

B E M — F E M 結合法による地盤構造物の
動的定常応答解析

DYNAMIC ANALYSIS OF GEOSTRUCTURES BY BEM-FEM COUPLING METHOD

上杉 真平* 大津 政康**

BY Shinpei UESUGI and Masayasu OHTSU

Dynamic behaviors of geostructures subjected to incident seismic waves can be referred to as scattering problems of elastic waves. Studies on the dynamic response of geostructures containing inhomogeneity are performed. A numerical method employed is a coupling of the direct Boundary Element Method with the Finite Element Method. The BEM domain presents the homogenous elastic medium, which surrounds inhomogenous region given by the finite elements. After confirming the accuracy of the proposed method, numerical analysis of in-plane problems are performed on an underground nuclear waste deposit and an earth-platform on the slope.

1. はじめに

一般に、地震波による地表及び地中構造物の動的応答解析は、弾性波動の散乱問題として扱われる。このような問題は、これまで有限要素法 (FEM) や差分法 (FDM) などにより解析されてきたが^{1), 2)}、最近では、これに加えて境界要素法 (BEM) が積極的に適用されるようになり、多くの研究成果が報告されている³⁾。これは、BEMが、FEMやFDMなどの領域型の解法に比べて地震波の散乱問題において対象となる無限および半無限領域の解析により適しているからである。この一方で、一般的な不均質異方弾性体に対しては、その基本解を求めることが困難であるため、これまでBEMにより解析された問題のほとんどは均質等方弾性体に関するものであり、不均質および異方性を扱ったものは少ない^{2), 3)}。このようなことから、BEMと不均質異方弾性体の取り扱いに優れた他の手法とを組み合わせた結合法が確立されれば、それは無限領域内に複雑な不均質場を含むような現実的な問題に対して最も理想的な解法の一つとなることが期待できる。弾性波動問題の定式化においては、大別して時間領域と周波数領域の2つの場合が考えられ、それぞれ貴重な研究が成されているが^{4), 5), 6)}、本論文では、定式化が複雑で安定な解が得られにくい時間領域のものに対して、その取り扱いが簡単でフーリエ変換等を用いれば過渡的応答を求めることも可能である周波数領域でのBEMとFEMの結合法の定式化について考察した。そして、他の解析解と比較することによって提案法の妥当性を確認した後に、P, S V波による無限体及び半無限体における面内波動問題に

* 工修 熊本工業大学助手 工学部土木工学科 (〒860 熊本市池田4-22-1)

** 工博 熊本大学助教授 工学部土木環境工学科 (〒860 熊本市黒髪2-39-1)

適用してその有用性を示した。

2. 結合法の定式化

いま、図-1に示すような無限の広がりをもつ領域Dと有限な領域Aとから成る領域Rについて考える。ここで、領域Dは均質であり、その中に不均質な部分(領域A)があるものとする、このような結合された領域 $R = D + A$ での弾性波動問題の解析には、領域Dを境界要素法(BEM)で、また領域Aを有限要素法(FEM)でモデル化し、両者を組み合わせて全体領域Rについて定式化する結合法が有効となる。そこで、まず領域Dが均質、等方かつ線形の弾性体であるとして平面ひずみ状態を考え、物体力はないものと仮定すると、二次元面内定常波動場の支配方程式は次のNavierの式で表される。

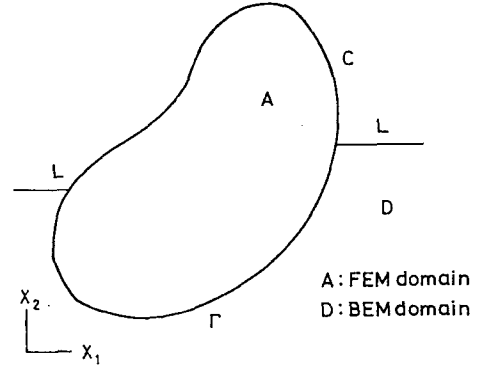


図-1 領域と境界

$$\left(\frac{k_L^2}{k_T^2} - 1\right)u_{\beta, \alpha\beta}(x) + u_{\alpha, \beta\beta}(x) + k_T^2 u_{\alpha}(x) = 0 \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1)$$

ここに、 u_{α} は変位ベクトル、 $k_L = \omega / C_L$ 、 $k_T = \omega / C_T$ は、それぞれP波、S波の波数であり、 C_L および C_T は、P波、S波の波速、 ω は円振動数である。また、下指標のギリシヤ文字は総和規約に従うものとする。いま、領域Dの境界が $B = L + \Gamma$ で表されるものとする、Greenの公式によりSomiglianaの式として知られる次の積分方程式が得られる。

$$u_{\alpha}(x) = \int_B U_{\alpha\beta}(x, y) t_{\beta}(y) dB - \int_B T_{\alpha\beta}(x, y) u_{\beta}(y) dB \quad x \in D \quad (2)$$

ただし、 Γ は領域DとAが接合する結合境界を意味する。式(2)において、 $x \in D \rightarrow x \in B$ なる極限移行操作を行うことによって次の境界積分方程式が得られる。

$$C^{\circ} u_{\alpha}(x) = \int_B U_{\alpha\beta}(x, y) t_{\beta}(y) dB - \int_B T_{\alpha\beta}(x, y) u_{\beta}(y) dB \quad , \quad x \in B \quad (3)$$

ここに、 C° は二重層核の自由項の係数であり、また、右辺第二項目の $f \cdot dB$ はCauchyの主値積分を意味している。ここで、自由場の変位を u_{α}° と表すものとする、式(1)の解は次のような積分方程式の解に対応する^{7), 8)}。

$$C^{\circ} u_{\alpha}(x) = \int_B U_{\alpha\beta}(x, y) t_{\beta}(y) dB - \int_B T_{\alpha\beta}(x, y) u_{\beta}(y) dB + u_{\alpha}^{\circ}(x) \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^{\circ}(x) &= u_{\alpha}^L(x) + u_{\alpha}^R(x) \\ U_{\alpha\beta}(x, y) &= \frac{i}{4\mu} [H_0^{\circ}(k_T r) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{k_T^2} \{H_0^{\circ}(k_T r) - H_0^{\circ}(k_L r)\} \cdot \alpha\beta] \\ T_{\alpha\beta}(x, y) &= \mu [U_{\beta\alpha, \gamma\gamma} n_{\gamma} + U_{\gamma\alpha, \beta\gamma} n_{\gamma} + \frac{2\nu}{(1-2\nu)} n_{\beta} U_{\gamma\alpha, \gamma}] \end{aligned}$$

である。ここに、 $U_{\alpha\beta}$, $T_{\alpha\beta}$ は、それぞれ第1種および第2種Green関数、 H_0^0 は第1種Hankel関数、 μ はせん断弾性係数、 ν はポアソン比、 n は y 点における法線方向単位ベクトルであり、 u_α^I , u_α^R は、それぞれ入射および反射場の変位である。式(4)を以下のように離散化および変形し、FEMの定式化に適合した形にマトリックス表示すると次式が得られる。

$$K_b u_b = F_b \quad (5)$$

ただし、

$$K_b = [G^T G]^{-1} G^T H$$

$$F_b = \sum_b \int_{\Delta B} N^T N t_b dB + [G^T G]^{-1} G^T u^0$$

ここで、 G , H のマトリックスの成分は以下のとおりである。

$$G_{\alpha\beta ij} = \int_{\Delta B_j} U_{\alpha\beta}(x, y) dB$$

$$H_{\alpha\beta ij} = \int_{\Delta B_j} T_{\alpha\beta}(x, y) dB + C^0 \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}$$

ここに、 δ はKroneckerのデルタ、 ΔB_j は分割積分区間、 G^T は G の転置をそれぞれ示している。また、 u_b , F_b はBEM境界上の全節点変位および節点力ベクトル、 t_b は表面力ベクトルであり、 $u_b = u_L \cup u_\Gamma$, $F_b = F_L \cup F_\Gamma$ とする。

次に、境界 $S = C + \Gamma$ をもつ領域 A が等方弾性体であるとしてFEMで定式化すると、その平衡方程式は次のようなよく知られた形で表される⁹⁾。

$$K_f u_f = F_f \quad (6)$$

ただし、

$$K_f = \sum_A \int_A B^T D B dA - \omega^2 M$$

$$F_f = \sum_S \int_S N^T N t_f dS$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial X_1} & \frac{\partial N_i}{\partial X_2} & \frac{\partial N_j}{\partial X_1} & \frac{\partial N_j}{\partial X_2} & \frac{\partial N_k}{\partial X_1} & \frac{\partial N_k}{\partial X_2} \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

である。ここに、 B 、 D 、 M は、それぞれひずみ-変位マトリックス、応力-ひずみマトリックスおよび質量マトリックスであり、 E は弾性係数、 N は内挿関数、 ΔA は1要素の面積、 t_f はFEM領域の表面力ベクトルである。また、 u_f 、 F_f はFEM領域A内の全節点変位および節点力ベクトル、 u_Γ 、 F_Γ は結合境界 Γ 上の節点変位および節点力ベクトルであり、 $u_f = u_c \cup u_\Gamma$ 、 $F_f = F_c \cup F_{\Gamma f}$ とする。BEM領域における式とFEM領域の式は全く同型であるので、結合境界 Γ における応力および変位の連続条件、

$$\begin{aligned} t_b + t_f &= 0 \\ u_b &= u_f = u_\Gamma \end{aligned}$$

のもとで式(5)、(6)を重ね合わせるにより不均質な場を含む領域に対する結合解法の定式化が可能となる。

3. 数値解析例および考察

ここでは、入射波として平面波を仮定し、入射場および反射場として次のようなものを考える。

$$\begin{aligned} u_\alpha^I &= \phi^I, \alpha + e_{\alpha\beta} \phi^I, \beta \\ u_\alpha^R &= \phi^R, \alpha + e_{\alpha\beta} \phi^R, \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^I &= \exp \{ i (x_1 k_L \sin \gamma + x_2 k_L \cos \gamma) \} \\ \phi^I &= \exp \{ i (x_1 k_T \sin \gamma + x_2 k_T \cos \gamma) \} \\ \phi^R &= K_L \exp \{ i (x_1 k_L \sin \gamma - x_2 k_L \cos \gamma) \} \\ \phi^R &= K_T \exp \{ i (x_1 k_T \sin \gamma - x_2 k_T \cos \gamma) \} \end{aligned}$$

ここに、 ϕ および ϕ はLameのポテンシャルと呼ばれ、それぞれP波に関する変位を表すスカラーポテンシャルおよびS波に関する変位を示すベクトルポテンシャルである。また、 γ は入射角、 $e_{\alpha\beta}$ はpermutation symbolであり、 K_L 、 K_T はPおよびS波の反射係数である¹⁰⁾。

本解法の精度を比較するために、均質な無限領域内にある円孔に入射角 $\gamma = 90^\circ$ でSV波が入射したときの円孔表面の応答変位を計算し、他の解析解¹¹⁾と比較した結果を図-2に示す。計算においては、円孔の周辺(領域3)をBEMで、また円孔の周囲(領域1、2)をFEMでモデル化して144要素に分割しているが、解析解とよく一致していることがわかる。なお参考のために、BEMの間接法を用いて定式化した結合解法による結果¹²⁾も併せて図に示してある。

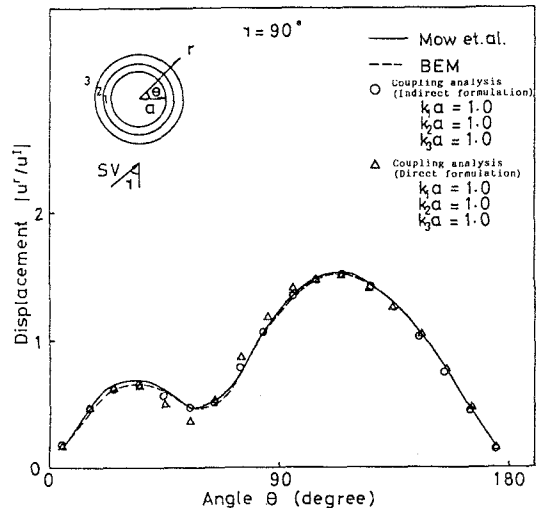


図-2 結合法による結果と解析解との比較

3. 1 無限領域問題

近年、原子力発電による電力量の増加に伴い、発電所や再処

理工場から出る放射性廃棄物の処理処分が大となってきた。特に高レベル廃棄物は、その環境に与える影響が大きいことから、比較的安全な地層内処分が具体化しつつある¹³⁾。そこで、一般に放射性廃棄物貯蔵用地下空洞は地下深部に設けられることから、これを無限領域の問題とみなして地震時の挙動を考察した。解析モデルとしては、図-3に示すような形状および材料定数のものを考えた^{14), 15)}。計算においては、廃棄物収納用ボアホールを運搬トンネル軸方向に連続な矩形の溝と仮定し、二次元問題として考え、運搬トンネルの表面およびボアホールの部分をFEMで120要素に分割している。まず、図-4には、耐震設計上もっとも危険であるとされる斜め $\gamma = 45^\circ$ から $k_T d = 2.0$ および 0.49 のSV波が入射した時の応答変位を計算した結果を示す。波長の長い波($k_T d = 0.49$, 波長: $L_T = 12.5 d$)が入射したときは、隅角部を除けば全体的にほぼ剛体変位しており、廃棄物自身も影響を受けないことがわかる。これに対して波長の短い波の場合($k_T d = 2.0$, $L_T = 3.1 d$)には、廃棄物を収納して

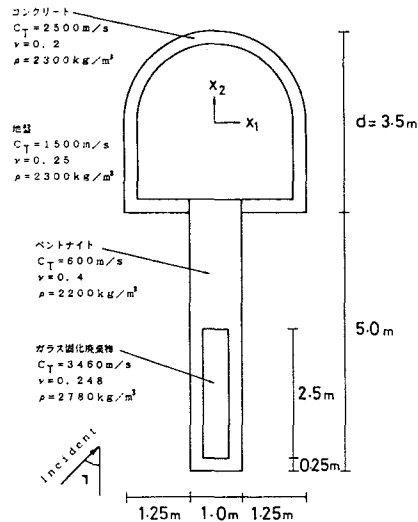


図-3 解析モデル(放射性廃棄物収納用地下貯蔵庫)

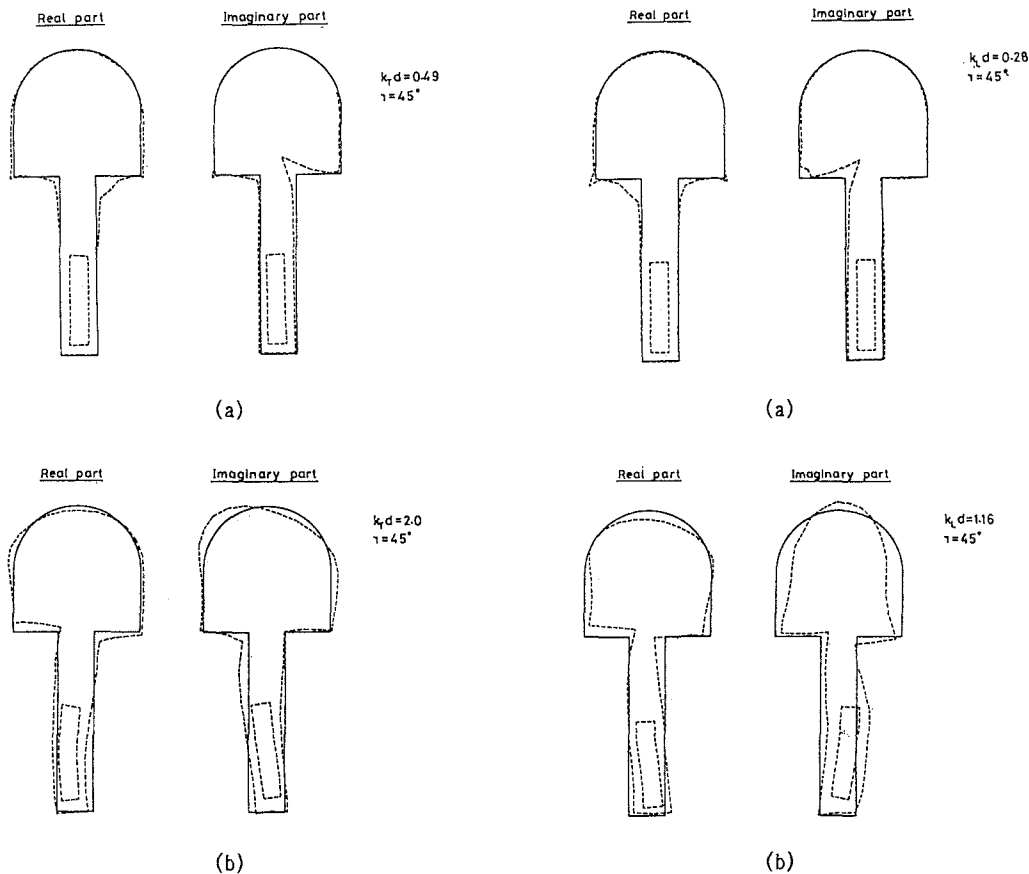


図-4 入射SV波による地下貯蔵庫の応答変位

図-5 入射P波による地下貯蔵庫の応答変位

いるボアホールの部分が大きくゆがみ、廃棄物もかなり変形している。次に、同様のモデルにP波 ($k_L d = 0.28$ および 1.16) が入射した場合の計算結果を図-5に示す。総体的にはSV波の場合と同じ様な傾向を示し、長い波長の波 ($k_L d = 0.28$, $L_L = 22.4d$) に比べて短い波長 ($k_L d = 1.16$, $L_L = 5.4d$) の方が、その応答変位は大きくなっている。なお、図-4及び5におけるReal part およびImaginary partは、それぞれ座標原点に波の腹および節を持つ入射波に対応する変位を意味している。P, SV両者の結果において、 $k_T d = 2.0$, $k_L d = 1.16$ のような高い周波数の地震波は実際上ほとんど考えられないが、 $k_T d = 0.49$, $k_L d = 0.28$ という低い振動数の地震波の場合でも貯蔵庫の隅角部に応力集中が認められることから、構造上の特性を考える上では注意を要することがわかる。

3. 2 半無限領域問題

次に、半無限領域における計算例として、図-6に示すような傾斜地盤上に造成された盛土構造物の地震応答解析を行った。傾斜角度が 30° を越えると急傾斜地の指定対象となることを考慮にいて、ここでは 20° の傾斜地盤を想定し、盛土部分をFEMで、地山をBEMでモデル化している。なお計算にあたっては、FEM領域を53要素に分割し、また、半無限境界は、過去に著者らが検討したいくつかの結果⁽⁶⁾より有限長さ $10a$ で近似している。図-7は、鉛直下方よりP波 ($k_L a = 0.73$, 波長: $L_L = 8.6a$) が入射した場合の盛土構造物の応答変位を計算した結果を示したものである。座標原点に腹をもつ波に対応する変位 (Real part) についてみると、盛土表面をコンクリートで被覆してあるもの ($k_{L1} a = 0.73$, $k_{L2} a = 1.26$, $k_{L3} a = 0.17$) に比べて、表面を補強していない盛土構造物 ($k_{L1} a = 0.73$, $k_{L2} a = 1.26$, $k_{L3} a = 1.26$) は応答が大きくなっており、同じ形状寸法の土構造物を切上工法により造成した場合 ($k_{L1} a = 0.73$, $k_{L2} a = 0.73$, $k_{L3} a = 0.73$) と比較しても大きく変形していることがわかる。一方、座標原点に節がくる場合 (Imaginary part) には、ここで対象とした解析モデルに関する限り、コンクリート被覆工による地震動の抑制効果がありみられないようである。同様に、SV波 ($k_T a = 1.8$, $L_L = 3.5a$) が鉛直下方より入射したときの応答変位を示したものが図-8である。コンクリート被覆工によって応答が抑制されるという傾向はP波の場合と殆ど同じであるが、SV波の性質からP波に比べて水平方向の変位が卓越しているようである。以上の結果より、P, SV波いずれの場合にも、盛り土表面をコンクリート等で補強することにより、切土工法で造成した比較的丈夫な土構造物と同程度にまで応答変位を抑制できることがわかった。ただし、同じ波長の入射波でも位相によってその応答がかなり異なる場合もあるので注意が必要であろう。また、構造形式の差異にかかわらず盛土法尻付近での変位は全体に大きくなっている。これは過去の震害調査^{(7)・(8)}の結果とも一致しており、このような傾斜地盤上の盛土構造物を設計、施工する上で留意すべき点であると思われる。なお、計算に用いた波数 k の添字 (1, 2, 3) は、それぞれ図中に示した各領域の番号を意味している。

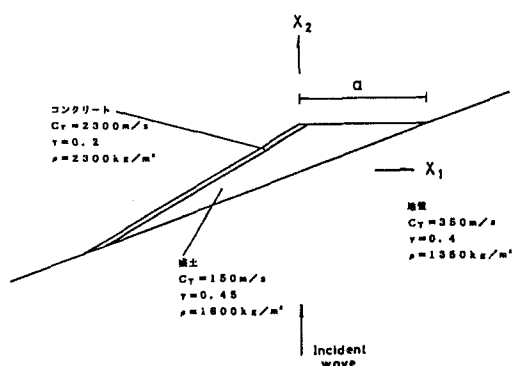


図-6 解析モデル (傾斜地盤上の盛土構造物)

をコンクリートで被覆してあるもの ($k_{L1} a = 0.73$, $k_{L2} a = 1.26$, $k_{L3} a = 0.17$) に比べて、表面を補強していない盛土構造物 ($k_{L1} a = 0.73$, $k_{L2} a = 1.26$, $k_{L3} a = 1.26$) は応答が大きくなっており、同じ形状寸法の土構造物を切上工法により造成した場合 ($k_{L1} a = 0.73$, $k_{L2} a = 0.73$, $k_{L3} a = 0.73$) と比較しても大きく変形していることがわかる。一方、座標原点に節がくる場合 (Imaginary part) には、ここで対象とした解析モデルに関する限り、コンクリート被覆工による地震動の抑制効果がありみられないようである。同様に、SV波 ($k_T a = 1.8$, $L_L = 3.5a$) が鉛直下方より入射したときの応答変位を示したものが図-8である。コンクリート被覆工によって応答が抑制されるという傾向はP波の場合と殆ど同じであるが、SV波の性質からP波に比べて水平方向の変位が卓越しているようである。以上の結果より、P, SV波いずれの場合にも、盛り土表面をコンクリート等で補強することにより、切土工法で造成した比較的丈夫な土構造物と同程度にまで応答変位を抑制できることがわかった。ただし、同じ波長の入射波でも位相によってその応答がかなり異なる場合もあるので注意が必要であろう。また、構造形式の差異にかかわらず盛土法尻付近での変位は全体に大きくなっている。これは過去の震害調査^{(7)・(8)}の結果とも一致しており、このような傾斜地盤上の盛土構造物を設計、施工する上で留意すべき点であると思われる。なお、計算に用いた波数 k の添字 (1, 2, 3) は、それぞれ図中に示した各領域の番号を意味している。

4. おわりに

本論文は、領域の一部に不均質性や異方性を含む問題を解析するための一手法として、BEMの直接法と

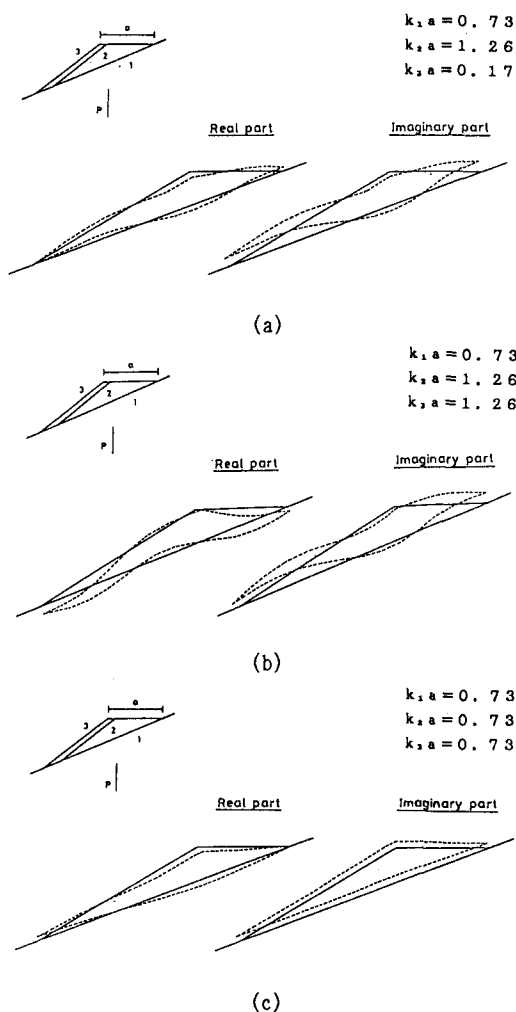


図-7 入射P波による盛土構造物の応答変位

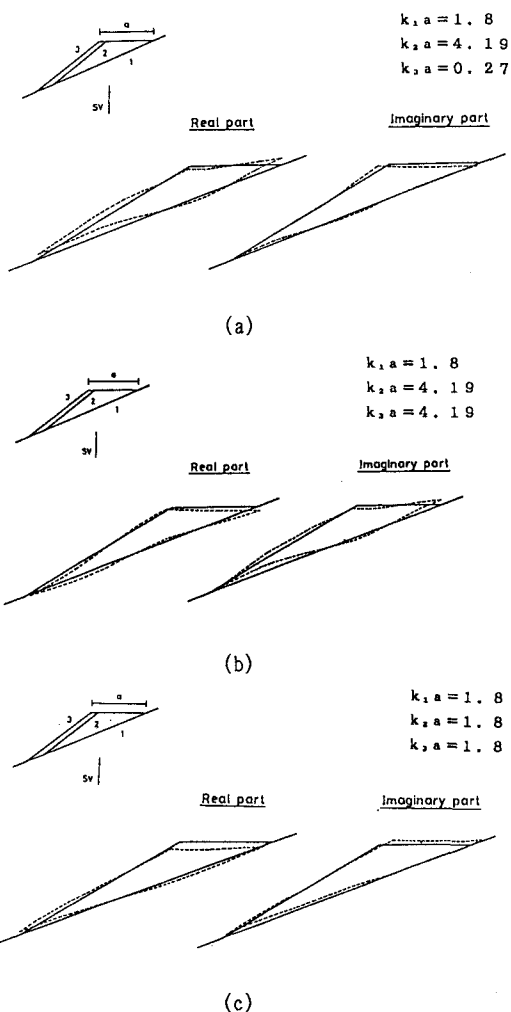


図-8 入射SV波による盛土構造物の応答変位

FEMを組み合わせた結合法を提案し、本手法の二次元面内弾性波動問題への適用性について考察した結果について述べたものである。定式化の過程からもわかるように、BEM領域の式が対称性のある剛性マトリックスによって表されることから、従来使用されている通常のFEMプログラムをBEMとの結合にそのまま用いることができ、また、ここで提案した周波数領域におけるBEMに基づく定式化は、時間領域に関するBEMによるものよりも取り扱いが簡単で安定な解が得られることから、合理的かつ経済的な手法であると考えられる。数値計算例として、本提案法を二次元面内弾性波動問題に適用し、放射性廃棄物収納用地下貯蔵庫および傾斜地盤上の盛土構造物の地震時挙動について考察したが、この結果より、本手法が不均質性を含む問題の解法に有用であることが確認された。

参考文献

- 1) Ed. by Brebbia, C.A., Wendland, W.L. and Kuhn, G.: Boundary Elements IX, Springer-Verlag, 1987.

- 2) 広瀬莊一, 丹羽義次, 北原道広: 非均質異方弾性体の動的解析, 境界要素法論文集, 第1巻, pp.157-162, 1984.
- 3) Niwa, Y. and Hirose, S.: Scattering of antiplane waves by inhomogeneous alluvial valleys, PROC. of JSCE Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 2, No. 2, 1985.
- 4) Kobayashi, S., Nishimura, N. and Mori, K.: Applications of boundary element-finite element combined method to three-dimensional viscoelastodynamic problems, Boundary Elements, ed. by Qinghua, D., Peagamon Press, pp. 67-74, 1986.
- 5) Fukui, T. and Ishida, Y.: Time marching BE-FE method in wave problem, Proc. 1st Japan-China Symposium BEM, pp. 96-106, 1987.
- 6) 東平光生, 吉田望: 時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析, 構造工学論文集, Vol. 34A, pp. 865-875, 1988.
- 7) Kobayashi, S.: Elastodynamics, Boundary Element Methods in Mechanics, ed. by Beskos, D. E., Elsevier Science Publishers, pp. 191-255, 1987.
- 8) Kitahara, M.: Boundary Integral Equation Methods in eigenvalue problems of elastodynamics and thin plates, Elsevier, 1985.
- 9) Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1977.
- 10) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S.: Elastodynamics-II, Academic Press, Ch. 7, 1975.
- 11) Mow, C. C. and Mente, L. J.: Dynamic stress and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonic shear waves, Jour. Appl. Mech., No. 30, pp. 598-604, 1963.
- 12) 上杉真平, 大津政康: BEM-FEM結合法による半無限領域における2次元弾性波動場の解析, 境界要素法論文集, 第3巻, pp. 145-150, 1986.
- 13) Wynn, J. C. and Roseboom, E. H.: Role of geophysics in indentifying and characterizing sites for high-level nuclear waste repositories, Jour. Geophysical Research, Vol. 92, No. B8, pp. 7787-7796, 1987.
- 14) 雨宮, 島辺, オアン, 笠, 馬渡: 高レベル放射性廃棄物処分における緩衝材の研究, 間組研究年報, 1987.
- 15) Kitahara, M., Hamada, M., Nakagawa, K., Muranishi, Y.: Transient wave fields around elastic inclusions in a semi-infinite foundation, Proc. 6th. Int. BEM in Eng., 1984.
- 16) 上杉真平, 大津政康: 境界要素法による半無限弾性体における二次元波動場の解析, 土木学会論文集 / I-6, No. 374, pp. 457-465, 1986.
- 17) 土木学会新潟震災調査委員会編: 昭和39年新潟震災調査報告書, 土木学会, 1966.
- 18) Ed. by Suzuki, Z.: General report on the tokachi-oki earthquake of 1968, KEIGAKU PUBLISHING CO., 1971.
- 19) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. L.: Finite dynamic model for infinite media, Proc. ASCE, 95, SM1, pp. 859-877, 1969.
- 20) Kuhlemeyer, R. L. and Lysmer, J.: Finite element method accuracy for wave propagation problems, Proc. ASCE, 99, SM5, pp. 421-427, 1973.

(1988年10月12日受付)