構造工学論文集　Vol.34A（1988年3月）　土木学会

時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法による地盤振動解析

Dynamic Response Analysis of Ground Using a Coupled Finite Element and Boundary Element Method for Time Marching Analysis

東平光生*　吉田望**
By Terumi TOUHEI and Nozomu YOSHIDA

A coupled finite element and boundary element method for the time marching analysis is presented. The continuity condition on the BE-FE interface boundary is relaxed by using the method of weighted residuals so as to couple these two method. Next, a recurrence procedure, which is similar to the Newmark's β method, is derived by using the weighted residual representation. This procedure is a scheme to solve BE region and FE region under the same time increment. It can be shown that there exists an unconditionally stable scheme. Numerical analysis of the ground with topographic irregularity are performed so as to examine the effectiveness and accuracy of the present method.

1　はじめに

近年になって、地盤振動解析に境界要素法や境界要素法と有限要素法の結合解法が活発に用いられるようになった。これらの境界要素法や、境界要素法と有限要素法の結合解法のほとんどは、周波数領域で定式化されており、時間領域で直接定式化されたものは非常に少ない。これは、時間領域解析の定式化が複雑であるばかりでなく、安定な解が得られにくい事も原因になっていると考えられる。しかしながら、時間領域解析は地盤の過渡応答や非線形性を厳密に扱える等の利点を持っており[1]、最近になって時間領域境界要素法で弾性波動方程式を解く研究が増えている。

時間領域で境界要素法を適用した最も初期の研究としてはColeらの研究がある。彼らは、２次元面外波動場の解析に境界要素法を適用する研究を行い、特殊なケースについてではあるが、安定な解を得るためには表面力の時間に関する補間関数の次数を０次とする必要があることを示した[2]。Mansurらはこの問題に関する研究を進め、安定な解を得るための境界要素の長さと時間増分の大きさの関係について論じた[3][4]。福井らは波動の伝播特性を考慮した離散化手法を示し、２次元の面外および面内の波動場について良好な解を得ている。しかし、彼らの方法は、剛性の差の大きい領域が接しているモデルを解析する場合、精度および安定性に若干問題があるようである[5][6][7]。

---

*　工修　佐藤工業株式会社　技術開発本部原子力部　（〒103 東京都中央区日本橋本町4-12-20）
**　工博　佐藤工業株式会社　中央技術研究所地盤耐震部　（〒243 厚木市三田47-3）

福井らは、ごく最近、上記の問題を解決した時間領域における境界要素法と有限要素法の結合解法の研究を発表した。彼らは2次元面外波動場を対象とした研究を行い、有限要素領域と境界要素領域に別々の解析スキームを用い、異なる時間増分で解かれた有限要素領域と境界要素領域の解を結合するために、最小自乗法と次の時間ステップに進むための反復計算を使用し、安定な解を得ることに成功した[8]。両領域で異なる解析スキームを用いたのは、有限要素領域で安定な解を得るためには時間増分を小さくする必要がある一方、境界要素領域での時間増分は境界要素の長さに制約され、それほど小さくできないためである。

本論文では、二次元面外波動場を対象として、反復計算を使用せずに有限要素領域と境界要素領域を同一のスキームで解析していく方法を示す。有限要素法と境界要素法を結合するためには、有限要素領域と境界要素領域の境界上で、変位の連続条件と力の釣合条件が保証されねばならないが、ここでは、重み付き残差法によって力の釣合条件を緩和する。次に、この重み付き残差表示された式よりNewmarkのβ法に類似した漸化式を誘導する。この漸化式は有限要素領域と境界要素領域を同一の時間間隔で解析する計算式となる。さらに先に述べたような安定な解を得るための有限要素法と境界要素法の相反する時間増分に対する制約を除くため、時間方向に対し無条件な安定スキームを用いる方法があることを示し、同一の時間増分で有限要素領域と境界要素領域を解析することを可能にした。また、本手法の有効性を確認するために、不整形モデルを用いた数値計算結果を示した。

2　有限要素法と境界要素法の基本式

ここでは、次節で述べる時間領域における有限要素法と境界要素法の結合解法の定式化で必要となる、有限要素法と境界要素法の基本式の誘導を行う。

2．1　有限要素法

面外波動すなわちＳＨ波の伝播を規定する波動方程式は、慣性力以外の物体力を考慮しない場合、次式で示される。

$$\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) u - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0 \tag{2.1}$$

ここに、μはせん断剛性、X、Yは座標成分、uは変位、ρは質量密度、tは時間を示す。重み付き残差法を用いることによって、この微分方程式に対する有限要素法表示が次のように得られる。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\} \tag{2.2}$$

ここに、［Ｍ］、［Ｋ］はそれぞれ、質量、剛性マトリックス、$\{\ddot{u}\}$は加速度ベクトル、$\{u\}$は変位ベクトル、$\{P(t)\}$は境界条件より決まる節点力ベクトルである。特に、有限要素法と境界要素法を結合する場合、この節点力ベクトルは、有限要素領域と境界要素領域の境界に作用する表面力に関連して現れ、物体力のない限り有限要素領域内部ではゼロとなる。

2．2　境界要素法

① 境界積分方程式

Fig.2.1に示すように、境界Γに地震波が入射し、散乱波が発生する波動場を考える。初期条件として、時刻t＝0では散乱波は発生していないという条件を考えると、時間領域の境界積分方程式は次式となる。

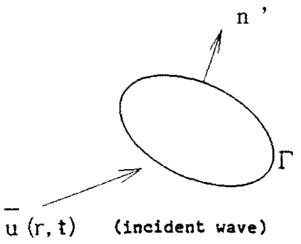


Fig. 2.1 Analyzed Model in the BEM

$$\varepsilon u(r,t)+\int_0^t\int_\Gamma T(r,t:r',t')u(r',t')dr'dt'$$

$$=\int_0^t\int_\Gamma G(r,t:r',t')\sigma(r',t')dr'dt'+\bar{u}(r,t) \qquad (2.3)$$

ここに、εは境界の形状で決まる定数、$\bar{u}$は入射波、σは表面力、rは境界上の位置、tは時刻を示す。また、GおよびTはそれぞれ変位と表面力を表すGreen関数であり、式(2.1)に対応する関数はそれぞれ次式で与えられる。

$$G(r,t:r',t')=\frac{CH[C(t-t')-|r-r'|]}{2\pi\mu\sqrt{C^2(t-t')-(r-r')^2}} \qquad (2.4)$$

$$T(r,t:r',t')=-\frac{\partial(r-r')}{\partial n'}\cdot\frac{C(C(t-t')-|r-r'|)}{2\pi\sqrt{C^2(t-t')-(r-r')^2}^3}H[C(t-t')-|r-r'|]$$

$$-\frac{\partial(r-r')}{\partial n'}\cdot\frac{\mu}{C}G(r,t:r',t')\frac{\partial}{\partial t'} \qquad (2.5)$$

ここで、CはS波の伝播速度、H[・]は単位段階関数、n'は境界の法線方向にとった座標を示す。

② 境界積分方程式の離散化

時間領域境界要素法は、式(2.3)で示される境界積分方程式を直接離散化し、数値的に解いて行く手法である。式(2.3)を離散化するために、境界上にM個の節点を設け、時刻tをNステップに分割する。さらに、補間関数を用いて変位および表面力を次のように近似する。

$$u(r,t)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\phi_j(r)\zeta_k(t)u_j^k \qquad (2.6)$$

$$\sigma(r,t)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\psi_j(r)\eta_k(t)\sigma_j^k \qquad (2.7)$$

ここに、u_j^kおよびσ_j^kはkステップ目の時刻における節点jの変位および表面力を表す。また、ϕ_j、ψ_jは空間に対する補間関数、ζ_k、η_kは時間に対する補間関数である。

式(2.7)と式(2.6)を式(2.3)に代入することで積分方程式は離散化されるが、離散化過程で注意すべきことは、時間に関する積分は解析的に行い、空間に関する積分のみGauss積分公式により数値的に行う点である。また、特異点を含む積分に関しては時間に関する積分、空間に関する積分とも解析的に行う。

このようにして、離散化された積分方程式は、次式のように表すことができる。

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}H_{ij}^{Nk}u_j^k=\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}G_{ij}^{Nk}\sigma_j^k+\bar{u}_i^N \qquad (2.8)$$

ここに、

$$H_{ij}^{Nk}=\varepsilon\delta_{ij}\delta_{Nk}+\int_0^{t_N}\int_\Gamma T(r_i,t_N:r',t')\phi_j(r')\zeta_k(t')dr'dt' \qquad (2.9)$$

$$G_{ij}^{Nk}=\int_0^{t_N}\int_\Gamma G(r_i,t_N:r',t')\psi_j(r')\eta_k(t')dr'dt' \qquad (2.10)$$

である。なお、δ_{ij}およびδ_{Nk}はKroneckerのデルタを表す。

影響係数H_{ij}^{Nk}およびG_{ij}^{Nk}に関してはGreen関数の性質から次式が成立する[2]。

$$H_{ij}^{Nk}=H_{ij}^{N+p\ \ k+p}$$
$$G_{ij}^{Nk}=G_{ij}^{N+p\ \ k+p} \tag{2.11}$$

ここで、pは $p\geqq -k$ の任意の整数である。従って、今後これらの影響係数H_{ij}^{Nk}、G_{ij}^{Nk}は、$p=-k$ として H_{ij}^{N-k}、G_{ij}^{N-k}と書き表すことにする。また、空間に関してマトリックスとベクトル表示を用い式(2.8)を表す場合は、次式のように表すことにする。

$$\sum_{k=1}^{N}[H^{N-k}]\{u\}=\sum_{k=1}^{N}[G^{N-k}]\{\sigma^k\}+\{\bar{u}^N\} \tag{2.12}$$

さらに、以下の議論では特に断わらない限り、$[H^{N-N}]$、$[G^{N-N}]$はそれぞれ常に$[H]$、$[G]$で表される。

3　時間領域に於ける有限要素法と境界要素法の結合解法の定式化

3．1　積分方程式の離散化表示式

ここでは、有限要素法と境界要素法を結合するために、積分方程式の離散化表示式、すなわち、式(2.12)の変形を行う。この式は、表面力と変位の関係を与える方程式であり、節点力と変位の関係を与える有限要素法の式とそのままでは結合できない。従って、積分方程式の離散化表示式は、有限要素法と結合するために節点力と変位の関係を与える式に変換する必要がある。

まず、式(2.12)を変形して、Nステップ目の時刻における表面力について解くと次式となる。

$$\{\sigma^N\}=[G]^{-1}[H]\{u^N\}-\{f^N\} \tag{3.1}$$

ここで、

$$\{f^N\}=[G]^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N-1}[G^{N-k}]\{\sigma^k\}-\sum_{k=1}^{N-1}[H^{N-k}]\{u^k\}+\{\bar{u}^N\}\right) \tag{3.2}$$

であり、$\{f^N\}$はNステップ目の時刻における入射波とN－1ステップ以前の時刻の変位と表面力から構成される。

次に、境界上の表面力と変位を用い、Nステップ目の時刻における仮想仕事$\delta\Pi$を計算する。式(2.6)と式(2.7)を用いると次式を得る。

$$\delta\Pi=\int_\Gamma \delta u^N\cdot\sigma^N d\Gamma=\delta\{u^N\}^T\int_\Gamma\{\phi\}^T\{\psi\}\,d\Gamma\,\{\sigma^N\} \tag{3.3}$$

また、この仮想仕事は節点力$\{P^N\}$を用いて次のように表すことができる。

$$\delta\Pi=\delta\{u^N\}^T\{P^N\} \tag{3.4}$$

従って、

$$[D]=\int_\Gamma\{\phi\}^T\{\psi\}\,d\Gamma$$
$$[\tilde{K}]=[D][G]^{-1}[H] \tag{3.5}$$

とおけば、式(3.3)と式(3.4)より次式の節点力と変位の関係式が得られる。

$$\{P^N\} = [\hat{K}]\{u^N\} - [D]\{f^N\} \tag{3.6}$$

すなわち、$[\hat{K}]$は境界要素領域の剛性マトリックスに相当し、$[D]$は表面力と節点力を対応付ける分布マトリックスである。

なお、マトリックス$[\hat{K}]$は一般に非対称となるが、有限要素法と結合して解析する場合には対称マトリックスであることが望ましいこともある。既往の研究によれば、次式のようにマトリックスを対称化しても、著しく精度を損なわないことが指摘されており[9]、本論文で示す計算例では、この方法によりマトリックスを対称化した。

$$[K^{\cdot}] = \frac{[\hat{K}]^T + [\hat{K}]}{2} \tag{3.7}$$

もちろん、非関連流れ則を用いた非線形解析では剛性マトリックスも非対称になるので、このような配慮は不用となる。また、stress transfer methodのような手法を用いる場合には非対称なマトリックスでもあまり解析上の障害とならないときもある。

3．2　有限要素法と境界要素法の結合

有限要素法領域と境界要素法領域を結合する場合、有限要素法領域と境界要素法領域の境界上での変位の連続性と力の釣合が保証される必要がある。すなわち、

$$\begin{aligned} \{u\}_B &= \{u\}_F \\ \{P\}_B + \{P\}_F &= \{0\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

ここで、$\{u\}$と$\{P\}$は変位及び節点力を示し、添字のBとFは境界要素領域の値と有限要素領域の値であることを示す。

ところで、前述のように有限要素領域の基本式は式(2.2)の微分方程式であり、節点力は時間に対し連続的に変化する量として与えられる。一方、境界要素領域の基本式は式(3.6)に示す漸化式であり、節点力は有限個の離散化された時刻に対して与えられている。従って、これら二つの基本式により、全ての時刻に対して式(3.8)式を成立させることは非常に困難である。

この問題を解決するために、節点力を時間方向の補間関数により近似し、有限要素領域と境界要素領域の節点力の時間変動を規定することを考える。境界要素領域では、節点力に関する時間の補間関数は境界積分方程式の離散化に用いた表面力の補間関数と同一となり、既往の研究[3]に従い0次の関数を用いる。従って、$t_N - 2\Delta t \leqq t \leqq t_N$ の間の節点力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{P\}_B &= \{P^N\}\eta_N(t) + \{P^{N-1}\}\eta_{N-1}(t) \\ \eta_N(t) &= H(\xi) - H(\xi-1) \\ \eta_{N-1}(t) &= H(-\xi) - H(-1-\xi) \end{aligned} \tag{3.9}$$

ここに、Hは単位階段関数、t_NはNステップ目の時刻、Δtは時間増分を示し、

$$t_N = N\Delta t \tag{3.10}$$

である。また、ξは時刻を表す無次元のパラメータであり次式で示される。

$$\xi=\frac{t}{\Delta t}+1-N \tag{3.11}$$

さらに、$\{P^N\}$ および $\{P^{N-1}\}$ は、式(3.6)および式(3.7)より

$$\begin{aligned}\{P^N\}&=[K^*]\{u^N\}-[D]\{f^N\}\\ \{P^{N-1}\}&=[K^*]\{u^{N-1}\}-[D]\{f^{N-1}\}\end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。

次に、有限要素領域では、変位を補間関数により近似することで、節点力の時間変動を規定することにする。変位の時間方向の補間関数は、変位が２次の微係数を持つ必要性から、２次以上とする必要がある。本論文では、２次の補間関数を用いているので、$t_N-2\Delta t\leqq t\leqq t_N$ の間の変位は次式のように表される。

$$\begin{aligned}\{u\}&=\{u^{N-2}\}\zeta_{N-2}(t)+\{u^{N-1}\}\zeta_{N-1}(t)+\{u^N\}\zeta_N(t)\\ \zeta_{N-2}(t)&=\xi(\xi-1)/2\\ \zeta_{N-1}(t)&=1-\xi^2\\ \zeta_N(t)&=\xi(\xi+1)/2\end{aligned} \tag{3.13}$$

有限要素領域では変位の時間方向の補間関数に２次関数を用いたため、式(2.2)より節点力も時間に対して２次関数の変化を示す。

ここで、もう一度式(3.8)に戻ると、有限要素領域の節点力は時間に関して２次関数の変化を示し、境界要素領域の節点力は時間ステップ毎に一定となるため式(3.8)を全ての時刻に対して成立させることは不可能である。同様な議論は有限要素領域の内部についても成立する。すなわち、式(3.13)を用いた場合、加速度は時間ステップ毎に一定となり、式(2.2)の釣合式を全ての時刻に対して成立させることは不可能である。

Zienkewiczは、式(2.2)、(3.13)を用いて有限要素領域の解を与える漸化式を得る方法を示している[10]。そこでは、次の重み付残差法を用いることにより力の釣合条件を緩和している。

$$\int_{-1}^{+1}w(\xi)\left([M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}\right)d\xi=\{0\} \tag{3.14}$$

ここで、$w(\xi)$ は重み関数を表す。

これと同様な方法を、有限要素領域と境界要素領域の境界の力の釣合条件に対しても適用する。緩和された力の釣合条件式は次式のように表される。

$$\int_{-1}^{+1}w(\xi)\left(\{P\}_F+\{P\}_B\right)d\xi=\{0\} \tag{3.15}$$

重み関数を偶関数とし、式(2.2)および式(3.8)から式(3.15)を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned}&[M+\beta\Delta t^2K+\tfrac{1}{2}\Delta t^2K^*]\{u^N\}\\ &\quad=[2M-(1-2\beta)\Delta t^2K-\tfrac{1}{2}\Delta t^2K^*]\{u^{N-1}\}\\ &\quad+[-M-\beta\Delta t^2K]\{u^{N-2}\}+\tfrac{1}{2}\Delta t^2[D](\{f^N\}+\{f^{N-1}\})\end{aligned} \tag{3.16}$$

ここに、βは次式で示される定数である。

$$\beta=\int_{-1}^{+1}w\xi\frac{(1+\xi)}{2}d\xi \ / \ \int_{-1}^{+1}w\,d\xi \tag{3.17}$$

式(3.16)で得た式は有限要素領域と境界要素領域を同一の時間増分によって解析していくための漸化式である。すなわち、$\{u^{N-1}\}$と$\{u^{N-2}\}$を用いて$\{u^N\}$を計算することができる。さらに、このときの速度および加速度は式(3.13)を用いて次式のように表される。

$$\{\dot{u}^N\}=\frac{3\{u^N\}-4\{u^{N-1}\}+\{u^{N-2}\}}{2\Delta t}$$

$$\{\ddot{u}\}^N=\frac{\{u^N\}-2\{u^{N-1}\}+\{u^{N-2}\}}{\Delta t^2} \tag{3.18}$$

さて、式(3.16)の漸化式はZienkiewiczが示したNewmarkのβ法のスキーム[10]と共通点を持っている。しかし、たとえば$\beta=0$とした場合、有限要素法に対するNewmarkのβ法であれば、陽解法のスキームが得られるが、ここでは境界要素領域のマトリックスのため、陽解法のスキームは得られない。すなわち、式(3.16)はNewmarkのβ法とは異なった性質を持っている。

4　漸化式の安定性

先にみたように、式(3.16)で得た漸化式は有限要素法に対するNewmarkのβ法と同じ重み付残差法から出発したが、境界要素マトリックスを含むために有限要素法に関するNewmarkのβ法と異なる性質も持っている。この場合、実用的な観点から最も問題となるのは漸化式の安定性であろう。

式(3.16)を非連成の式に置き換え、外力項をゼロとすると、次の式が得られる。

$$(m+\beta\Delta t^2k+\frac{1}{2}\Delta t^2k^{*})\,u^N$$

$$+\{-2m+(1-2\beta)\Delta t^2k+\frac{1}{2}\Delta t^2k^{*}\}\,u^{N-1}+(m+\beta\Delta t^2k)\,u^{N-2}=0 \tag{4.1}$$

ここで、添字のN、N-1、N-2は時間ステップを表している。また、m、kおよびk^{*}は正数である。ここで、

$$p=\frac{k}{m}\Delta t^2$$

$$q=\frac{k^{*}}{m}\Delta t^2$$

$$u^N=\lambda u^{N-1}$$

$$u^{N-1}=\lambda u^{N-2} \tag{4.2}$$

とおくと式(4.1)は、次のように表される。

$$\lambda^2(1+\beta p+\frac{1}{2}q)+\lambda\{-2+(1-2\beta)p+\frac{1}{2}q\}+(1+\beta p)=0 \tag{4.3}$$

漸化式が安定であるためには、式(4.3)の根λに関し $|\lambda|\leqq 1$ が満たされることが必要となる。

もし、式(4.3)が複素数の解かあるいはただ一つの実数解を持つとすれば、2次行程式の根と係数の関係より次式が成立する。

$$|\lambda|^2=\frac{1+\beta p}{1+\beta p+\frac{1}{2}q} \tag{4.4}$$

pおよびqは正の実数であるから、このとき $|\lambda|<1$ となり、漸化式が安定となる条件が満たされる。式(4.3)が複素数あるいは、ただ一つの実数の解を持つ条件は次のようになる。

$$(1-4\beta)p^2+\frac{1}{4}q^2+pq-4\beta pq-4p-4q\leqq 0 \tag{4.5}$$

ここで、p、qは正数であるので、上式に $4(P+q)$ を加えた式、

$$-4\beta p(p+q)+(p+\frac{1}{4}q)^2\leqq 0 \tag{4.6}$$

が成立すれば、式(4.5)は成立する。式(4.6)をβについて解くと次式となる。

$$\beta\geqq\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+\nu)^2}{(1+2\nu)}$$
$$\nu=\frac{q}{2p}=\frac{k}{2k'} \tag{4.7}$$

これが漸化式が安定であるためのβの条件である。νは時間増分には無関係な量であるから、時間増分に無関係に安定な漸化式が得られるという重要な性質が式(4.7)から直ちに読み取れる。ところで、Newmarkのβ法では、$\beta\geqq 1/4$であれば無条件に安定な漸化式が得られることが知られている。しかし、式(3.16)の安定性は式(4.7)に示されるように、時間増分には無関係であるが、有限要素領域と境界要素領域の剛性比に影響される。この点が有限要素法に対するNewmarkのβ法との相違である。式(4.7)は、$\nu\geqq 0$ の範囲では単調増加関数であるから、漸化式を安定とするβの値は1/4より大きいことがわかる。しかし、この条件はより厳しい条件式(4.7)を基にした条件であり、実際の条件式(4.5)では、時間増分とも関連してはいるが、これより小さいβでも安定である。後に例で示すように、実用的な問題に対しては$\beta=1/4$であれば漸化式は安定と考えられる。

ところで、もし式(4.5)が満たされるとすれば、式(4.4)から、常に $|\lambda|<1$ となり、この漸化式は減衰を示す。この減衰は境界要素領域のマトリックスにより生じ、その意味でこの減衰は波動の逸散減衰によるものと解釈することができる。

5　数値計算例

ここでは、前述の理論の有効性を検討するために数値計算例を示す。数値計算モデルはFig.5.1に示すような不整形地盤モデルであり、ここに平面ＳＨ波が入射する。数値計算モデルに用いた有限要素は三角形６節点要素であり、それと対応付ける意味で境界要素領域の変位の空間に対する補間関数にも２次関数を用いている。ただし、表面力の空間に対する補間関数はそれより１次だけ下げて１次関数としている。また、数値計算には半無限弾性体のGreen関数を用いている。

数値計算を行うに当り、まず理論の妥当性を検証した。この検証は、有限要素領域と境界要素領域の物性値を同じものとして解析を行い、半無限均質領域のスカラー場の波動方程式から得る厳密解と比較することにより行った。また、地盤のせん断剛性を1000000kN/m^2、質量密度を１t/m^{3}とし、入射波の変位時刻歴はFig.5.2に示すものを用いた。漸化式のβの値は1/4とし、時間増分は0.05秒とした。Fig.5.3に平面波の入射角を60°とした場合の数値解と厳密解との比較を示す。時間増分が比較的粗く、入射波変位時刻歴も周期的に振動しているにもかかわらず、数値解と厳密解は非常によい対応を示し、理論の妥当性は検証されたと考えられる。

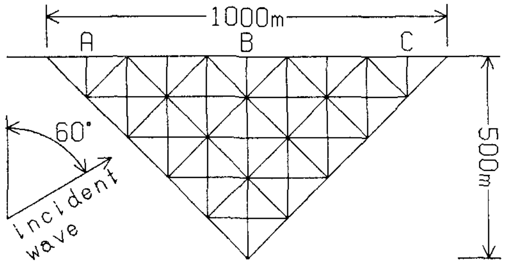


Fig. 5.1 Analyzed Model

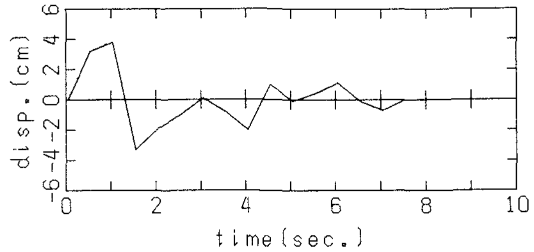


Fig. 5.2 Incident Waveform

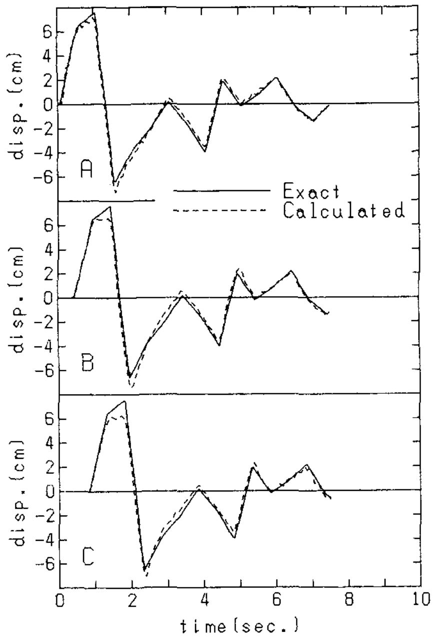


Fig. 5.3 Comparison of Displacement

次に、有限要素領域の剛性と境界要素領域の剛性の違いが、漸化式の安定性および不整形地盤の応答特性にどの様な影響を与えるかについての検討を行う。数値計算モデルは前述のFig.5.1に示すモデルを用いるが、入射波変位時刻歴はFig.5.4に示す三角形のパルス波を用いる。このようなパルス波は、その周波数特性から複素応答解析が苦手とする波である。境界要素領域のせん断剛性を$\mu_B=1000000\mathrm{kN/m^2}$とし、有限要素領域のせん断剛性を$\mu_F=100000\mathrm{kN/m^2}$、$10000\mathrm{kN/m^2}$、$1000\mathrm{kN/m^2}$として、それぞれについて解析を行う。また、質量密度は有限要素領域、境界要素領域とも$2\mathrm{t/m^3}$とする。それぞれの解析ケースに対して、せん断波速度をまとめたものをTable5.1に示す。漸化式のβには1/4を用い、時間増分は0.06秒とした。なお。最後のケースの有限要素領域のせん断剛性は境界要素領域のそれの1/1000であり、前の例も含めると、有限要素領域の剛性を境界要素領域の領域の1～1/1000について検討したことになり、実際の地盤振動解析で考えられるほとんどの場合をカバーしている。

パルス波の入射角を60°とし、全地表上の変位時刻歴を4秒まで表したものをFig.5.5に、節点A、B、Cの変位時刻歴を比較したものをFig.5.6に示す。ここでは入射波が有限要素領域の左端に初めて到達した時の

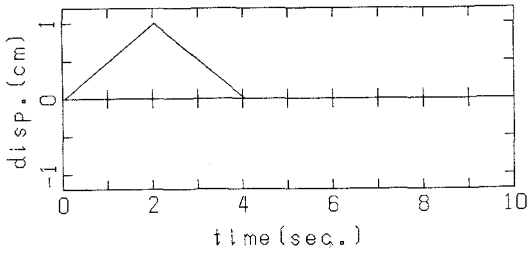


Fig. 5.4 Incident Waveform

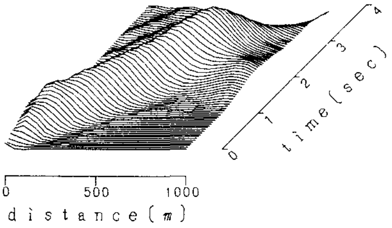
Table 5.1 Phase Velocity of SH Waves

ケース	FE region	BE region
a	223.6 m/s μ_F=1000000 kN/m²	707.1 m/s μ_F=10000000 kN/m²
b	70.7 m/s μ_F=100000 kN/m²	
c	22.4 m/s μ_F=10000 kN/m²	

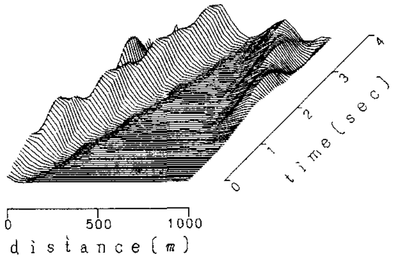
時刻を時間軸の始点としている。

節点Aは、有限要素領域にパルスが到達するとすぐに振動をはじめ、パルスが去った後も攪乱波の影響で振動を続ける。また、振動の周期は有限要素領域のせん断剛性が大きくなるにつれて小さくなることが観察される。節点B、Cでは振動が始まるまでにある程度の時間を要している。節点Bではμ_F＝100000kN/m²のときに、波動が到達するまでに約1.5秒を要し、μ_F＝10000kN/m²の時には約４秒を要している。特にμ_F＝1000kN/m²の時には解析時間中には波動は到達しない。これはせん断剛性が小さくなるに従い、波動の伝播速度が遅くなるためである。節点Cでは、振動が始まるまでに約２秒を要しており、この時間は有限要素領域の剛性とはほぼ無関係である。これはC点にパルスが直接到達する前に、有限要素領域の右端から境界要素領域を通り回折してきた波が到達するためである。

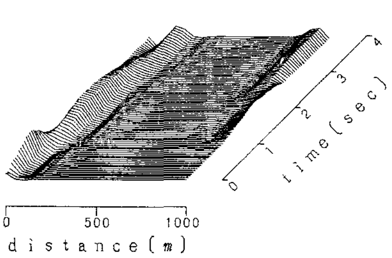
以上に示したように、本手法によって得た解は安定であるばかりでなく、不整形地盤の振動特性をよく説明している。特に有限要素領域と境界要素領域の剛性差が非常に大きい場合にも安定な解を得ていることから、本手法は十分実用的な手法であると考えることができる。



(a) μ_F=1000000 kN/m²



(b) μ_F=100000 kN/m²



(c) μ_F=10000 kN/m²

Fig. 5.5 Displacement on the Surface

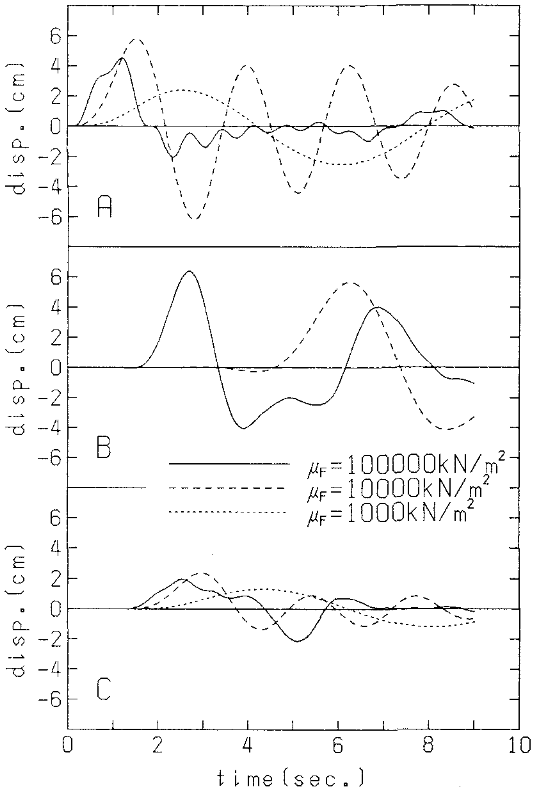


Fig. 5.6 Comparison of Displacement

6　結論

本論文では、時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解法のスキームを提案した。有限要素法と境界要素法は、有限要素領域と境界要素領域の境界に作用する力の釣合条件を緩和することによって結合された。これによって得られた計算式は有限要素領域と境界要素領域を同一の時間増分によって解析する漸化式となる。また、この漸化式の安定性の検討によって、数値積分のための時間増分の大きさに関係なく安定な漸化式を得ることができることがわかった。

＜参考文献＞

１）　近江正徳、佐々木定雄、登坂宣好：時間領域境界要素法による３次元埋め込み剛基礎の動的応答解析、構造工学論文集、Vo.33B, pp.93-101, 1987

２）　Cole, D.M., Kosloff, D.D. and Minister, J.B. : A Numerical Boundary Integral Equation Method for elastodynamics I, B.S.S.A., Vol.68, No.5, pp.1331-1357, 1978

３）　Mansur, W.J. and Brebbia, C.A. : Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two Dimensional Transient Scalar Wave Propagation Problems, Appl. Math. Modelling, Vol.6, pp.299-306, 1982

４）　Mansur, W.J. and Brebbia, C.A. : Formulation of the Boundary Element Method for Transient Problems Governed by the Scalar Wave Equation, Appl. Math. Modelling, Vol.6, pp.307-311, 1982

５）　福井卓雄：弾性半平面内空洞の過渡的応答の境界積分方程式法による時間step解析、境界要素法論文集、第１巻、pp.175-176、1984年

６）　福井卓雄：非均質弾性体の過渡的応答の境界積分方程式法による時間ステップ解析、境界要素法論文集、第２巻、pp.53-58、1985年

７）　Fukui, T. : Time Marching Analysis of Boundary Integral Equations in Two Dimensional Elastodynamics, Proc. 4th Int. Symp. on Numerical Methods in Engineering, pp.405-410, 1986

８）　Fukui, T. and Ishida, Y. : Time Marching BE-FE Mehod in Wave Problem, Proc. 1st Japan-China Symposium Boundary Element Methods, pp.95-106, 1987

９）　Brebbia, C.A., Tells, J.C. and L.C. Wrobel : Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, 1984

１０）Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method, Third Edition, MaGraw-Hill, 1977

（1987年10月16日受付）