/I-9, pp.83-91, 1988.
- 7) Takahashi, K.: Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.257-262, 1982.
- 8) Hsu, C.S.: On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom, Journal of Applied Mechanics, Vol.30, pp.367-372, 1963.

(1988年10月12日受理)