

調和外力を受ける剛体の浮き上がり

Uplift due to Harmonic Rocking of Rigid Body

奥村 敏恵* 松井 邦人** 鈴木 知宏*** 本田 満彦***

by Toshie OKUMURA, Kunihiro MATSUI, Tomohiro SUZUKI and Mituhiko HONDA

The rocking of rigid block due to harmonic shaking of its foundation is examined. The foundation is flexible and the block is supported by independent springs at four corners. The springs separate from the block when tension is incipient. Eigenvalues and eigenvectors are analytically obtained and uplift characteristics are examined in terms of shape of the block, spring stiffness, excitation frequency and excitation amplitude.

1 はじめに

地震力の作用に対し、構造物の設計は通常震度法や修正震度法などの準静的な手法を用いて設計を行っている。しかしこの方法で、安全性に対し十分信頼性が得られないような場合、動的解析を行なう。この最も簡単な方法は、構造物の存在が地盤震動にまったく影響しないと仮定する場合であり、この場合自由表面での加速度波形を構造物基礎に入力できる。いわば地盤は完全に剛であり、構造物はその地盤にしっかり固定されていると考えている。これは、構造物が堅固な岩盤上に支持されている場合に相当する。一方、支持地盤の剛性が構造物の剛性に比べて柔らかい場合には、構造物の振動も地盤に伝わるため、構造物と地盤の動的相互作用を考慮した連成解析が行われる。この解析では、地盤と構造物は完全に一体化しているものと仮定されることが多いが、強震時に構造物に大きな転倒モーメントが作用して基礎が地盤から浮き上がる場合には、現象的にみて正しい応答をえることができない。したがって、強震時における構造物の耐震設計を行う場合には、基礎の浮き上がりを評価できるような解析を行う必要がある。

そこで最近、剛平面上の剛体のロッキング振動を剛体の転倒に着目した研究^{2)~5)}、ばね支持され

* 工博 東京大学名誉教授

** Ph.D 東京電機大学教授 理工学部建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町)

*** 工修 東京電機大学大学院生 理工学研究科応用システム専攻 (")

*** 東京電機大学大学院生 理工学研究科建設工学専攻 (")

た剛体の浮き上がりを伴う動挙動に関する研究^{6)~9)}、上部構造とばね支持された基礎の動的挙動から、浮き上がりの上部構造への影響を考慮した研究^{10)~12)}、更に、構造物の浮き上がり挙動と滑動を検討した研究^{13)・14)}、浮き上がりと地下逸散減衰の関係に関する研究¹⁵⁾、等、特に強震時に起こる構造物の浮き上がりに関する研究が多くなってきている。

本研究では、理論的に基礎の浮き上がり現象を説明することとし、剛体とその底面の頂点で鉛直、水平方向に支持されたモデルを考え、正弦波入力を受ける剛体が定常状態において、少なくとも1つの頂点が浮き上がる条件を検討するものである。剛体の固有振動数（剛体の形状と支持ばねの剛度に依存）と、入力波の振幅、振動数及び方向の関係について整理を行った。

2. 剛体モデルと運動方程式

剛体は図-1に示すように底面の4頂点で、座標軸方向に鉛直方向及び、水平2方向にはばね支持されていて、剛体と鉛直方向のばねは重力の作用により接触し、水平方向のばねは剛体に結合されているものとする。また、剛体が、ばねの自然長の状態で接触した時の剛体の重心位置を原点に選んでいる。従って静止状態での剛体重心の座標は $(x, y, z) = (0, 0, -mg/4k_z)$ となる。

剛体の質量を m 、 x, y, z 軸方向のばね定数を k_x, k_y, k_z 、 x, y, z 軸まわりの慣性2次モーメントを J_x, J_y, J_z として、剛体が鉛直ばねの上に静かに設置された静止釣合状態から加振を受ける時、剛体重心での運動方程式は次の様になる。

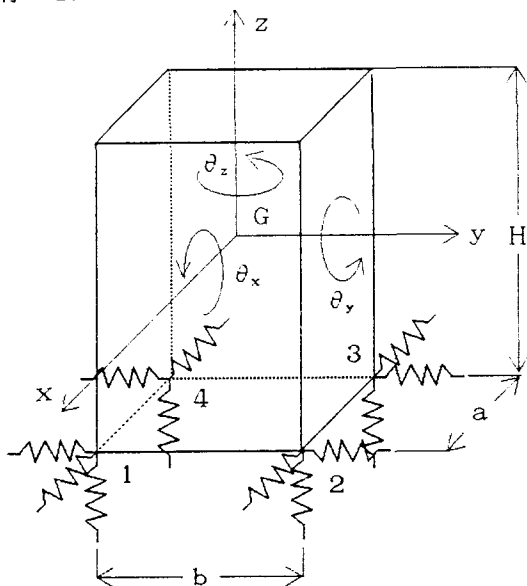


図-1 剛体モデル

$$\left. \begin{aligned}
 m \ddot{x} + 4k_x \left(x - \frac{H}{2} \theta_y \right) &= -m \ddot{x}_0 \\
 m \ddot{y} + 4k_y \left(y - \frac{H}{2} \theta_x \right) &= -m \ddot{y}_0 \\
 m \ddot{z} + 4k_z z &= -m \ddot{z}_0 - mg \\
 J_x \ddot{\theta}_x + 4k_z \left(\frac{b^2}{4} \theta_x \right) + 4k_y \left(y + \frac{H}{2} \theta_x \right) \frac{H}{2} &= 0 \\
 J_y \ddot{\theta}_y + 4k_z \left(\frac{a^2}{4} \theta_y \right) + 4k_x \left(x + \frac{H}{2} \theta_y \right) \frac{H}{2} &= 0 \\
 J_z \ddot{\theta}_z + 4k_x \left(\frac{b^2}{4} \theta_z \right) + 4k_y \left(\frac{a^2}{4} \theta_z \right) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

今、剛体の形状比を表すパラメーターとして $\alpha = H/b, \gamma = a/b$ とすると、各軸回りの剛体の慣性2次モーメントは

$$J_x = \frac{(1+\alpha^2)b^2}{12}m, \quad J_y = \frac{(\alpha^2+\gamma^2)b^2}{12}m, \quad J_z = \frac{(1+\gamma^2)b^2}{12}m \quad (2)$$

さらに、 $\omega_x^2=4k_x/m$, $\omega_y^2=4k_y/m$, $\omega_z^2=4k_z/m$ と置き、式(1)をマトリックス記号で書きなおすと

$$M\ddot{q} + Kq = -f \quad (3)$$

ここで、Mは質量マトリックス、Kは剛性マトリックスであり次のようになる

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1+\alpha^2}{12} & & \\ & & & \frac{\alpha^2+\gamma^2}{12} & & \\ & & & & \frac{1+\gamma^2}{12} & \end{pmatrix} \quad \ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ b\ddot{\theta}_x \\ b\ddot{\theta}_y \\ b\ddot{\theta}_z \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ b\theta_x \\ b\theta_y \\ b\theta_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$K = \begin{pmatrix} \omega_x^2 & & & & & -\frac{\alpha}{4}\omega_x^2 \\ & \omega_y^2 & & & & \frac{\alpha}{4}\omega_y^2 \\ & & \omega_z^2 & & & \\ & & & \frac{1}{4}\omega_y^2 & & \frac{1}{4}\{\omega_y^2\alpha^2+\omega_z^2\} \\ -\frac{\alpha}{4}\omega_x^2 & & & & \frac{1}{4}\{\omega_y^2\alpha^2+\omega_z^2\gamma^2\} & \\ & & & & & \frac{1}{4}\{\omega_x^2+\omega_y^2\gamma^2\} \end{pmatrix} \quad f = - \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0+g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

式(3)は、6連2階線形微分方程式である。

3. 固有値及び固有ベクトル

問題を簡単にするためここでは底面を正方形とする。すなわちM、及びKの中で $\gamma=1$ となる。また、水平2方向のばね定数 k_x, k_y が等しいとし、鉛直方向のばね定数 k_z は k_x, k_y と必ずしも等しくないとする。鉛直方向と水平方向の区別を明確にするため、 $\omega_v=\omega_z$, $\omega_H=\omega_x=\omega_y$ と書き改める。

水平方向と鉛直方向のばね剛性比を $\beta^2=k_H/k_v$ とすると、 $\beta=\omega_H/\omega_v$ の関係がある。

式(3)の解を、 $q=Ye^{i\omega t}$ とすると固有値問題となり、固有値は係数行列式が0という条件から決められる。すなわち

$$\begin{aligned}
 & \left| K - \omega^2 M \right| = 0 \\
 & = \begin{vmatrix}
 \omega_H^2 - \omega^2 & & & & -\frac{\alpha}{2}\omega_H^2 \\
 & \omega_V^2 - \omega^2 & & & \frac{\alpha}{2}\omega_H^2 \\
 & & \omega_V^2 - \omega^2 & & \\
 & \frac{\alpha}{2}\omega_H^2 & & \frac{1}{4}(\omega_H^2\alpha + \omega_V^2) - \omega^2 \frac{21+\alpha^2}{12} & \\
 -\frac{\alpha}{2}\omega_H^2 & & & \frac{1}{4}(\omega_H^2\alpha + \omega_V^2) - \omega^2 \frac{21+\alpha^2}{12} & \\
 & & & & \frac{1}{2}(\omega_H^2 - \frac{1}{3}\omega^2)
 \end{vmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

上式を展開すると次のようになる

$$(\omega_V^2 - \omega^2)(\beta^2\omega_V^2 - \frac{1}{3}\omega^2) \left\{ \frac{1+\alpha^2}{12}\omega^4 - \frac{1}{3}(4\alpha^2\beta^2 + \beta^2 + 3)\omega_V^2\omega^2 + \beta^2\omega_V^4 \right\}^2 = 0 \quad (6)$$

上式を ω について解くことにより固有値が次の様に求まる。

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_1^2 &= C_1^2\omega_{ij}^2, \quad \omega_2^2 = C_1^2\omega_{ij}^2, \quad \omega_3^2 = \omega_{ij}^2 \\
 \omega_4^2 &= 3\beta^2\omega_{ij}^2, \quad \omega_5^2 = C_2^2\omega_{ij}^2, \quad \omega_6^2 = C_2^2\omega_{ij}^2
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ω_i は1次の固有円振動数である、ここで

$$\left. \begin{aligned}
 C_1^2 &= \frac{(4\alpha^2\beta^2 + \beta^2 + 3) - \sqrt{16\alpha^4\beta^4 + \beta^4 + 8\alpha^2\beta^4 + 12\alpha^2\beta^2 - 6\beta^2 + 9}}{2(1+\alpha^2)} \\
 C_2^2 &= \frac{(4\alpha^2\beta^2 + \beta^2 + 3) + \sqrt{16\alpha^4\beta^4 + \beta^4 + 8\alpha^2\beta^4 + 12\alpha^2\beta^2 - 6\beta^2 + 9}}{2(1+\alpha^2)}
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上の固有値に対応するモーダルマトリックス $\Psi = (\{\psi_j\})$ は以下のようになる。

$$\Psi = \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & -D_1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & D_1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 -D_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \quad (9-a)$$

$$\text{ここで} \quad D_1 = -\frac{\alpha\beta^2}{2(\beta^2 - C_2^2)}, \quad D_2 = -\frac{2(\beta^2 - C_1^2)}{\alpha\beta^2} \quad (9-b, c)$$

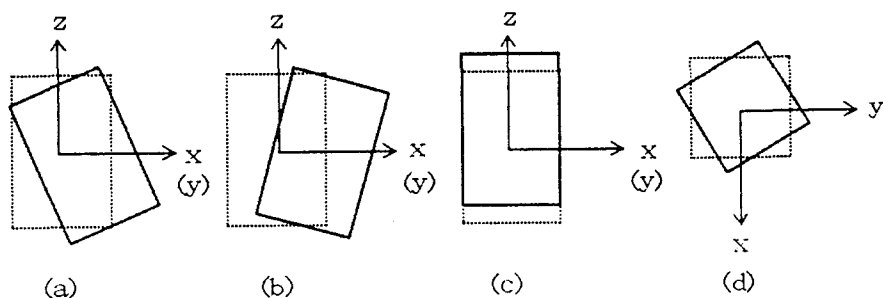


図-2 ばね支持された剛体の固有モード

ω_1, ω_2 はx-z平面上及びy-z平面上の1次モード(図-2(a))のロッキング円振動数、 ω_5, ω_6 はそれぞれx-z平面上及びy-z平面上の2次モード(図-2(b))のロッキング円振動数である。また ω_3 は鉛直方向の変位モード(図-2(c))の円振動数であり、 ω_4 はz軸回りの回転変位モード(図-2(d))の円振動数である。剛体は底面が正方形の直方体であるため、x-z平面及びy-z平面の1次、2次のロッキング円振動数は等しくなっている。固有円振動数が剛体の形状比 α や、水平、鉛直ばね定数比 β^2 によりどの様に変化するかを調べるため、図-3には α の値をパラメータとし固有円振動数比 ω_i/ω_0 ($i=1,2,\sim,6$)と水平、鉛直ばね剛性比の平方根 β の関係を、また図-4には β の値をパラメータとし ω_i/ω_0 と α の関係を示した。

式(8)及び図-3より次のことが言える。

- ① ω_1, ω_2 (1次ロッキングモードの円振動数)は、 β が0の時には0となり、 β が増加すると ω_i/ω_0 ($i=1,2$)は大きくなる。
- ② ω_5, ω_6 (2次ロッキングモードの円振動数)については、 β が増加する時 ω_i/ω_0 ($i=5,6$)

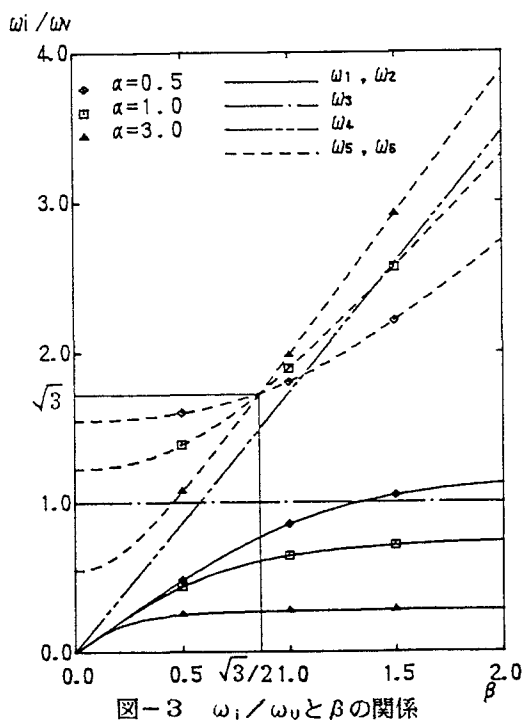


図-3 ω_i/ω_0 と β の関係

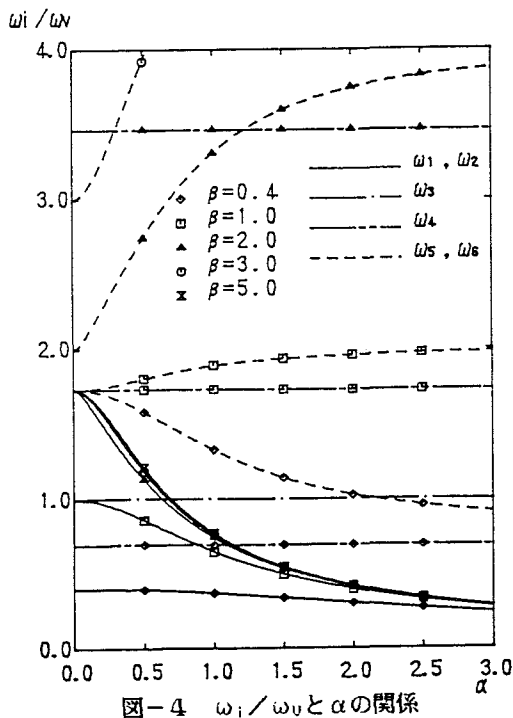


図-4 ω_i/ω_0 と α の関係

は大きくなる。 $\beta=\sqrt{3}/2$ で α の値のいかにかわらず、 $\omega_i/\omega_0=\sqrt{3}$ ($i=5,6$) となる。

③ ω_4 (2軸まわりの回転モードの円振動数) は β に比例して増加する。

また、式(8) 及び図-4より次のことが言える。

④ ω_i/ω_0 ($i=1,2$) は $\alpha=0$ で、 $\beta \geq \sqrt{3}$ の時は $\sqrt{3}$ となり、 $\beta < \sqrt{3}$ の時 β の減少とともに、 ω_i/ω_0 ($i=1,2$) は小さくなる。

⑤ ω_i/ω_0 ($i=1,2$) は、 α が増加する時減少し、 β の違いによる ω_i/ω_0 ($i=1,2$) の差は小さくなる。

⑥ ω_i/ω_0 ($i=5,6$) は、 $\alpha=0$ で $\beta \leq \sqrt{3}$ の時は 3 となり、 $\beta > \sqrt{3}$ の時 β の増加とともに、 ω_i/ω_0 ($i=5,6$) は大きくなる。

⑦ ω_i/ω_0 ($i=5,6$) は、 α が大きくなると $\beta < \sqrt{3}/2$ の時単調減少し、 $\beta=\sqrt{3}/2$ の時 3 となり、 $\beta > \sqrt{3}/2$ の時単調増大する。

4. 運動方程式の定常解

外力の加速度を、 $A \sin \theta t$ として図-5に示す方向で剛体に加えたとすると、式(3)における外力ベクトル $\mathbf{f}$ は

$$\mathbf{f} = -(A \sin \theta t \cos \phi \sin \rho, A \sin \theta t \sin \phi \cos \rho, A \sin \theta t \cos \rho - g, 0, 0)^T \quad (10)$$

式(3)の一般解は、3章の固有ベクトルを用いて

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^6 \mathbf{x}_j p_j(t) \quad (11)$$

と書くことができる。ここで p_j は j 次の基準座標である。

式(3)は非減衰運動方程式であるが、構造物は常に程度の差はあれ減衰機構が存在している。減衰機構として比例減衰を考えると、式(11)を式(3)に代入し左より $\mathbf{x}_j^T$ を掛けると、

$$\ddot{p}_j + 2h_j \omega_j \dot{p}_j + \omega_j^2 p_j = \frac{1}{M_j} \mathbf{x}_j^T \mathbf{f} \quad (12)$$

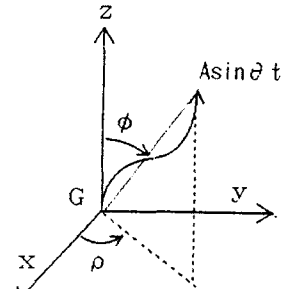


図-5 調和外力の入力方向

ここで M_j は j 次の換算質量であり

$$M_j = \mathbf{x}_j^T \mathbf{M} \mathbf{x}_j \quad (13)$$

で与えられる。また h_j は j 次のモードの減衰定数であるが、今回は各次の減衰はすべて同じであるとして、 $h_j=h$ として計算を行う。

然るに(12)式の定常解 p_j は

$$p_j = a_j \cos \theta t + b_j \sin \theta t + c_j \quad (14)$$

ここで

$$a_j = \frac{2h \omega_j \theta A \{ \cos \phi \sin \rho y_{1j} + \sin \phi \sin \rho y_{2j} + \cos \rho y_{3j} \}}{M_j \{ (\omega_j^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 \omega_j^2 \theta^2 \}} \quad (15-a)$$

$$b_j = \frac{-A(\omega_j^2 - \theta^2) \{\cos \phi \sin \rho y_{1j} + \sin \phi \sin \rho y_{2j} + \cos \rho y_{3j}\}}{M_j \{(\omega_j^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 \omega_j^2 \theta^2\}} \quad (15-b)$$

$$c_j = -\frac{y_{3j} g}{M_j \omega_j} \quad (15-c)$$

j=1~6 の各々について a_j, b_j, c_j はつぎのようになる

$$j=1 \quad a_1 = \frac{2hC_1 \omega_v \theta A \cos \phi \sin \rho}{M_1 \{(\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_1^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad b_1 = \frac{-A(C_1^2 \omega_v^2 - \theta^2) \cos \phi \sin \rho}{M_1 \{(\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_1^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad c_1 = 0 \quad (16)$$

$$j=2 \quad a_2 = \frac{2hC_1 \omega_v \theta A \sin \phi \sin \rho}{M_2 \{(\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_1^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad b_2 = \frac{-A(C_1^2 \omega_v^2 - \theta^2) \sin \phi \sin \rho}{M_2 \{(\omega_1^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_1^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad c_2 = 0 \quad (17)$$

$$j=3 \quad a_3 = \frac{2h \omega_v \theta A \cos \rho}{M_3 \{(\omega_v^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad b_3 = \frac{-A(\omega_v^2 - \theta^2) \cos \rho}{M_3 \{(\omega_v^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad c_3 = \frac{-g}{\omega_v^2 M_3} \quad (18)$$

$$j=4 \quad a_4 = b_4 = c_4 = 0 \quad (19)$$

$$j=5 \quad a_5 = \frac{-2hC_2 \omega_v \theta A D_1 \cos \phi \sin \rho}{M_5 \{(\omega_2^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_2^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad b_5 = \frac{A(C_2^2 \omega_v^2 - \theta^2) D_1 \cos \phi \sin \rho}{M_5 \{(\omega_2^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_2^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad c_5 = 0 \quad (20)$$

$$j=6 \quad a_6 = \frac{-2hC_2 \omega_v \theta A D_1 \sin \phi \sin \rho}{M_6 \{(\omega_2^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_2^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad b_6 = \frac{A(C_2^2 \omega_v^2 - \theta^2) D_1 \sin \phi \sin \rho}{M_6 \{(\omega_2^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_2^2 \omega_v^2 \theta^2\}}, \quad c_6 = 0 \quad (21)$$

但し、 M_j ($j=1\sim6$) は

$$M_1 = M_2 = 1 + \frac{1 + \alpha^2}{12} D_2^2 \quad (22-a)$$

$$M_3 = 0, \quad M_4 = \frac{1}{6} \quad (22-b, c)$$

$$M_5 = M_6 = D_1^2 + \frac{1 + \alpha^2}{12} \quad (22-d)$$

である。

5. 浮き上がり領域

2章で述べたように、ばねが自然長の状態で剛体と接触した時の剛体重心を座標原点としているため、初期状態では剛体は $mg/4k_z$ だけ沈下している。ゆえに剛体底辺端部の z 軸方向の変位が0以上となった場合、その底辺端部が浮き上がっていることになる。言いかえれば、鉛直方向のばねは、ばねの自然長よりのびることなく、浮き上がりが生じなければ常に剛体により圧縮されている。

さて、今回の図-5に示した入力方向においては、剛体底面4頂点の中で点4が始めに浮き上がる。よって、点4に着目して浮き上がりの発生限界を考える。

点4における z 軸方向の変位を V とすると $V \geq 0$ の時浮き上がりが生じる。よって浮き上がりの発生条件は

$$V = Z + \frac{1}{2}b\theta_y - \frac{1}{2}b\theta_x \geq 0 \quad (23)$$

である。

式(11)及び式(14)を式(23)に代入し整理すると

$$V = \zeta_1 \cos \theta t + \zeta_2 \sin \theta t + \zeta_3 = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \cos(\theta t - \tau) + \zeta_3 \quad (24)$$

但し $\tan \tau = \zeta_2 / \zeta_1$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= h\omega_v \theta A \left\{ \frac{-C_1 D_2 \sin \rho (\cos \phi + \sin \phi)}{M_1 \{ (C_1^2 \omega_v^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_1^2 \omega_v^2 \theta^2 \}} + \frac{2 \cos \rho}{M_3 \{ (\omega_v^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 \omega_v^2 \theta^2 \}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-C_2 D_1 \sin \rho (\cos \phi + \sin \phi)}{M_5 \{ (C_2^2 \omega_v^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_2^2 \omega_v^2 \theta^2 \}} \right\} \\ \zeta_2 &= \frac{A}{2} \left\{ \frac{(C_1^2 \omega_v^2 - \theta^2) D_2 \sin \rho (\cos \phi + \sin \phi)}{M_1 \{ (C_1^2 \omega_v^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_1^2 \omega_v^2 \theta^2 \}} - \frac{2(\omega_v^2 - \theta^2) \cos \rho}{M_3 \{ (\omega_v^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 \omega_v^2 \theta^2 \}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(C_2^2 \omega_v^2 - \theta^2) D_1 \sin \rho (\cos \phi + \sin \phi)}{M_5 \{ (C_2^2 \omega_v^2 - \theta^2)^2 + 4h^2 C_2^2 \omega_v^2 \theta^2 \}} \right\} \\ \zeta_3 &= -\frac{g}{\omega_v^2 M_3} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここでは定常状態においての浮き上がりを考えているので、Vの最大値 $V_{\max}$ に着目すれば良い、式(24)で $\cos(\theta t - \tau)$ が最大の時Vは $V_{\max}$ となるので、浮き上がりが発生する条件は

$$V_{\max} = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3} \geq 0 \quad (26)$$

である。

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ を式(26)に代入し、第1次固有円振動数 ω_1 と外力の固有円振動数 θ との比 (θ/ω_1) を用いて整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{A}{g} \left[\frac{\sin^2 \rho}{4} (\cos \phi + \sin \phi)^2 \left\{ \frac{D_2^2}{M_1^2 \left[\left\{ \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\}^2 \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1^4 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right]} \right. \right. \\ & \quad + \frac{D_1^2}{M_5^2 \left[\left\{ \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\}^2 \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1^2 C_2^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right]} + \\ & \quad \left. \left. \frac{2 \left[\left\{ \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\} \left\{ \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\} \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1^3 C_2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right] D_2 D_1}{M_1^2 M_5^2 \left[\left\{ \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\} \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1^4 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[\left\{ \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\} \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1^2 C_2^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right]} \right\} \right. \\ & \quad - \frac{\cos \rho}{\left[\left\{ \left(\frac{1}{C_1} \right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\}^2 \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right]} \left\{ \frac{\left[\left\{ \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\} \left\{ \left(\frac{1}{C_1} \right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\} \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right] D_2}{M_1^2 \left[\left\{ \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\}^2 \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1^4 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right]} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\left[\left\{ \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\} \left\{ \left(\frac{1}{C_1} \right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\} \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1 C_2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right] D_1}{M_5^2 \left[\left\{ \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^{-2} - 1 \right\}^2 \left(C_1 \frac{\theta}{\omega_1} \right)^4 + 4h^2 C_1^2 C_2^2 \left(\frac{\theta}{\omega_1} \right)^2 \right]} \right\} \sin \rho (\cos \phi + \sin \phi) - \cos \rho \right] \geq 1 \quad (27) \end{aligned}$$

となる。

式(27)は複雑でその様相が判りにくい。浮き上がり領域を A/g と θ/ω_1 で整理すると、この関係に影響を与えるパラメーターは剛体に関するパラメーター、 α, β 入力方向に関するパラメーター、 ϕ, ρ 及び系の減衰定数 h である。

図-6は減衰定数 h の影響を見るため、入力方向はx軸方向($\phi=0^\circ, \rho=90^\circ$), $\alpha=1.0, \beta=0.707$, と固定し $h=0.0, 0.02, 0.05, 0.10, 0.20$ と変化させた結果である。一般に地震力では重力加速度より大きい入力を考える必要はないので A/g の最大値を1としている。図-6の左側の曲線群上側がロッキングの1次モードが卓越する浮き上がりを意味している。同様に右側の曲線群の上側がロッキング2次モードが卓越

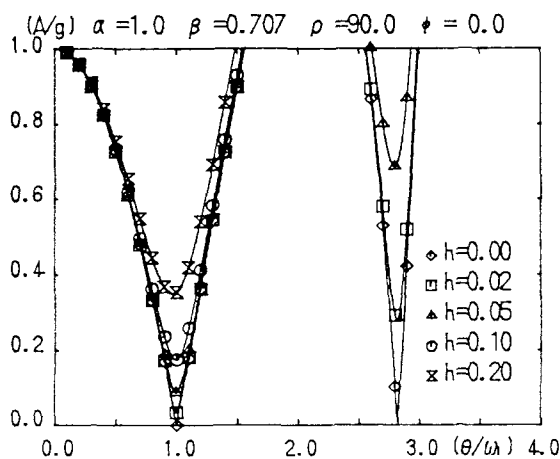


図-6 減衰定数 h が浮き上がりに及ぼす影響

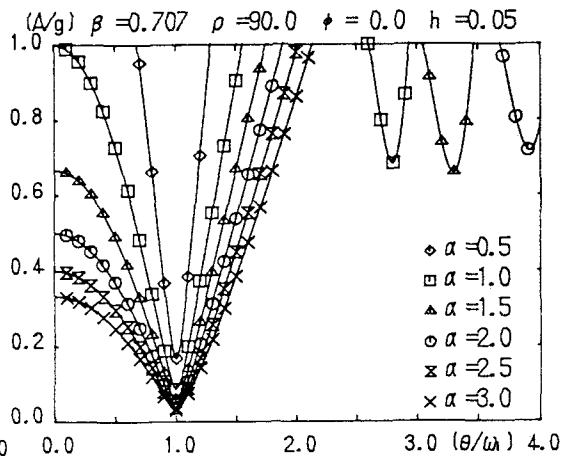


図-7 剛体の形状比 α が浮き上がりに及ぼす影響

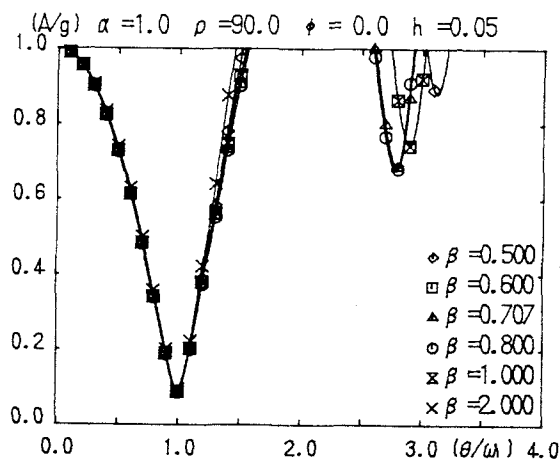


図-8 水平鉛直ばね剛性の平方根 β が

浮き上がりに及ぼす影響

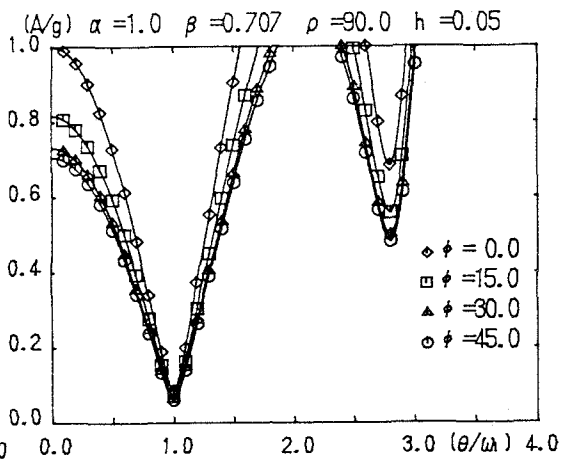


図-9 入力方向 ϕ が浮き上がりに及ぼす影響

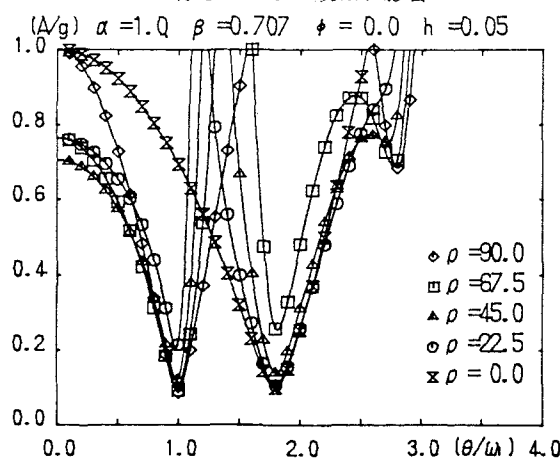


図-10 入力方向 ρ が浮き上がりに及ぼす影響

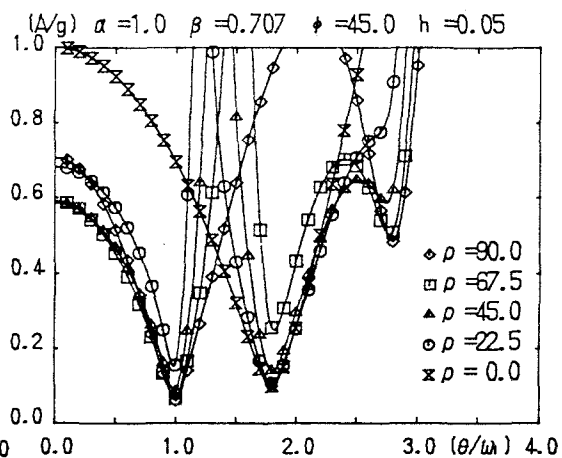


図-11 入力方向 $\phi=45$ の時 ρ が

浮き上がりに及ぼす影響

した浮き上がりを意味している。図より2次モード卓越による浮き上がりが生じる最小の A/g は、1次モード卓越の場合と比べ h が大きくなると急激に増加していることが判る。ロッキングの1次固有円振動数の近傍では、2次モードの影響は非常に小さいが、ロッキングの2次固有円振動数の近傍では1次モードの影響も比較的大きく、かつ1次モードと2次モードに位相差があるためである。

図-7は入力方向 $\phi=0^\circ, \rho=90^\circ$ 、減衰定数 $h=0.05$ $\beta=0.707$ として $\alpha=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ と変えた時の A/g と θ/ω_1 の関係を示している。曲線の上側が浮き上がり領域である。1次のロッキングモードの近傍では、 α が大きくなるほど即ち底辺に比べて高さが高くなるほど、浮き上がり領域が広がっている。2次のロッキングモードによる浮き上がりは、図では $\alpha=1.5$ の時最も小さい A/g で生じ、 α が増加しても浮き上がり難くなっていることがわかる。

図-8は β の浮き上がりに対する影響を示したものである。曲線群の上側が浮き上がり領域である。この図は、 $\phi=0.0^\circ, \rho=90.0^\circ, \alpha=1.0, h=0.05$ としている。そして β は $0.5, 0.6, 0.707, 0.8, 1.0, 2.0$ と変えている。 $\beta=0.707$ は水平ばね剛性が鉛直ばね剛性の1/2の時であり、 $\beta=1.0$ は水平ばね剛性と鉛直ばね剛性が等しい場合である。この図より、1次ロッキングモード周辺では浮き上がり領域はほとんど変化していない。2次モードによる浮き上がりが生じる最小の A/g は $\beta=0.8$ の時である。

図-9は、 $\alpha=1.0, \beta=0.707, \rho=90.0^\circ, h=0.05$ で入力方向が x - y 平面（水平面）上で方向 ϕ が変化する時の浮き上がり領域を示したものであり、曲線の上側がその浮き上がり領域である。図は、1次のロッキングモードと2次のロッキングモードで浮き上がることを示しており、 $\phi=0^\circ$ で浮き上がり領域が小さく、 $\phi=45^\circ$ で最も大きくなっている。

図-10は入力方向が x - z 平面にある場合で入力の鉛直成分が浮き上がりにどの様に影響するかを示している。1次、2次ロッキングモードに加え z 軸方向の振動モードによる浮き上がり領域が広がっていることがわかる。しかし、 $\rho=0^\circ$ 方向（ z 軸方向）ではロッキングモードは現われず、鉛直方向の振動モードだけが存在している。 x - y 平面上の入力方向の変化と異なり、鉛直成分の入力がある場合は、急速に鉛直方向振動モードによる浮き上がり領域が広がり、2次ロッキングモードによる浮き上がり領域は小さくなっている。

図-11には $\alpha=1.0, \beta=0.707, h=0.05$ が $\phi=45^\circ$ の時浮き上がりに及ぼす ρ の影響を示したものである。図-10の $\phi=0^\circ$ の場合を大きな変化はないが、全般にわたり浮き上がり領域が広がっている。これは、図-9の水平方向の入力角を変えた場合と同様の傾向がある。

6. おわりに

剛体（直方体）の底面4個の頂点で鉛直、水平方向にばね支持されたモデルの調和外力作用による定常状態の振動特性を、浮き上がり現象の観点から考察した。今回の理論的検討であきらかにされたことをまとめると以下ようになる。

- 1) 減衰定数 h の影響 — h が大きくなると当然浮き上がり難くなってくる。特に2次ロッキングモード卓越による浮き上がりに必要な最小の加速度が大きくなる。
- 2) 形状比 α の影響 — 1次ロッキングモードによる浮き上がり領域は細長くなるほど広がる、即ち浮き上がり安くなるが、2次ロッキングモードによる浮き上がりは、 α が大きくなると生じ難くなっている。
- 3) 水平、鉛直ばね剛性比の平方根 β の影響 — 1次ロッキングモードによる浮き上がり領域はほとんど変化しない、図-8では $\beta=0.8$ で浮き上がりに必要な入力加速度は最小となっている。詳細な計算をすると、 $\beta=0.7746$ の時 $A/g = 0.6768$ と最小になっている。
- 4) 水平方向の入力方向 ϕ の影響 — $\phi=0^\circ$ (x 軸方向) で浮き上がり難く、 $\phi=45^\circ$ で浮き上がり易くなっている。この傾向は1次、2次ロッキングモードで同じである。鉛直方向変位モードによる浮き上がりは存在しない。

5)鉛直平面上の入力方向 ρ の影響 — 鉛直方向加振では1次、2次ロッキングモードによる浮き上がり領域は存在しない。水平方向加振では鉛直方向変位モードによる浮き上がり領域は存在しない、しかし外力に鉛直方向成分がわずかでも存在すると急速に鉛直変位モードが卓越する浮き上がり領域が広がってくる。

謝辞

本論文の作成、作図にあたり東京電機大学建設工学科卒研究生 前島正之君から多くの手助けを得た、また本研究遂行にあたり、東京電機大学総合研究所から一部補助を受けた。ここに記し、深く感謝します。

参考文献

- 1) Meek, J.W. : Effects of Foundation Tipping on Dynamic Response, J. of Structural Engineering, ASCE Vol.101, No.ST7, July 1975, pp.1297-1311.
- 2) Yim, C.-S., Chopra, A.K. and Penzeien, J. : Rocking Response of Rigid Blocks to Earthquakes, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.8, 1980, pp.565-587.
- 3) Aslam, M., Godden, W.G. and Scalise, D.T. : Earthquake Rocking Response of Rigid Bodies, J. of Structural Engineering, ASCE Vol.106, No.ST2, Feb. 1980, pp.377-392
- 4) Ishiyama, Y. : Criteria for Overturning of Bodies by Earthquake Excitations, Transactions of A.I.J., No.317, July 1982, pp.1-12.
- 5) Spanos, P.D. and Koh, A-S : Rocking of Rigid Bodies Due to Harmonic Shaking, J. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.110, Nov 1984, pp.1627-1642.
- 6) Psycharis, I.N. and Jennings, P.C. : Rocking of Slender Rigid Bodies Allowed to Uplift, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.11, 1983, pp.57-76.
- 7) 山田 政明、河村 壮一 : 正弦波多軸入力による剛体基礎の浮き上がり性状に関する研究、日本建築学会論文報告集、第340号昭和59年、pp.33-39
- 8) Spanos, P.D and Koh, A.S : Analysis of Block Random Rocking, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.5, No3, 1986, pp.178-183.
- 9) Koh, A-S., Spanos, P.D and Roesset, J.M. : Harmonic Rocking of Rigid Block on Flexible Foundation, J. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.112, No.11, Nov. 1986, pp.1165-1180.
- 10) Yim, C.-S. and Chopra, A.K. : Dynamics of Structures on Two-Spring Foundation Allowed to Uplift, J. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.110, NO.7, July 1984, pp.1124-1146.
- 11) Yim, C.-S. and Chopra, A.K. : Earthquake Response of Structures with Partial Uplift on Winkler Foundation, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.12, 1984, pp.263-281
- 12) Yim, C.-S. and Chopra, A.K. : Simplified Earthquake Analysis of Multistory Structures with Foundation Uplift, J. of Structural Engineering, ASCE, Vol.111, No.12, Dec 1985, pp.2708-2731
- 13) 土岐 憲三、佐藤 忠信、三浦 房紀 : 強震時における地震と構造物の剝離と滑動、土木学会論文報告集、第302号、1980年10月、pp.31-41.
- 14) 渡辺 啓行、栃木 均 : 滑り剝離を伴う基礎・地盤の動的相互作用と数値シュミレーション、土木学会論文報告集第368号/I-5、1986年4月、pp.319-327.
- 15) 下村 幸夫、田治見 宏 : 正弦加力を受ける基礎の浮き上がりと地下逸散減衰の関係について— 半無限弾性地盤上の基礎の浮き上がりを伴う動的挙動 その1 —、日本建築学会構造系論文報告集第369号、昭和61年11月、pp.87-101.

(1987年10月16日)