

液体に接する円筒殻の自由振動

FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS WITH EITHER INTERNAL OR EXTERNAL FLUIDS

三上 隆* 芳村 仁**

By Takashi MIKAMI and Jin YOSHIMURA

This paper presents a simple and effective method for computing natural frequencies and mode shapes of cylindrical shells with either internal or external fluids. The fluid is assumed to be irrotational and incompressible, and the shell motion is described by an improved theory including the effects of transverse shear deformation and rotary inertia for application to thin and moderately thick shells. The fluid region is treated analytically, and the collocation method is used to solve integro-differential equations which govern the motion of shell. The versatility and accuracy of the proposed method are illustrated through several numerical examples. Furthermore, a numerical study of the dynamic characteristics of shells is carried out.

1. まえがき

液体に接する円筒殻は石油タンク、原子力プラント、海洋構造物等に用いられ、近年ますます大型化の傾向を示すようになってきた。したがって、各種動的荷重を受けるこの種の構造物の設計に際しては、液体と構造物の相互作用を取り入れた構造物の動的挙動の解明が重要であり、その基礎段階として、まず自由振動特性を明らかにする必要がある。

液体に接する円筒殻の自由振動に関する研究は、内部に液体を含む内部問題に対してはエネルギー法や有限要素法を用いた研究が報告され¹⁾、耐震設計にも反映されるようになってきたが、殻外部で流体に接する外部問題に対しては比較的少ない²⁾。さらに、それらの研究成果のほとんどは、軸対称および周方向波数が1の非軸対称振動に関するものであり、高い円周方向波数に対する自由振動性状の把握は、空中の円筒殻³⁾に比べて不十分に思われる。ところで、内部問題と外部問題の解の比較から、円筒殻の自由振動特性に言及した報告は見当たらない。もちろん、両問題は異質なものであるが、流体の存在領域の相違の

* 工博 北海道大学助手 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

** 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

自由振動性状に及ぼす影響を定量的に明確にすることはそれなりに意味を持つものと思われる。

さて、液体に接する構造物の解析手法を液体領域の処理方法に着目し分類すれば、①有限要素に分割する方法、②境界要素に分割する方法、および③液体の挙動を一般化された関数の級数展開で表現する方法に大別できる⁴⁾。このうち、①の方法は内部問題に対しては有効であるが、液体が無限に広がる外部問題に対しては無限要素の使用など何らかの技巧が要求される。②の方法は内部および外部問題に対してでも有効であるが、その適用可能性は殻の支配方程式の基本解の存在に大きく左右される。

以上の点を考慮して、本論文では液体領域の処理方法として上述の③の方法の採用を前提にして、①内部および外部問題における円筒殻の自由振動解析法として、両問題に対して同程度の簡便性・有効性をもって適用できる選点法に基づく解法を提示すること、および②内部および外部問題としての円筒殻の固有振動数の特性を、両問題の数値解析結果の比較で明らかにすること、の2点を目的とする。

2. 解析モデルと基礎方程式

図-1に示すように、液体に接する上端自由—下端固定の等方等質で一樣な厚さの円筒殻を考える。 a , L はそれぞれ、円筒殻の半径、高さ、 H は液体の深さ、 ρ_f は液体の密度、 ρ_s , h , E , ν はそれぞれ円筒殻の密度、板厚、弾性係数、ポアソン比とする。

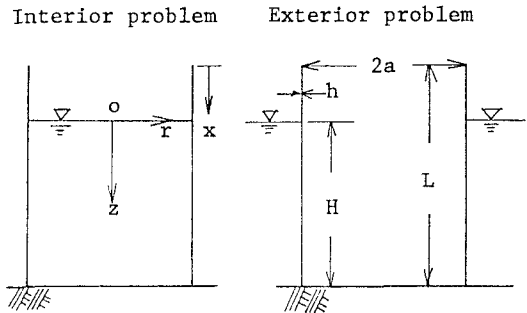


図-1 解析モデル

(1) 液体の基礎方程式

流体領域に対する座標系を円筒座標系(r , θ , z)で表し、静止水面と円筒殻の回転軸の交点を原点、鉛直下方に z 軸をとる。

液体運動は、非圧縮性、非粘性で渦無し流れとすれば、流体系の基礎方程式は次のように表される。

$$\Phi_{,rr} + \Phi_{,r}/r + \Phi_{,\theta\theta}/r^2 + \Phi_{,zz} = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\Phi_{,z} \big|_{z=H} = 0 \quad \dots\dots(2) \quad p \big|_{z=0} = 0 \quad \dots\dots(3)$$

$$\Phi_{,r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad \dots\dots(4) \quad \Phi_{,r} \big|_{r=a} = W_{,t} \quad \dots\dots(5)$$

ここに、 Φ は流体速度を与える速度ポテンシャル、コンマに続く下添字は偏微分を表す。式(1)はラプラス方程式、式(2)は液底条件式、式(3)は重力の影響を無視した自由表面条件式、式(4)は振動数が高く、自由表面上の波が殻近傍から外側に伝播しないという仮定に基づく外部問題に対する遠方条件式（振動数が低く、波が外に伝播する場合には、放射条件を考慮する必要がある）、式(5)は流体と殻側壁の速度の連続性に関する接触条件式（ W は後述する殻の半径方向変位）である。式(3)中の p は圧力で、線形化ベルヌーイ式より次式で表される。

$$p = -\rho_f \Phi_{,t} \quad \dots\dots(6)$$

(2) 液体に接する円筒殻の基礎方程式

殻の運動は変形が小さく、せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論⁵⁾に従うものとする。殻の諸元によってはせん断変形・回転慣性の影響は少ないが、修正理論を採用するのは、後述する選点法が他の数値解析手法にみられる数値不安定現象（ロッキング現象）を示すことなしに比較的厚い殻から薄い殻への適用が可能であり⁶⁾、また基礎方程式中に現れる位置に関する微分の階数が古典理論のそれに比べて低いこと、仮定した変位関数を数回微分することによって生じる数値的誤差の介入が避けられること

利点があるためである。なお、古典理論でも変数変換をすれば階数低下された基礎式が得られるが、質量マトリックスに相当するマトリックスの正則性が失われ、数値計算上得策とは思えない。

殻の経線方向(x)、円周方向(θ)および半径方向(r)に対応する変位成分をそれぞれ、 U 、 V および W 、(x 、 θ)軸に垂直な断面の回転角成分を(β_x 、 β_θ)、合応力および合モーメントの成分をそれぞれ、(N_x 、 N_θ 、 $N_{x\theta}$ 、 Q_x 、 Q_θ)および(M_x 、 M_θ 、 $M_{x\theta}$ 、 $M_{\theta x}$)で表示する。 G 、 κ はそれぞれ、せん断弾性係数、せん断補正係数を表す。

液体から殻側壁に作用する液圧を考慮すれば、円筒殻の運動方程式は次式となる。

$$N_{x,x} + N_{\theta x,\theta}/a = \rho_s h(U_{,tt} + \delta a \beta_{x,tt}) \quad \dots\dots\dots(7.a)$$

$$N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta}/a + Q_\theta/a = \rho_s h(V_{,tt} + \delta a \beta_{\theta,tt}) \quad \dots\dots\dots(7.b)$$

$$Q_{x,x} + Q_{\theta,\theta}/a - N_\theta/a = \rho_s h W_{,tt} \pm p \mid_{r=a} \quad \dots\dots\dots(7.c)$$

$$M_{x,x} + M_{\theta x,\theta}/a - Q_x = \rho_s h a \delta (U_{,tt} + a \beta_{x,tt}) \quad \dots\dots\dots(7.d)$$

$$M_{x\theta,x} + M_{\theta,\theta}/a - Q_\theta = \rho_s h a \delta (V_{,tt} + a \beta_{\theta,tt}) \quad \dots\dots\dots(7.e)$$

ここで、 $\delta = h^2/12a^2$ 、式(7.c)中の p に付した符号(+)は外部問題、(-)は内部問題に対応し、液体との非接触領域では $p \mid_{r=a} = 0$ である。

合応力、合モーメント成分と変位成分の関係は次式となる。

$$N_x = K\{U_{,x} + \nu(V_{,\theta} + W)/a + a \delta \beta_{x,x}\} \quad \dots\dots\dots(8.a)$$

$$N_\theta = K\{(1+\delta)(V_{,\theta} + W)/a - a \delta \beta_{\theta,\theta}\} \quad \dots\dots\dots(8.b)$$

$$N_{x\theta} = Gh(V_{,x} + U_{,\theta}/a + a \delta \beta_{\theta,x}) \quad \dots\dots\dots(8.c)$$

$$N_{\theta x} = Gh\{V_{,x} + U_{,\theta}/a + \delta(U_{,\theta}/a - \beta_{x,\theta})\} \quad \dots\dots\dots(8.d)$$

$$Q_x = \kappa Gh(W_{,x} + \beta_x) \quad \dots\dots\dots(8.e)$$

$$Q_\theta = \kappa Gh(1+\delta)\{\beta_{\theta,\theta} + (W_{,\theta} - V)/a\} \quad \dots\dots\dots(8.f)$$

$$M_x = D(\beta_{x,x} + \nu \beta_{\theta,\theta}/a + U_{,x}/a) \quad \dots\dots\dots(8.g)$$

$$M_\theta = D\{\beta_{\theta,\theta}/a + \nu \beta_{x,x} - (W + V)/a^2\} \quad \dots\dots\dots(8.h)$$

$$M_{x\theta} = Gh^3(\beta_{\theta,x} + \beta_{x,\theta}/a + V_{,x}/a)/12 \quad \dots\dots\dots(8.i)$$

$$M_{\theta x} = Gh^3(\beta_{\theta,x} + \beta_{x,\theta}/a - U_{,\theta}/a^2)/12 \quad \dots\dots\dots(8.j)$$

ここで、 $K = Eh/(1-\nu^2)$ 、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 。

境界条件は、次の5組の対の適当な組合せによって構成される。

$$U \text{ or } N_x, \quad V \text{ or } N_{x\theta}, \quad W \text{ or } Q_x, \quad \beta_x \text{ or } M_x, \quad \beta_\theta \text{ or } M_{x\theta} \quad \dots\dots\dots(9)$$

さて以上の諸式を用いれば、流体に接する円筒殻の運動方程式は次のように得られる。液体と殻の連成系は、円周方向波数 n および円振動数 ω の調和振動するものと仮定し、速度ポテンシャル Φ 、動液圧 P および変位成分(U 、 V 、 W 、 β_x 、 β_θ)を、 ϕ 、 q および(u 、 v 、 w 、 β_x 、 β_θ)を係数とするFourier級数展開する。

$$\begin{aligned} \Phi &= i\omega \frac{\sigma a^3}{Eh} \sum_n \phi^{(n)} \cos n\theta e^{i\omega t}, & P &= \rho_f \omega^2 \frac{\sigma a^3}{Eh} \sum_n q^{(n)} \cos n\theta e^{i\omega t} \\ U &= \frac{\sigma a^2}{Eh} \sum_n u^{(n)} \cos n\theta e^{i\omega t}, & V &= \frac{\sigma a^2}{Eh} \sum_n v^{(n)} \sin n\theta e^{i\omega t} \\ W &= \frac{\sigma a^2}{Eh} \sum_n w^{(n)} \cos n\theta e^{i\omega t}, & \beta_x &= \frac{\sigma a}{Eh} \sum_n \bar{\beta}_x^{(n)} \cos n\theta e^{i\omega t} \\ \beta_\theta &= \frac{\sigma a}{Eh} \sum_n \bar{\beta}_\theta^{(n)} \sin n\theta e^{i\omega t} & & \dots\dots\dots(10.a \sim g) \end{aligned}$$

ここで、 σ は参照応力、 i は虚数単位である。以下ではFourier係数の添字(n)は省略する。

式(1)の解 Φ を式(2)～式(5)の条件で求め、式(6)より殻側壁($r=a$)における圧力 p を定めれば、 Φ と p の

Fourier係数 ϕ , q は次のようになる。

内部問題に対して；

$$\phi = q = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2 I_n(\lambda_r)}{\lambda_r I_n'(\lambda_r)} \sin(\lambda_r H \eta / a) \int_0^1 w \sin(\lambda_r H \eta / a) d\eta \quad \dots\dots(11.a)$$

外部問題に対して；

$$\phi = q = - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2 K_n(\lambda_r)}{\lambda_r K_n'(\lambda_r)} \sin(\lambda_r H \eta / a) \int_0^1 w \sin(\lambda_r H \eta / a) d\eta \quad \dots\dots(11.b)$$

ここで、 I_n , K_n はそれぞれ第1種変形、第2種変形Bessel関数であり、 I_n' , K_n' はそれぞれ λ_r に関する一階微分である。さらに、

$$\lambda_r = (2r-1)\pi a / 2H, \quad \eta = z/H (= [0, 1]) \quad \dots\dots(12)$$

であり、 η は流体領域に対する z の無次元化座標である。

円筒殻の運動方程式(7)は、式(8)、式(10.c)～(10.g)および式(11)を用いて次のように得られる。

$$[C]\{X''\} + [D]\{X'\} + [E]\{X\} = \Omega^2([F]\{X\} + \{P\}) \quad \dots\dots(13)$$

ここに、 $(\quad)' = d(\quad)/d\xi$, $\xi (= [0, 1])$ は液体と殻の接触、非接触領域で独立に定義される経線方向座標 x の無次元化座標である。また

$$\{X\}^T = (u, v, w, \bar{\beta}_x, \bar{\beta}_\theta), \quad \{P\}^T = (0, 0, p_w, 0, 0) \quad \dots\dots(14)$$

であり、 $\{P\}$ は液体に接する円筒殻の振動時に、流体との相互作用により発生する外圧力ベクトルで、その非零成分 p_w は式(11)を用いて、

$$p_w = (\rho_f / \rho_s) \cdot (a/h) \cdot q \quad \dots\dots(15)$$

と表される。さらに $[C]$, $[D]$, $[E]$ および $[F]$ は、殻の諸元のみで表される 5×5 次の行列（具体的内容は付録を参照）、 Ω^2 は液体－円筒殻系の固有円振動数パラメータである。

$$\Omega^2 = \rho_s (1 - \nu^2) a^2 \omega^2 / E \quad \dots\dots(16)$$

境界条件の規定に必要な合応力(N_x , $N_{x\theta}$, Q_x)、曲げモーメント(M_x , $M_{x\theta}$)は、それらのFourier係数を(n_x , $n_{x\theta}$, q_x)、(m_x , $m_{x\theta}$)と記せば、次のようにマトリックス表示される。

$$\{T\}^T = [G]\{X'\} + [H]\{X\} \quad \dots\dots(17)$$

ここに、

$$\{T\}^T = (n_x, n_{x\theta}, q_x, m_x, m_{x\theta}) \quad \dots\dots(18)$$

であり、 5×5 次の行列 $[G]$, $[H]$ の成分は付録を参照されたい。

以上により、液体に接する円筒殻の自由振動問題は、微積分方程式を殻の端末で規定される境界条件の基で解く問題に帰着された。

3. 選点法による定式化

ここでは、図－1に示したように液位比 $H_0 = H/L$ が1以下になる場合への適用、および外圧力が未知の半径方向変位 w の積分形で与えられることによる解の精度低下を防止するため、殻を経線に沿って幾つかの要素に分割し、各要素ごとに選点法を適用する。このとき、選点法による空中の回転殻の自由振動問題に対する適用例⁷⁾から判断して、液体との非接触部分を1つの要素で扱い、接触部分を N 個の要素に分割するものとする。

図－2(a)に示すように、例えば内部に流体を有する円筒殻を回転軸に沿って $N+1$ の要素に分割する。液体との非接触要素を(a)要素、接触領域にある k 番目の要素を(f-k)要素と名付ける。以下では非接触、接触領域の諸量にはそれぞれ肩添字(a), (f-k)をつけて区別する。また境界条件が指定される殻の両端を境

界点0, N+1, 分割点を1, 2, ..., Nと番号付けをする。各要素で成立する基礎式(13)の位置に関する独立変数 ξ は $0 \leq \xi \leq 1$ で定義されるものとし、流体領域に対する座標 η は分割点に対応して $0 = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_N = 1$ の座標値が定められるとする。

さて、選点法の適用の準備をして、必要な定義と関係式を述べておこう。

①内部選点と端点； 図-2(b)に示すように各要素の経線に沿って $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_M < \xi_{M+1} = 1$ のM+2個の点を配置する。内部選点 ξ_j ($j=1 \sim M$, M=内部選点数)には、区間[0, 1]で定義されるM次のshifted Legendre多項式の零点を採用する。 $\xi_0=0$ と $\xi_{M+1}=1$ は、境界条件が指定される点や分割点に配置されるもので、端点と呼ぶことにする。

②行列[A]と[B]； 各要素において、 ξ に関する1, 2階微分を内部選点と端点における関数値(変位の値)に結びつける(M+2)x(M+2)次の行列である(具体的な内容は文献7)を参照されたい)。(1)要素の変位成分 $\langle (u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, \bar{\beta}_x^{(1)}, \bar{\beta}_\theta^{(1)}) \rangle$, $l=a$ または $f-k$ の1つを $Z^{(1)}$ と記せば次のような関係式となる。

$$\{Z^{(1)}\} = [A]\{Z^{(1)}\}, \quad \{Z''^{(1)}\} = [B]\{Z^{(1)}\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここに、(M+2)次のベクトル、たとえば $\{Z^{(1)}\}$ は次のようなものである。

$$\{Z^{(1)}\}^T = (Z(\xi_0)^{(1)}, Z(\xi_1)^{(1)}, \dots, Z(\xi_{M+1})^{(1)}) \quad \dots\dots\dots(20)$$

③ $\{Z_0^{(1)}\}$ と $\{Z_e^{(1)}\}$ ； 式(20)は内部選点と端点に関する成分より構成されている。以下ではこれらを分離し、内部選点に関するものには下付き添字cを、端点のそれには下付き添字eを付して表す。

$$\begin{aligned} \{Z_0^{(1)}\}^T &= (Z(\xi_1)^{(1)}, Z(\xi_2)^{(1)}, \dots, Z(\xi_M)^{(1)}) \\ \{Z_e^{(1)}\}^T &= (Z(\xi_0)^{(1)}, Z(\xi_{M+1})^{(1)}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(21)$$

次に式(15)中のqの表示式(11)に現れる積分の離散化表示を考える。積分を補間型数値積分公式⁸⁾によって評価し、各要素の内部選点の位置と積分における分点(標本点)を共有させることにすれば、M次のshifted Legendre多項式の零点を分点とする積分則(Gauss-Legendre型積分則に同等)を用いて次のように表される。すなわち、積分変数 η を液体に接触する各要素に定義される ξ に変換する関係式、

$$\eta^{(f-k)}(\xi) = \eta_{k-1} + \bar{\eta} \cdot \xi, \quad (\bar{\eta} = \eta_k - \eta_{k-1}, k=1 \sim N) \quad \dots\dots\dots(22)$$

を用いて、次のように表現される。

$$\int_0^1 w \sin(\lambda r H \eta / a) d\eta = \sum_{i=1}^N [Y_i^{(f-k, r)}] \{w_0^{(f-k)}\} \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここで、M次の行マトリックス $[Y_i^{(f-k, r)}]$ の成分 $Y_i^{(f-k, r)}(i)$ は次式で与えられる。

$$Y_i^{(f-k, r)}(i) = \bar{\eta} \cdot w_i \cdot \sin(\lambda r H \eta^{(f-k)}(\xi_i) / a), \quad (i=1 \sim M) \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここで、 w_i は重みであり、区間[-1, 1]で定義されるGauss-Legendre型積分則のその半分に等しい。

さて、以上の準備の基に、図-2(a)に示した問題を解くのに必要な5(M+2)(N+1)個の未知数に対する条件は次のように与えられる。

a) 5M(N+1)個の条件式

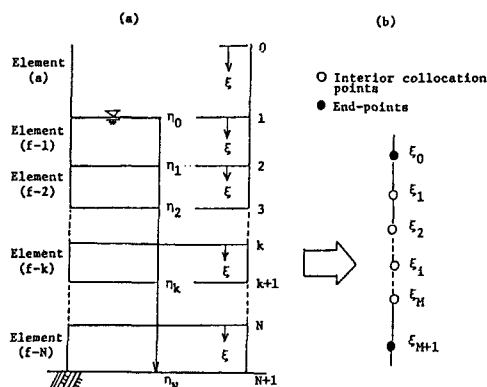


図-2 (a) N+1個の要素への分割；
(b) (k)要素内の選点の配置状況

この条件は、式(13)の内部選点における残差条件より求められ、内部選点と端点における未知量に分離すれば、次のようにマトリックス表示される。

液体と非接触な要素に対して；

$$[\alpha_o^{(a)}]\{\delta_o^{(a)}\} + [\alpha_e^{(a)}]\{\delta_e^{(a)}\} = \Omega^2 [M_o^{(a)}]\{\delta_o^{(a)}\} \quad \dots\dots\dots(25.a)$$

液体と接触する要素に対して；

$$[\alpha_o^{(f-k)}]\{\delta_o^{(f-k)}\} + [\alpha_e^{(f-k)}]\{\delta_e^{(f-k)}\} = \Omega^2 ([M_o^{(f-k)}]\{\delta_o^{(f-k)}\} + \sum_{m=1}^N [M_o^{(f-k,m)}]\{w_o^{(f-m)}\}) , \quad (k=1 \sim M) \quad \dots\dots\dots(25.b)$$

ここで、式(25.b)中の $[M_o^{(f-k,m)}]$ は $M \times M$ 次のマトリックスで、次式で与えられる。

$$[M_o^{(f-k,m)}] = \sum_{r=1}^{\infty} [Y_2^{(f-m,r)}][Y_1^{(f-k,r)}] \quad \dots\dots\dots(26)$$

ただし、 $[Y_1^{(f-k,r)}]$ の成分は式(24)で与えられ、 M 次の列マトリックス $[Y_2^{(f-m,r)}]$ の成分は次のようなものである。

内部問題に対して；

$$Y_2^{(f-m,r)}(i) = \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{a}{h} \frac{2 I_n(\lambda_r)}{\lambda_r I_n'(\lambda_r)} \sin [\lambda_r \frac{H}{a} \eta^{(f-m)}(\xi_i)] , \quad (i=1 \sim M) \quad \dots(27.a)$$

外部問題に対して；

$$Y_2^{(f-m,r)}(i) = - \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{a}{h} \frac{2 K_n(\lambda_r)}{\lambda_r K_n'(\lambda_r)} \sin [\lambda_r \frac{H}{a} \eta^{(f-m)}(\xi_i)] , \quad (i=1 \sim M) \quad \dots(27.b)$$

さらに、式(25)中の $5M$ 次のベクトル $\{\delta_o^{(1)}\}$ と 10 次のベクトル $\{\delta_e^{(1)}\}$ の内容は以下のものである
($l=a, f-1, f-2, \dots, f-N$)。

$$\{\delta_o^{(1)}\}^T = (\{u_o^{(1)}\}^T, \{v_o^{(1)}\}^T, \{w_o^{(1)}\}^T, \{\bar{\beta}_{x_o}^{(1)}\}^T, \{\bar{\beta}_{\theta_o}^{(1)}\}^T) \quad \dots\dots\dots(28.a)$$

$$\{\delta_e^{(1)}\}^T = (\{u_e^{(1)}\}^T, \{v_e^{(1)}\}^T, \{w_e^{(1)}\}^T, \{\bar{\beta}_{x_e}^{(1)}\}^T, \{\bar{\beta}_{\theta_e}^{(1)}\}^T) \quad \dots\dots\dots(28.b)$$

また、 $[\alpha_o^{(1)}]$ および $[\alpha_e^{(1)}]$ は、式(13)に現れる ξ の微分階数に応じて、式(19)のマトリックス $[A]$ 、 $[B]$ の成分で構成されるそれぞれ、 $5M \times 5M$ および $5M \times 10$ 次のマトリックスであり、 $[M_o^{(1)}]$ は殻自体の慣性力の係数マトリックス $[F]$ （式(13)）の係数を成分とする $5M \times 5M$ 次のマトリックスである。なお $[\alpha_o^{(1)}]$ 等の作成要領は文献6,7)を参照されたい。

全要素に対する $5M(N+1)$ 個の条件は、式(25)を用いて、

$$[\alpha_o]\{\delta_o\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} = \Omega^2 ([M_o^s] + [M_o^f])\{\delta_o\} \quad \dots\dots\dots(29)$$

とマトリックス方程式にまとめられる。ここに、

$$[\alpha_o] = \Gamma[\alpha_o^{(a)}], [\alpha_o^{(f-1)}], \dots, [\alpha_o^{(f-N)}] \quad \dots\dots\dots(30.a)$$

$$[\alpha_e] = \Gamma[\alpha_e^{(a)}], [\alpha_e^{(f-1)}], \dots, [\alpha_e^{(f-N)}] \quad \dots\dots\dots(30.b)$$

$$[M_o^s] = \Gamma[M_o^{(a)}], [M_o^{(f-1)}], \dots, [M_o^{(f-N)}] \quad \dots\dots\dots(30.c)$$

$$\{\delta_o\}^T = (\{\delta_o^{(a)}\}^T, \{\delta_o^{(f-1)}\}^T, \dots, \{\delta_o^{(f-N)}\}^T) \quad \dots\dots\dots(30.d)$$

$$\{\delta_e\}^T = (\{\delta_e^{(a)}\}^T, \{\delta_e^{(f-1)}\}^T, \dots, \{\delta_e^{(f-N)}\}^T) \quad \dots\dots\dots(30.e)$$

であり、記号「 $X^{(i)}$ 」($i=a, f-1, \dots, f-N$)はマトリックス「 $X^{(i)}$ 」が対角マトリックス的に構成されることを意味する。さらにマトリックス $[M_o^f]$ はベクトル $\{\delta_o\}$ を構成する $\{\delta_o^{(f-k)}\}$ 中の半径方向変位ベクトル $\{w_o^{(f-k)}\}$ に対応する位置のみに、式(26)で与えられたマトリックス $[M_o^{(f-k,m)}]$ ($k=m=1 \sim N$)が配置されて作成される。なお、 $[M_o^f]$ は殻自体の質量マトリックスに付加される流体の付加質量マトリックスに相当し、液体に接する要素内に配置されたすべての内部選点に関連しているので、このため最終の質量マトリックス $[M](=[M_o^s]+[M_o^f])$ は帯マトリックスにならない。また、 $[M_o^f]$ は式(15)、(27)より明らかなように、殻と液体の密度比(ρ_f/ρ_s)および殻厚と半径の比(h/a)に依存する。

b) 10(N+1)個の条件式

まず10個の条件式は、(a)要素の境界点0における自由条件 ($\{T\}_{\xi=0}=\{0\}$, 式(17)) および(f-N)要素の境界点N+1における固定条件 ($\{X\}_{\xi=1}=\{0\}$, 式(14)) より求められる。

$$[\gamma_{c,0}^{(a)}]\{\delta_{c,0}^{(a)}\}+[\gamma_{e,0}^{(a)}]\{\delta_{e,0}^{(a)}\}=\{0\} \quad \dots\dots(31.a)$$

$$[\gamma_{c,N+1}^{(f-N)}]\{\delta_{c,N+1}^{(f-N)}\}+[\gamma_{e,N+1}^{(f-N)}]\{\delta_{e,N+1}^{(f-N)}\}=\{0\} \quad \dots\dots(31.b)$$

ここに、コンマ(,)の後の下付き添字*i*(=0, N+1)は境界点を表す。 $[\gamma_{c,0}^{(a)}]$ と $[\gamma_{e,0}^{(a)}]$ はそれぞれ式(17)中のマトリックス[G],[H]および式(19)のマトリックス[A]の成分で組立てられる、5x5Mおよび5x10次のマトリックスである。さらに $[\gamma_{c,N+1}^{(f-N)}]$ は5Mx5M次の零マトリックス、 $[\gamma_{e,N+1}^{(f-N)}]$ は、その成分(j, 2j)のみが1で他が零の5x10次のマトリックスである(j=1~5)。

残り10N個の条件式は、分割点*i*(=1~N)で成立する変形量{X} (式(14))と力学量{T} (式(17))の接続条件で与えられる。すなわち、次式より求められる。

$$\{X^{(1)}\}_{\xi=1}=\{X^{(f-i)}\}_{\xi=0}, \quad \{T^{(1)}\}_{\xi=1}=\{T^{(f-i)}\}_{\xi=0} \quad \dots\dots(32)$$

ここに*i*=1~N, 添字*l*は次のように定義されるものとする。

$$i=1 \text{ のとき } l=a; \quad i \geq 2 \text{ のとき } l=f+1-i \quad \dots\dots(33)$$

式(32)の一般形を式(31)に習い求め、マトリックス表示すれば次式となる。

$$[\gamma_{c,i}^{(1)}]\{\delta_{c,i}^{(1)}\}+[\gamma_{e,i}^{(1)}]\{\delta_{e,i}^{(1)}\}+[\gamma_{c,i}^{(f-i)}]\{\delta_{c,i}^{(f-i)}\} \\ +[\gamma_{e,i}^{(f-i)}]\{\delta_{e,i}^{(f-i)}\}=\{0\}, \quad (i=1 \sim N) \quad \dots\dots(34)$$

ここに、 $[\gamma_{c,i}^{(1)}]$ および $[\gamma_{e,i}^{(1)}]$ はそれぞれ、10x5Mおよび10x10次のマトリックス、添字*l*は式(33)の約束に従うものとする。

式(31)および式(34)は次のような1つの方程式にまとめられる。

$$[\gamma_c]\{\delta_c\}+[\gamma_e]\{\delta_e\}=\{0\} \quad \dots\dots(35)$$

ここに、 $[\gamma_c]$ および $[\gamma_e]$ はそれぞれ、5M(N+1)x10(N+1)次および10(N+1)x10(N+1)次のマトリックスである。

c) 固有振動数方程式

式(29)および式(35)より、 $\{\delta_e\}$ を消去すれば、内部選点における未知量 $\{\delta_c\}$ を固有ベクトルとする次の固有振動数方程式が得られる。

$$([\alpha_c]-[\alpha_e][\gamma_e]^{-1}[\gamma_c])\{\delta_c\}=\Omega^2 ([M_c^s]+[M_c^f])\{\delta_c\} \quad \dots\dots(36)$$

なお、本手法は構造を有限要素に分割してモデル化しているため、円筒殻の内外に液体が同時に存在し、それらの液体高さが互いに異なる場合や板厚変化がある場合にも有効である。

4. 数値解析例

本節では、今までに述べた手法の適用例を示す。ただし、 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (20.67x10⁷ kPa), $\rho_s=8.00 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$, $\rho_f=1.02 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$, $\nu=0.3$ および $\kappa=\pi^2/12$ とした。なお、1要素内の内部選点数*M*には、空の回転殻の適用例⁷⁾より判断して*M*=11を採用した。

(1) 本手法の精度

本手法の数値解析精度の検証を目的に、以下に内部問題および外部問題の数値解析結果を示す。

最初にHarounらが行ったF.E.M.による内部問題に対する固有振動解析¹⁰⁾との比較を行う。Harounらが採用した解析モデルは次の2つのタイプ(短形シェル, 長形シェル)である。

Shell(A) [長形シェル] ; $L=H=21.96\text{m}$, $a=7.32\text{m}$, $h=1.09\text{cm}$

Shell(B) [短形シェル] ; $L=H=12.2\text{m}$, $a=18.3\text{m}$, $h=2.54\text{cm}$

表-1 既往研究との比較 (内部問題, $f[\text{Hz}]$)

(a) Shell (A)

Solution procedure	m	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
Present (N=1)	1	3.548	1.638	0.934	0.632	0.531	0.584
Present (N=2)		3.545	1.636	0.933	0.632	0.531	0.584
F.E.M. ¹⁰⁾		3.559	1.65	0.95	0.65	0.55	0.60
Present (N=1)	2	10.338	6.550	4.401	3.162	2.397	1.923
Present (N=2)		10.334	6.579	4.429	3.188	2.421	1.944
F.E.M. ¹⁰⁾		10.450	6.66	4.52	3.28	2.52	2.05

(b) Shell (B)

Solution procedure	m	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
Present (N=1)	1	6.176	5.185	4.138	3.309	2.682	2.209
Present (N=2)		6.177	5.185	4.137	3.309	2.681	2.208
F.E.M. ¹⁰⁾		6.184	5.19	4.14	3.31	2.69	2.21
Present (N=1)	2	11.246	10.516	9.935	9.164	8.255	7.363
Present (N=2)		11.247	10.521	9.933	9.182	8.278	7.388
F.E.M. ¹⁰⁾		11.276	10.60	9.98	9.22	8.32	7.43

表-1に要素数 $N=1$ (要素分割を行っていない)と $N=2$ (等分割)による固有振動数の解析値を示す。円周方向波数 $n=1\sim6$ の経線方向モード次数 $m=1,2$ に対する本解析値は、いずれもHarounらの結果とよい一致を示している。

次に、外部問題に対する解析結果をRayleigh-Ritz

解²⁾および伝達マトリックス解²⁾とともに表-2に示す。数値計算に用いた条件は次のようである。 $L=80.0\text{m}$, $a=40.0\text{m}$, $h=0.4\text{m}$, $H=64.0\text{m}$ 。なおこの問題は液体との非接触部分を有するので、本手法による場合は $N+1$ 個の要素($N=1$ および 2)にモデル化した。波数 $n=3$ のモード次数 $m=2$ に対する本解析値は、厳密解に対して上限値を与えるRayleigh-Ritz解よりも低めの値、伝達マトリックス解よりやや大きめの値を与えており、妥当なものと思われる。

以上のように、かなり分割が粗いにもかかわらず、本手法によっても十分良好な結果が得られるといえよう。以下の解析では、液体との接触領域は要素数 $N=2$ とする。

表-2 既往研究との比較 (外部問題, $f[\text{Hz}]$)

Solution procedure	m	n=0	n=1	n=2	n=3
Present (N=1)	1	6.633	3.596	1.902	1.173
Present (N=2)		6.634	3.595	1.902	1.173
Present (N=1)	2	9.662	7.865	5.614	3.935
Present (N=2)		9.996	7.872	5.624	3.942
M.P.M. ²⁾					3.90
R.R.M. ²⁾					4.10

M.P.M.= Matrix progression method
R.R.M.= Rayleigh-Ritz method

(2) 液体に接する円筒殻の振動特性

液体に接する円筒殻の固有振動数の一般的特性として、固有振動数は①液位比($H_0=H/L$)の増加とともに減少する、②空の円筒殻の場合と異なり、殻厚比(h/a)に大きく依存し、 h/a が小さくなる程低下する(式(15),(17)から明らかなように)等が既に知られている。それゆえ、本節では液体の存在領域のみが異なり、他の条件が同一の内部問題および外部問題を解析し、両問題の数値解析結果から主に固有振動数

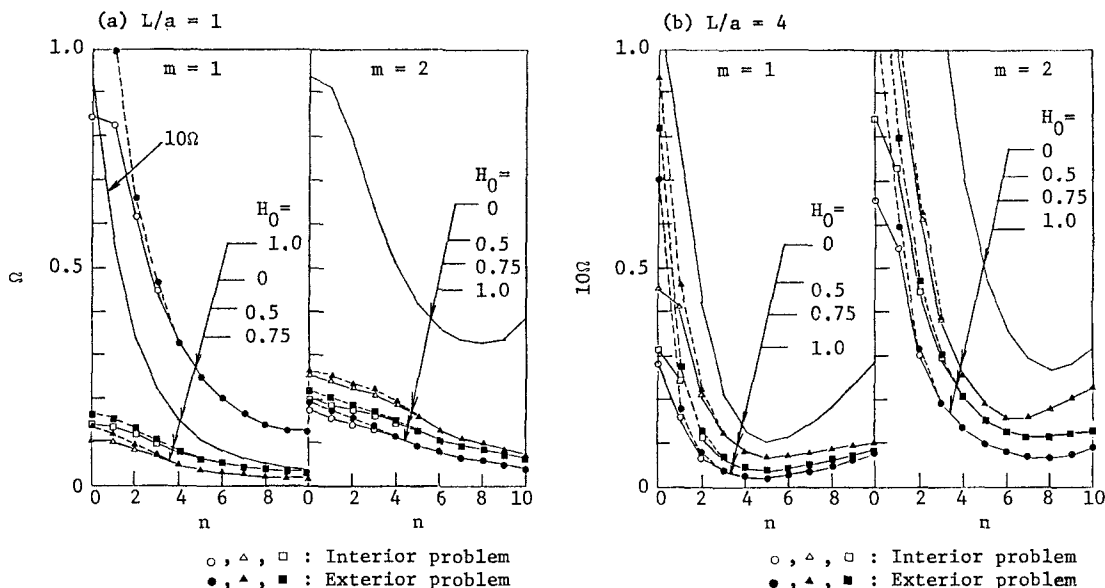


図-3 液高比 H_0 の変化による固有振動数 Ω と円周方向波数 n の関係

の相違を検討する。

図-3には、 $h/a=0.001$ を一定にし、 $L/a=1$ （矩形セル）および $L/a=4$ （長形セル）の場合の固有振動数曲線（液位比 $H_0=0, 0.5, 0.75, 1.0$ のときの周方向波数 n に対する固有振動数の変化）をモード次数 $m=1, 2$ について示した。これをみると、波数 n の小さな領域（ $0 \leq n \leq 4$ ）では、内部問題の固有振

表-3 Ω_E/Ω_I の値（ $L/a=4.0$, $h/a=0.001$ ）

H/L	m	Ω_E/Ω_I						
		n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
0.50	1	2.06	1.14	1.05	1.03	1.02	1.01	1.01
	2	1.26	1.14	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00
0.75	1	2.62	1.13	1.05	1.03	1.02	1.01	1.01
	2	1.44	1.14	1.05	1.02	1.01	1.01	1.01
1.00	1	3.19	1.12	1.05	1.02	1.01	1.01	1.01
	2	1.32	1.13	1.05	1.03	1.02	1.01	1.01

動数 Ω_I は外部問題の振動数 Ω_E より小さいことがわかる。これは、波数が小さいときの殻の変形が内部問題において大きく、したがって液体との相互作用による付加慣性力も増加するからである。なお波数 $n \geq 5$ では、 H_0 および L/a によらず Ω_E/Ω_I の値はほぼ1であるといえる。図では数値的比較が判然としないので、表-3に $L/a=4$ および $H_0=0.5$ における Ω_E/Ω_I の値を整理した。

液体に接する円筒殻では、殻厚比 h/a が固有振動数に大きな影響を与えることは既に触れた。表-4は h/a の Ω_E/Ω_I に与える影響を波数 $n=1$ と $n=5$ について調べたものである。これによると Ω_E/Ω_I は、波数 $n=1$ の場合には殻厚比が小さいほど大きい、 $n=5$ では殻厚比によらずほぼ1である。

表-5は高さ半径の比（ L/a ）の Ω_E/Ω_I に与える影響を波数 $n=1$ と $n=5$ についてみたものである。これによると波数 $n=1$ では L/a によらず外部問題の固有振動数は内部問題のそれより1割程度大きい、波数 $n=5$ ではほぼ1である。

以上より明らかなように、外部問題の固有振動数（ Ω_E ）は内部問題の振動数（ Ω_I ）より大きく、その比は円周方向波数 n の低いときほど大きいことがわかる。しかし、波数 n が高くなれば、殻厚比（ h/a ）、高さ半径の比（ L/a ）によらずほぼ1であることがいえる。 $\Omega_E/\Omega_I \approx 1$ を与える波数 n は、ここで扱った殻諸

表-4 h/a の Ω_E/Ω_I に与える影響
($L/a=4$, $H_0=0.5$)

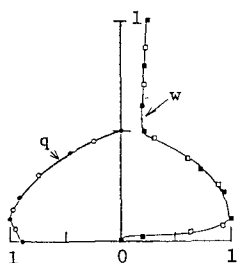
h/a	m	Ω_E/Ω_I	
		$n=1$	$n=5$
0.001	1	1.14	1.05
	2	1.14	1.00
0.005	1	1.08	1.01
	2	1.04	1.00
0.01	1	1.04	1.01
	2	1.07	1.00

表-5 L/a の Ω_E/Ω_I に与える影響
($h/a=0.001$, $H_0=1.0$)

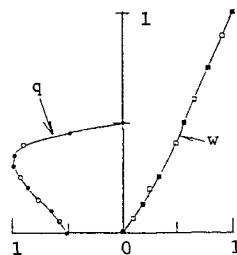
L/a	m	Ω_E/Ω_I	
		$n=1$	$n=5$
0.5	1	1.14	1.03
	2	1.05	1.03
1.0	1	1.17	1.02
	2	1.11	1.02
2.0	1	1.15	1.02
	2	1.15	1.02
4.0	1	1.12	1.01
	2	1.13	1.01
8.0	1	1.11	1.00
	2	1.12	1.01

(a) $L/a = 1$

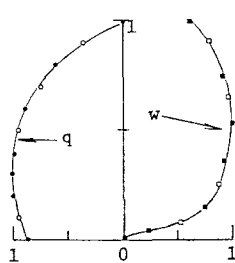
($n=1$, $m=1$, $H_0=0.5$)



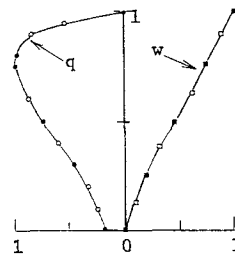
($n=5$, $m=1$, $H_0=0.5$)



($n=1$, $m=1$, $H_0=1$)



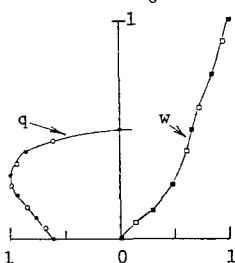
($n=5$, $m=1$, $H_0=1$)



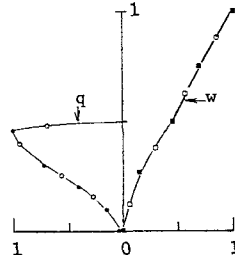
○, □ : Interior problem
●, ■ : Exterior problem

(b) $L/a = 4$

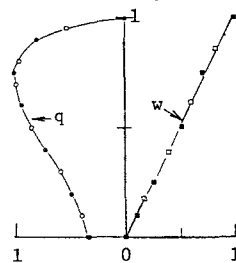
($n=1$, $m=1$, $H_0=0.5$)



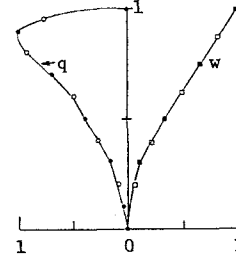
($n=5$, $m=1$, $H_0=0.5$)



($n=1$, $m=1$, $H_0=1$)



($n=5$, $m=1$, $H_0=1$)



○, □ : Interior problem
●, ■ : Exterior problem

図-4 半径方向変位 w および動液圧係数 q の分布形状

元($L/a \leq 8.0$, $h/a \geq 0.001$)より判断すれば、 $n \geq 5$ である。したがって、波数 $n \geq 5$ では既往の内部（外部）問題の振動数特性の研究から外部（内部）のその推定がある程度可能であるといえよう。

図-4には、 $h/a=0.001$ を一定にし、 $L/a=1.0$ および $L/a=4.0$ の場合（液位比 $H_0=0.5$, 1.0 ）の半径方向変位 w のモードおよび動液圧係数 q （式(15)）の形状を示す。図は波数 $n=1, 5$ の場合のモード次数 $m=1$ の結果で、最大値で基準化して示したが、内部および外部問題とも有意な差は認められない。

5. 結 論

液体に接する円筒殻の自由振動解析法として、内部問題および外部問題にも簡便で効果的に適用できる選点法に基づく手法を提示し、さらに両問題の数値解析結果の比較から主に固有振動数特性の検討を行った。その結果、次のことが明らかとなった。

- (1) 本手法による固有振動数は内部および外部問題に対して、既往研究結果とよい一致を示した。
- (2) 外部問題に対する固有振動数 Ω_E は内部問題の振動数 Ω_I より大きく、その比 Ω_E/Ω_I は円周方向波数 n の小さいとき大きい。しかし、波数が大きくなれば、殻厚比 h/a 、高さ・半径比 L/a によらずほぼ1である。
- (3) $\Omega_E/\Omega_I \approx 1$ となる波数 n は、ここで取り扱った殻諸元($L/a \leq 8$, $h/a \geq 0.001$)の基では、 $n \geq 5$ である。このとき、内部問題（外部問題）の研究から外部問題（内部問題）の固有振動数の推定が可能である。

付 録

マトリックス $[C]$, $[D]$, $[E]$, $[F]$ および $[G]$, $[H]$ の非零要素は次のようなものである。

$$\begin{aligned} C(1,1) &= -1/s^2, \quad C(1,4) = C(4,1) = C(4,4) = -\delta/s^2, \quad C(2,2) = -\nu_1/s^2, \quad C(3,3) = \kappa C(2,2) \\ C(2,5) &= C(5,2) = C(5,5) = -\nu_1 \delta/s^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A-1)$$

$$\begin{aligned} D(1,2) &= -D(2,1) = -n\nu_2/s, \quad D(1,3) = -D(3,1) = -\nu/s, \quad D(3,4) = -D(4,3) = -\nu_1 \kappa/s, \\ D(4,5) &= -D(5,4) = -n\delta \nu_2/s \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A-2)$$

$$\begin{aligned} E(1,1) &= (1+\delta)n^2 \nu_1, \quad E(1,4) = E(4,1) = -\delta n^2 \nu_1, \quad E(2,2) = (1+\delta)n^2, \quad E(3,3) = \kappa E(1,1), \\ E(2,3) &= -E(3,2) = -n(1+\delta)(1+\nu_1 \kappa), \quad E(2,5) = E(5,2) = -E(5,5) = -\delta n^2 - \nu_1 \kappa(1+\delta), \\ E(3,5) &= E(5,3) = -n\kappa \nu_1 - (1+\nu_1 \kappa)n\delta, \quad E(4,4) = \nu_1(\delta n^2 + \kappa) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A-3)$$

$$F(1,1) = F(2,2) = F(3,3) = 1, \quad F(1,4) = F(4,1) = F(2,5) = F(5,2) = F(4,4) = F(5,5) = \delta \quad \dots\dots\dots (A-4)$$

$$\begin{aligned} G(1,1) &= b/s, \quad G(1,4) = G(4,1) = G(4,4) = b\delta/s, \quad G(2,2) = \nu_1 b/s, \quad G(3,3) = b\nu_1 \kappa/s, \\ G(2,5) &= G(5,2) = G(5,5) = b\nu_1 \delta/s \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A-5)$$

$$\begin{aligned} H(1,2) &= bn\nu, \quad H(1,3) = b\nu, \quad H(2,1) = -b\nu_1 n, \quad H(3,4) = b\kappa \nu_1, \quad H(4,5) = b\nu n\delta, \quad H(5,4) = -b\nu_1 \delta n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A-6)$$

式(A-1)～(A-6)において、 $\nu_1 = (1-\nu)/2$, $\nu_2 = (1+\nu)/2$, $b = 1/(1-\nu^2)$, $\delta = h^2/12a^2$, および $s = l/a$ (l = 要素長) である。

参考文献

- 1) 坂井藤一：液体貯槽の耐震設計研究に関する現状と課題，土木学会論文集，第362号／I-4，pp. 1-11，1985.

- 2) 濱本卓司・田中弥寿雄：固定式海洋円筒シェルの動的解析・その1固有振動解析，日本建築学会論文報告集，第291号，pp.129-141，1980.
- 3) Leissa, A.W.: Vibration of Shells, NASA SP-288, 1973.
- 4) Komatsu, K.: Fluid-Structure Interaction, Progress in Boundary Element Method, Vol.2, pp. 182-199, 1982.
- 5) Magrab, E.B.: Vibrations of Elastic Structural Members, Sijhoff & Noordhoff, 1979.
- 6) 三上 隆・芳村 仁：選点法による固有値問題の解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第10巻，pp.10-15，1986.
- 7) 三上 隆・芳村 仁：選点法による回転殻の固有振動数の解析，土木学会論文報告集，第335号，pp.69-78，1983.
- 8) Davis, P.J. and Rabinowitz (森 正武訳)：計算機による数値積分法，日本コンピュータ協会，1980.
- 9) 三上 隆・芳村 仁：選点法による回転殻の応力波伝播問題の解析，土木学会論文集，第374号／I-6，pp.319-328，1986.
- 10) Haroun, M.A. and Housner, G.W.: Complications in free vibration analysis of tanks, Proc. ASCE, Vol.108, No.EM2, pp.801-818, 1982.

(1987年10月16日受付)