

非線形フォークト層体のせん断振動応答

SHEAR RESPONSE VIBRATION OF NON-LINEAR VOIGT LAYER

木田 哲量* 能町 純雄** 阿部 忠*** 澤野 利章****

By Tetsukazu KIDA, Sumio G. NOMACHI, Tadashi ABE, and Toshiaki SAWANO

In order to analyze spring softening phenomena of a layer rested on a hard base under horizontal harmonic vibration, mechanical property of the layer is modeled by non-linear voigt body in which non-linear spring element related with stress by the 1st and 3rd polynomials of strain, acts parallel to damping given by the 1st and 3rd polynomials of strain velocity. Thus assumed constitutive relation turns the stress wave equation into a response acceleration equation, from which we figure out the spring softening characteristics of this kind of the structure. The results are compared with the test measurements by Irobe and Kagawa with favourable agreement.

1. 序 論

水平振動に対する地盤の動的応答特性の把握は上部建造物の耐震性を検討する場合に重要である。そこで、応力とひずみの関係が非線形関係にある粒状物質により構成された層状構造体におけるバネ軟化現象の理論解析を試みる。

この層状構造体が一定加速度の一方方向水平振動を受けた場合、その加速度強度が大きくなるにつれて、応答加速度の共振点位置が低周波帯に移動する現象、いわゆるバネ軟化の現象が現れることは良く知られている。

色部は「砂のせん断振動実験」¹⁾において、ゴムスリーブの中に砂を層状に詰めた供試体に水平調和加振力を入力させた底面振動板表面と供試体頂面における応答加速度を計測して、バネ軟化現象を示すことを明らかにしている。(図-1, 図-2) また、香川による「地盤モデルとしての砂層の振動性状実験」²⁾では、大型振動台上に鋼製直方箱を設置して、この中に砂を層状に詰めた供試体に水平調和加振力を入力させ、加振方向の応答加速度の測定結果より入力加速度と応答加速度との増幅率(図-3)を報告している。

*	工 修	日本大学助教授	生産工学部土木工学科	(〒275	習志野市泉町1丁目2番1号)
**	工 博	日本大学教授	生産工学部土木工学科	(〒275	習志野市泉町1丁目2番1号)
***		日本大学専任講師	生産工学部土木工学科	(〒275	習志野市泉町1丁目2番1号)
****	工 修	日本大学副手	生産工学部土木工学科	(〒275	習志野市泉町1丁目2番1号)

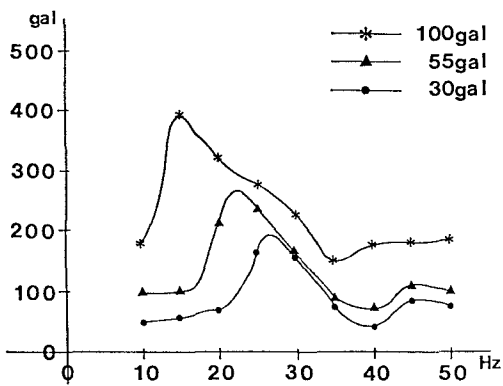


図-1 色部の実験による応答加速度¹⁾
(供試体高 14.27cm, 密度 1.81g/cm³)

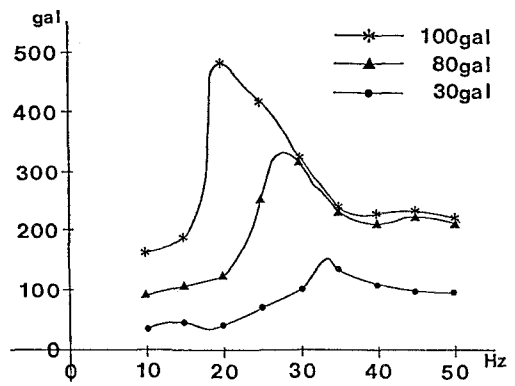


図-2 色部の実験による応答加速度¹⁾
(供試体高 9.70cm, 密度 1.79g/cm³)

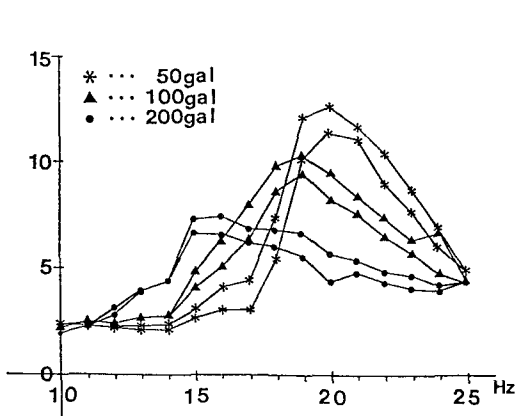


図-3 香川の実験による加速度増幅率²⁾

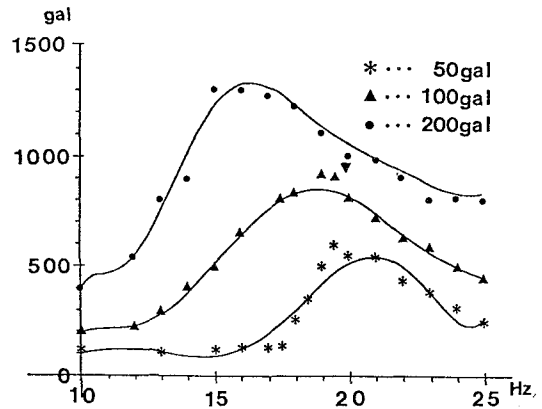


図-4 周波数と応答加速度

この結果を引用して、周波数と応答加速度の関係を代数多項式を用いた最小二乗法により計算したものが図-4である。これも明らかにバネ軟化現象を呈している。

本解析では、層状構造体を非線形フォークト体すなわち、非線形バネとひずみ速度に比例する減衰ダッシュポットからなるフォークト体(=非線形フォークト体Ⅰ；図-5)と非線形バネとひずみ速度の3次式に比例する減衰ダッシュポットからなるフォークト体(=非線形フォークト体Ⅱ；図-6)の2つのモデルについて応答計算を行うものとする。

2. 復元応力

応力がひずみの奇関数であると仮定し、そのマクローリン展開の第2項までを考慮して式(1)のように置くこととする。これはダフティング形振動のバネと一致している。

$$\tau' = G \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3\gamma_1^2} \right) \quad (1)$$

ここで、 G ; 層体のせん断弾性係数、

γ_1 ; $\partial \tau' / \partial \gamma = 0$ となる時の

最大ひずみ値

上式は、構造体の初期応力は弾性力であると考えられるが、ひずみがある範囲を越えると復元応力が減少するという特性を持たせたものである。

a) フォークト体Ⅰの復元応力

この場合の復元応力は、式(1)のダフティング形応力と粘性抵抗の和とした、次式で表すことができる。

$$\tau = G \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3\gamma_1^2} \right) + G' \dot{\gamma} \quad (2)$$

ここで、 G' : 粘性係数

b) フォークト体Ⅱの復元応力

この場合の復元応力は、式(1)のダフティング形応力にひずみ速度の3次粘性抵抗の項を加えた、次式で表すことができる。

$$\tau = G \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3\gamma_1^2} \right) + G' (\dot{\gamma} + B \dot{\gamma}^3) \quad (3)$$

ここで、 B ; 層体の非線形減衰定数

3. 運動方程式

底面が固定された層状構造体の下面に一方調和水平振動が入力された場合を考える。(図-7)

この構造系における運動方程式は次式で表すことができる。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} dx = \rho (\ddot{u} + p) dx \quad (4)$$

ここで、 τ ; せん断応力、

x ; 底面からの高さ、

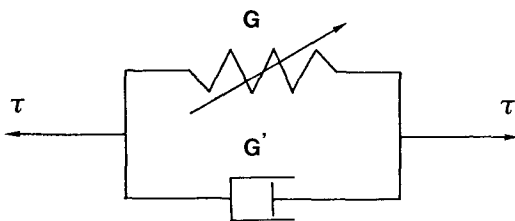


図-5 非線形フォークト体Ⅰ

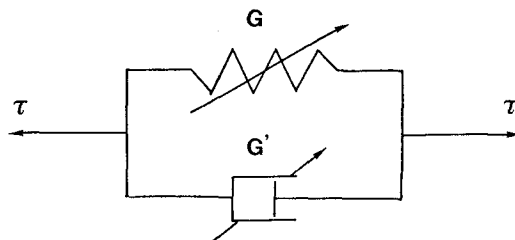


図-6 非線形フォークト体Ⅱ

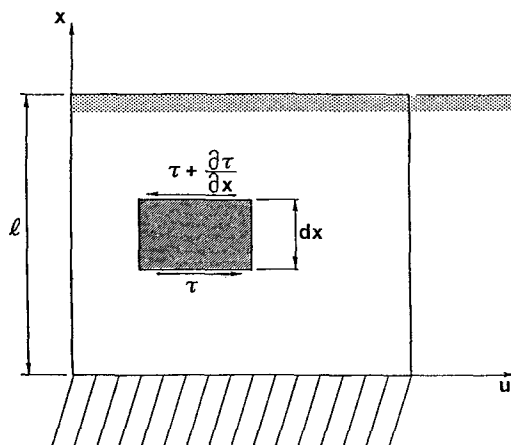


図-7 層状構造体

ρ ; 粒状物質の密度,

$\ddot{u}$; 構造体の加速度

p ; 強制水平力の加速度

つきに、層状構造体の強制振動力によって生ずる変位 u を底面からの距離 x の関数として式 (5) で表す。

$$u = U \sin \frac{\pi}{2\ell} x \quad (5)$$

ここで、 U ; 頂面 ($x = \ell$) における変位 (最大変位),

ℓ ; 層状体の高さ

なお、式 (5) は変位の 1 次モードのみであるが、2 次モードまで考慮した場合と比較検討も併せて行うこととする。

底面のひずみ r_0 ($x = 0$ におけるもの) は式 (6) で表される。

$$r_0 = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\pi}{2\ell} U \quad (6)$$

また、ひずみ r は x の関数として式 (5), (6) の関係より、式 (7) で表される。

$$r = \frac{\partial u}{\partial x} = r_0 \cos \frac{\pi}{2\ell} x \quad (7)$$

したがって、式 (4) を $x = 0$ から $x = \ell$ まで積分して、 $x = 0$ の所のせん断応力 τ_0 、すなわち底面のせん断応力を求める。

$$-\tau_0 = \rho \left(\frac{2\ell}{\pi} \right)^2 \ddot{\gamma}_0 + \rho p \ell \quad (8)$$

4. 応答ひずみ

a) 非線形フォークト体 I の応答ひずみ

このモデルの応答ひずみは式 (2) と式 (8) より求めることができる。なお、式 (7) において、 $x = 0$ とすることにより底面ひずみ r_0 を得ることができる。この r_0 を式 (2) に代入して得られる底面せん断応力 τ_0 と式 (8) とから式 (9) を得る。

$$G \left(r_0 - \frac{r_0^3}{3 r_1^2} \right) + G' \dot{r}_0 = -\rho \left(\frac{2\ell}{\pi} \right)^2 \ddot{\gamma}_0 - \rho p \ell \quad (9)$$

つきに、底面のひずみ r_0 を時間 t の調和関数として式 (10) のように仮定する。また、強制水平力も調和振動外力として式 (11) で表すこととする。

$$r_0 = \bar{r}_0 \sin \omega t \quad (10), \quad p = \bar{P} \sin (\omega t + \alpha) \quad (11)$$

ここで、 ω ; 周波数, $\bar{P}$; 入力加速度の最大値, α ; 位相差

したがって、 r_0^3 、 $\dot{r}_0$ および $\ddot{\gamma}_0^2$ はそれぞれ次のように展開される。なお、この時に現れる高周波成分は本解析においては省略することが可能である。^{3), 4), 5), 6)}

$$r_0^3 = \frac{3 \bar{r}_0^3}{4} \sin \omega t \quad (12), \quad \dot{r}_0 = \bar{r}_0 \omega \cos \omega t \quad (13)$$

$$\ddot{\gamma}_0^2 = -\bar{\gamma}_0^2 \omega^2 \sin \omega t \quad (14)$$

これらの関係を式(9)に適用するならば、静的最大ひずみ r_1 と底面応答ひずみ $\bar{r}_0$ との比である η と無次元周波数 ξ との関係を求める式(15)が得られる。

$$\eta^2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \eta^2 - \xi^2 \right)^2 + 4 h^2 \xi^2 \right\} = P^2 \quad (15)$$

ここで、

$$\eta = \frac{\bar{r}_0}{r_1}, \quad 2 h \xi = \frac{G' \omega}{G}, \quad \xi^2 = \frac{\rho}{G} \left(\frac{2\ell}{\pi} \right)^2 \omega^2, \quad P = \frac{\rho \ell \bar{P}}{G r_1}$$

b) 非線形フォークト体Ⅱの応答ひずみ

このモデルのせん断応力は式(3)で表されている。したがって、式(3)に式(8)を代入して、次式を得る。

$$G \left(r_0 - \frac{r_0^3}{3 r_1^2} \right) + G' \left(\dot{r}_0 + B \dot{r}_0^3 \right) = -\rho \left(\frac{2\ell}{\pi} \right)^2 \ddot{r}_0 - \rho p \ell \quad (16)$$

つぎに、式(13)を用いて $\dot{r}_0^3$ を次式のように展開する。この場合も高周波成分は省略することとする。

$$\dot{r}_0^3 = \frac{3 \bar{r}_0^3}{4} \omega^3 \cos \omega t \quad (17)$$

よって、式(16)に式(10)、(11)、(12)、(13)、(14)および式(17)を代入すると、 ξ と η の関係を与える式が得られる。

$$\eta^2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \eta^2 - \xi^2 \right)^2 + 4 h^2 \xi^2 (1 + \mu \xi^2 \eta^2)^2 \right\} = P^2 \quad (18)$$

ここで、

$$\mu \xi^2 = \omega^2 r_1^2 \frac{3 B}{4}$$

5. 表面応答加速度

層状構造体の表面加速度 a は応答変位による加速度 $\ddot{u}$ と入力加速度 p の和で与えられる。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} \bigg|_{x=\ell} = \rho (\ddot{u} + p) \bigg|_{x=\ell} = \rho |a| \quad (19)$$

また、フォークト体Ⅰのひずみ r とせん断応力 τ との関係は、式(2)に表されているので、これより表面における $\rho |a|$ を式(20)として得る。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} \bigg|_{x=\ell} = G \frac{\partial r}{\partial x} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right) + G' \frac{\partial \dot{r}}{\partial x} \quad (20)$$

同様に、式(3)からフォークト体Ⅱにおける $\rho |a|$ を式(21)として得ることができる。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} \bigg|_{x=\ell} = G \frac{\partial r}{\partial x} \left(1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right) + G' \frac{\partial \dot{r}}{\partial x} (1 + 3 B \dot{r}) \quad (21)$$

これら式(20)、(21)は式(22)に示すような同一の式となる。

$$\rho |a| = - \frac{\pi}{2\ell} G r_0 - \frac{\pi}{2\ell} G' \dot{r}_0 \quad (22)$$

ここで、式(10)、(13)の関係を代入すると、式(22)は次式のように表わされる。

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial x} \right|_{x=\ell} = \rho |a|$$

$$= -\frac{\pi}{2\ell} (G \bar{\gamma}_0 \sin \omega t + \omega G' \bar{\gamma}_0 \cos \omega t) \quad (23)$$

したがって、両フォークト体の表面応答加速度 Λ は式 (24) で表される。

$$A = \frac{|a|}{|\bar{p}|} \quad p = \frac{\pi}{2} \eta (1 + 4h^2 \xi^2)^{1/2} \quad (24)$$

6. 結 論

層状構造体の表面の変位 u を式 (5) と仮定して求めた応答ひずみと 2 次モードまでも考慮して仮定を行い求めた応答ひずみの比較を行うこととする。式 (15) で用いられる h , P をパラメータとして、1 次モードと 2 次モードの応答ひずみの差と 1 次モードの値の割合を表-1 ($h = 0.05$ の場合)、表-2 ($h = 0.10$ の場合) に示した。この結果からして、パネ軟化現象が生ずるパラメータ P が小さい場合には、1 次モードのみの仮定で影響はないものと考えられる。

表-1 1 次モードの検証

$h = 0.05$ の場合	
P	差
0.05	0.0%
0.10	0.4%
0.15	1.1%
0.20	2.1%

表-2 1 次モードの検証

$h = 0.10$ の場合	
P	差
0.05	0.0%
0.10	0.1%
0.15	1.0%
0.20	1.6%

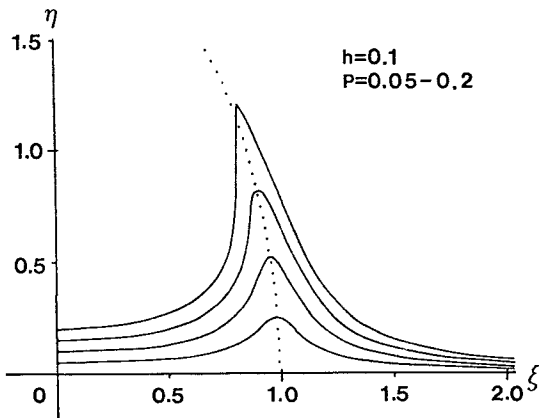


図-8 非線形フォークト体 I
周波数と応答ひずみ

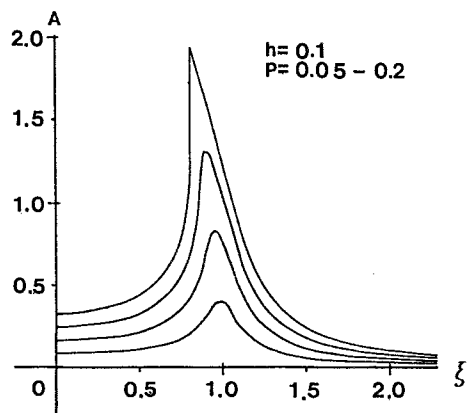


図-9 非線形フォークト体 I
周波数と表面応答加速度

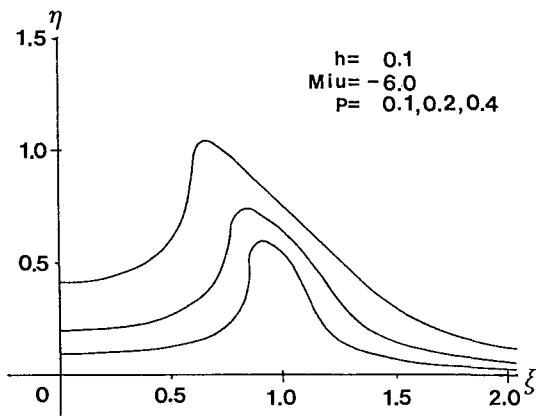


図-10 非線形フォークト体Ⅱ
周波数と応答ひずみ (その1)

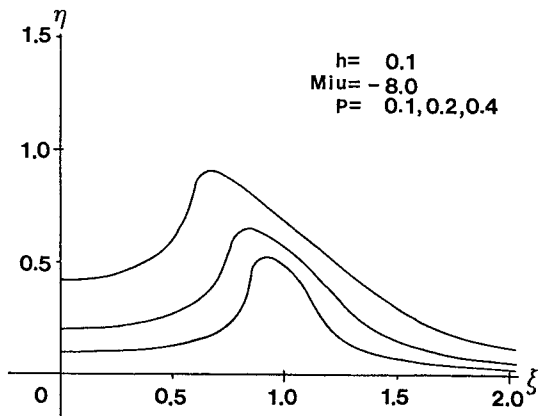


図-11 非線形フォークト体Ⅱ
周波数と応答ひずみ (その2)

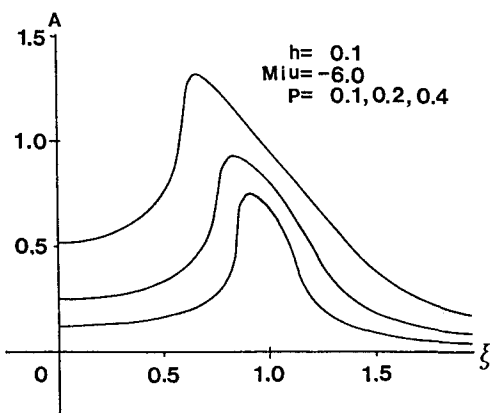


図-12 非線形フォークト体Ⅱ
周波数と表面応答加速度 (その1)

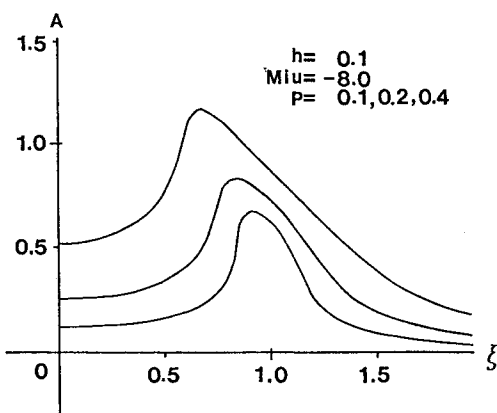


図-13 非線形フォークト体Ⅱ
周波数と表面応答加速度 (その2)

非線形フォークト体Ⅰの応答ひずみは、式(15)におけるより h 、 P をパラメーターとして ξ と η の関係を図-8に表した。また、表面応答加速度を求める式(24)に式(15)の ξ 、 η の関係を代入して、 A と ξ の関係を図-9に表した。

非線形フォークト体Ⅱの応答ひずみは、式(18)における h 、 $\mu = Miu$ 、 P をパラメーターとした ξ と η の関係を図-10 ($\mu = -6$ の場合)、図-11 ($\mu = -8$ の場合) に表した。さらに、表面応答加速度は式(24)に式(18)の ξ 、 η の関係を代入して表したものが、図-12 ($\mu = -6$ の場合)、図-13 ($\mu = -8$ の場合) である。

解析結果を見れば、非線形バネとひずみ速度に比例する減衰ダッシュポットからなる非線形フォークト体Ⅰの場合は、無次元周波数 ξ が小さい時の無次元応答加速度値 A に較べてピーク値より大きな ξ に対する応答値が急速に減少する傾向にある。この部分の性状に実験値と比べて大きな差違が見られる。一方、非線形バネとひずみ速度の3次式に比例する減衰をもつ非線形フォークト体Ⅱの場合は、ピークより大きな無次元周波数での無次元応答加速度値の減少が緩和されている点が前者と異なっている。

例えば、図-2において、入力加速度100galが $P=0.3$ に相当すると考えれば、55gal、300galはそれぞれ $P=0.165$ 、 0.09 となる。ここで、 $h=0.12$ として $|a|$ の共振点の応答加速度を計算すると、入力加速度100galの応答加速度は約360gal、また55gal、30galの場合には、約280gal、約240galとなる。さらに、図-4において、入力加速度200galが $P=0.2$ に相当すると考えて、 P を決定し、 $h=0.05$ として $|a|$ の共振点の応答加速度を計算すると、入力加速度200galで応答加速度約1250gal、また100gal、50galの場合には、約790gal、は約500galとなることがわかる。

したがって、構成材料によっては、非線形バネとひずみ速度の3次式に比例する減衰で復元応力を仮定した場合の方が、既往の実験値をよりよく説明できるものと考えられる。

今後、ひずみ速度の3次式に比例する減衰を仮定した場合に出現するパラメータ μ が、材料固有の物理量として如何なるものかについて究明したい。

参考文献

- 1) 色部・黒岩 : 砂のせん断振動実験
- 2) 香川崇章 : 地盤モデルとしての砂層の振動性状について、土木学会論文集第275号、PP.53～67, 1978.
- 3) 佐藤 力 : 非線形振動論、朝倉書店、PP.92～100, 1970.
- 4) 土木学会編 : 土木技術者のための振動便覧、土木学会、PP.15～17, 1985.
- 5) 能町純雄、木田哲量、阿部 忠、横江英彦 : 非線形振動における高調波共振の影響、土木学会第42回年次学術講演会講演概要集、PP.786～787, 1987
- 6) 能町純雄、木田哲量、澤野利章、横江英彦 : 高調波共振の影響に関する研究、日本大学生産工学部第20回学術講演会概要集、PP.5～8, 1987
- 7) 能町純雄、木田哲量、澤野利章 : 非線形フォークト体を媒体とするせん断振動応答、第19回地震工学研究発表会講演概要、土木学会 耐震工学委員会、PP.113～116, 1986
- 8) 石原研而 : 土質動力学の基礎、鹿島出版会、PP.9～18, 1976.
- 9) 能町純雄、木田哲量、澤野利章 : 非線形フォークト体のせん断振動について、土木学会第41回年次学術講演会、PP.707～708, 1987.
- 5) 能町純雄、木田哲量、澤野利章 : 非線形三要素モデル体のせん断振動応答、第36回応用力学連合講演会、PP.47～50, 1987.
- 6) 能町純雄、木田哲量、澤野利章 : 非線形三要素マックスウェル体のせん断振動について、土木学会第42回年次学術講演会、PP.782～783, 1987

(1987年10月16日受付)