

## 構造物の振動の最適制御に関する数値解析

## NUMERICAL ANALYSIS FOR OPTIMAL CONTROL ON VIBRATIONS OF STRUCTURES

田中裕二<sup>\*</sup> 川原睦人<sup>\*\*</sup>

By Yuji TANAKA and Mutsuto KAWAHARA

In recent years, a number of the research works of earthquake resistance structures have been carried out. In this paper, several numerical techniques to solve optimal control problems are compared using one degree of freedom system. These techniques are Fletcher-Reeves method, Sakawa-Shindo method, dynamic programming, Ritz method and the use of Riccati matrix. An example for the optimal control for a system of one degree of freedom is solved. Computational time and core storage requirement are compared.

## 1. はじめに

構造物の耐震設計の研究は、近年、多くの進歩がみられるが、特に免震構造の研究が盛んになってきている。さらにこれを一步進めて、構造物に作用する外力に対して、逆向きに制御力を作用させ、構造物を積極的に制御しようとする方法が、検討され始めている。<sup>1) 2)</sup> これは、電機電子工学の分野で発達している最適制御理論を応用し、構造物に対する最適制御をほどこす方法を検討しようとするものである。周知のごとく制御理論には、レギュレータ問題とトラッキング問題とがある。構造物の最適制御を行なうためには、地震外力を考慮しなければならないので、いわゆるトラッキング問題となる。この問題の解法に当たって、従来から提案されている方法のうち、どのような方法が適した方法であるかの検討が必要となる。このため本研究では、集中質量をもつ一自由度系の構造物に、外力として余弦波地動が働いた場合の最適制御を例として、今日多数発表されている解法の中から、リカッチの微分方程式を利用する方法、共役勾配法 (Fletcher-Reeves法)<sup>3)</sup>、Sakawa-Shindoによる方法<sup>4)</sup>、ダイナミックプログラミングを用いる方法<sup>5)</sup>、リッツ法、の5つをとりあげそれぞれの有効性を数値解析的立場より比較検討を行なったので報告する。

---

\* 中央大学 大学院 理工学部土木工学科 (〒112 東京都文京区春日1-13-27)

\*\* 工博 中央大学 教授 理工学部土木工学科 (〒112 東京都文京区春日1-13-27)

## 2. 運動方程式

構造物に地震動が作用した場合の運動方程式は、制御力を考慮すると次のように書表わすことができる。

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = u - M\ddot{x} \quad (1)$$

ここで、 $M$  は質量行列、 $C$ 、 $K$  は粘性行列、剛性行列で、 $u$  は制御力ベクトル、 $y$  は、変位ベクトル、 $\ddot{x}$  は地震加速度である。

式(1)は、変数を  $x^T = (y, \dot{y})$ 、 $\dot{x}^T = (\dot{y}, \ddot{y})$  のように変換すると、次のように表わすことができる。

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f(t) \quad (2)$$

ここで  $x(t)$  は、第  $t$  時間点における変位と速度を表わす状態ベクトル、 $A$  は  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -KM^{-1} & -CM^{-1} \end{bmatrix}$ 、 $B$  は  $\begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}$ 、 $f(t)$  は  $\begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{x} \end{bmatrix}$  であり、 $u(t)$  は制御力を表わす。

初期条件は、次式とする。

$$x(t_0) = \hat{x}_0 \quad (3)$$

次に最適制御の評価関数として、応答  $x$  と制御力  $u$  のエネルギー量として次の関数を設定する。

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t)Sx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (4)$$

ここで  $S$ 、 $R$  は重み係数行列、 $t_0$ 、 $t_f$  は制御時間の始点、終点である。この研究では式(4)を最少にする状態を最適状態と呼ぶ事にする。すなわち、地震動を受ける構造物の最適制御問題は、(2)(3)式の状態のもとで、(4)式が最少になるような操作量を決定する問題として定式化される。これは、式(2)に非同次項  $f(t)$  を含んでいるので、トラッキング問題と言われている。この制御問題の解析に当たっては、多くの方法が考えられているが、本研究では、次下に示す5つの方法により検討を行なった。

## 3. リカッチの微分方程式を利用する方法。

これは、最も基本的な解析法である。

乗数ベクトル  $p$  を導入し、ハミルトニアン  $H$  を次のように定義する。

$$H = \frac{1}{2}x^T Sx + \frac{1}{2}u^T Ru + p^T(Ax + Bu + f) \quad (5)$$

オイラーの方程式より、

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Sx - A^T p \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T p = 0 \quad (7)$$

であるから、式(7)より最適操作量  $u$  は、

$$u = -R^{-1}B^T p \quad (8)$$

となる。横断性の条件より

$$p(t_f) = 0 \quad (9)$$

である。式(8)を式(2)に代入すれば

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T p + f \quad (10)$$

$$\dot{p} = -Sx - A^T p \quad (11)$$

となる。式(9)～(11)と初期条件は、2点境界値問題である。これを解くためにリカッチの微分方程式を利用する。

今、変数  $p(t)$  を次のように変換する。

$$p(t) = K(t)x(t) + q(t) \quad (12)$$

ここで、 $K(t)$  は対称行列であり、リカッチ行列と呼ばれている。 $q(t)$  は外力  $f(t)$  の影響を表わすベクトルである。

式 (12) を式 (10)、(11) に代入すれば

$$-\dot{K} = KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + S, \quad K(t_f) = 0 \quad (13)$$

$$-\dot{q} = Kf + (A^T - KBR^{-1}B^T)q, \quad q(t_f) = 0 \quad (14)$$

となる。逆時間で積分するため、 $t = t_f - \tau$  とおき、変数  $V(\tau) = K(t_f - \tau)$ 、

$\omega(\tau) = q(t_f - \tau)$ 、 $d(\tau) = f(t_f - \tau)$  とすれば、式 (13)、(14) は、次式ようになる。

$$\dot{V}(\tau) = VA + A^TV - VBR^{-1}B^TV + S, \quad V(0) = 0 \quad (15)$$

$$\dot{\omega}(\tau) = Vd + (A^T - VBR^{-1}B^T)\omega, \quad \omega(0) = 0 \quad (16)$$

式 (15)、(16) をルンゲ・クッタ法で解くと、 $K$  と  $q$  が定まり、式 (8) の  $u$  が求められる。求められた最適操作量  $u$  を式 (2) に代入し、再びルンゲ・クッタ法で解くと状態変数  $x$  が求められる。

#### 4. 共役勾配法 (Fletcher-Reeves 法)

これは、繰返し計算によって最少値を求める方法である。

初めに最適操作量の予想値  $u_0(t)$  を与えて、式 (2)、(3) を解き、 $x_0(t) = x(t; u_0)$  を得る。次に式 (6)、(9) を逆時間で解き、 $p_0(t) = p(t; u_0)$  を得る。この2つより評価関数  $J$  の勾配を計算し、最適操作量の予想値  $u(t)$  を修正し解を得る方法である。

以下に共役勾配法のアルゴリズムを示す。

(I) 最適操作量の予想値  $u_0(t)$  を与える。

(II) 式 (2)、(3) を解き  $x_0(t) = x(t; u_0)$  を得る。次に式 (6)、(9) を  $t = t_f$  から  $t = t_0$  まで逆時間で解き、 $p_0(t) = p(t; u_0)$  を得る。

$$\text{評価関数の勾配 } J_u = -H_u \quad (17)$$

として計算し、 $s_0 = J_{u_0}$  とする。 $i = 0$  とおく。

(III)  $i = 0$  のときは、(IV)へ、

$i \geq 1$  のとき

$$\beta = \frac{(J_{u_i}, J_{u_i})}{(J_{u_{i-1}}, J_{u_{i-1}})} \quad (18)$$

を求めて、 $s_i = -J_{u_i} + \beta_i s_{i-1}$  とおく。

(IV)  $J(u_i + \alpha_i s_i)$  を最小にする  $\alpha$  を求める。

$u_{i+1} = u_i + \alpha_i s_i$  とおく。

(V)  $x_{i+1}(t) = x(t; u_{i+1})$ 、 $p_{i+1}(t) = p(t; u_{i+1})$  を (II) と同様に計算し、 $J_{u_{i+1}}$  を計算する。

(VI)  $J_{u_{i+1}}$  が 0 に十分近ければ計算をストップし、そうでなければ  $i = i + 1$  としてステップ (III) にいく。

## 5. Sakawa, Shindoによる方法

Sakawa, Shindoによる方法は、共役勾配法の発散を抑えるために、ハミルトニアン  $H_i$  を次のように変形する方法を提案している。

$$K_i = H_i + (u_i - u_{i-1})^T C_i (u_i - u_{i-1}) \quad (19)$$

ここで  $C_i$  は、非負の定数を対角要素とする対角行列である。  $u$  について拘束条件がないものとし、これを用いて最適条件を求めると、

$$\frac{\partial K}{\partial u_i} = Ru_i(t) + B^T p_{i-1}(t) + 2C_i u_i(t) - 2C_i u_{i-1}(t) \quad (20)$$

となる。

式(20)より操作量  $u_i$  は次のようになる。

$$u_i(t) = -[R + 2C_i]^{-1}(B^T(t)p_{i-1}(t) - 2C_i u_{i-1}(t)) \quad (21)$$

式(21)より最適操作量の予想値  $u_0(t)$  を修正し解を得る方法である。

以下に坂和、進藤による方法のアルゴリズムを列記すると、次のようになる。

- (I) 最適操作量の予想値  $u_0(t)$  を与え式(2)、(3)を解き  $x_0(t) = x(t; u_0)$  を得る。  $i = 1$  とする。
- (II) 評価関数  $J(u_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x_0^T S x_0 + u_0^T R u_0) dt$  の値を計算する。
- (III)  $x_{i-1}(t)$  と式(6)、(9)より  $p_{i-1}(t) = p(t; x_{i-1})$  を得る。
- (IV) 式(21)より  $u_i(t)$  を求める。
- (V)  $\sum_{k=1}^T \|u_i(k) - u_{i-1}(k)\|$  を計算し0に十分近ければ計算をストップする。
- (VI)  $u_i(t)$  と式(2)、(3)より  $x_i(t) = x(t; u_i(t))$  を得る。
- (VII) 評価関数  $J(u_i) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x_i^T(t) S x_i(t) + u_i^T(t) R u_i(t)) dt$  を計算する。
- (VIII)  $J(u_i) - J(u_{i-1}) > 0$  なら  $C_i$  を大きくしてステップ(IV)へもどる。  
 $J(u_i) - J(u_{i-1}) \leq 0$  なら  $i = i + 1$  としてステップ(III)へもどる。

## 6. ダイナミックプログラミングを用いる方法

式(2)、(4)を各々について、時間方向について離散化を行ない、0段から  $N-1$  段までの制御段階  $N$  段の最適制御問題と考える。ダイナミックプログラミングの手法に基づき定式化を行なうと、最適操作量は、 $n$  の関数として、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} u(N-n) = & -(R + B^T W_{n-1} B)^{-1} B^T [W_{n-1} A x(N-n) \\ & + W_{n-1} C(N-n) \\ & + Y_{n-2} W_{n-2} C(N-(n-1)) \\ & + Y_{n-2} Y_{n-3} W_{n-3} C(N-(n-2)) \\ & + Y_{n-2} Y_{n-3} Y_{n-4} W_{n-4} C(N-(n-3)) \\ & \vdots \\ & + Y_{n-2} Y_{n-3} Y_{n-4} Y_{n-5} Y_{n-6} \cdots Y_0 W_0 C(N-1)] \end{aligned}$$

ただし  $W_0 = S$

$$W_n = S + A^T W_{n-1} A - A^T W_{n-1} B (R + B^T W_{n-1} B)^{-1} B^T W_{n-1} A$$

$$Y_n = A^T - A^T W_n B (R + B^T W_n B)^{-1} B$$

## 7. リッツ法

これは、繰返し計算によって最小値を求める方法である。

操作量  $u$  を次のように仮定する。

$$u = \Phi a = b_1 \phi_1(t) + b_2 \phi_2(t) + \dots + b_r \phi_r(t) \quad (23)$$

次に (4) を次のように変形する。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) S x(t) dt + \frac{1}{2} a^T \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t) R \Phi(t) dt a \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) S x(t) dt + \frac{1}{2} a^T M a \end{aligned} \quad (24)$$

ただし  $M = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t) R \Phi(t) dt$  とする。

$x$  の  $a$  に対する勾配  $x_a$  は次のようになる。

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B \Phi a + f(t) \quad (25)$$

$$\dot{x}_a(t) = A x_a(t) + B \Phi \quad (26)$$

評価関数  $J$  の  $a$  に対する勾配  $J_a$  は次のようになる。

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} d^T x_a S x dt + \frac{1}{2} (a^T M d + d^T M a) + \alpha (d^T M d) \equiv 0 \quad (27)$$

式 (25) より右辺第 1 項を  $C$  とおくと、 $\alpha$  は次のようになる。

$$\alpha = \frac{C + \frac{1}{2} (a^T M d + d^T M a)}{d^T M d} \quad (28)$$

以下にリッツ法のアルゴリズムを示す。

- (I)  $a_0$  を与える。  $i = 0$  とする。
- (II) 式 (26) より  $x_a = x_a(t; \Phi)$  を得る。
- (III) 式 (25) より  $x_0 = x(t; a_0)$  を得る。
- (IV)  $d_0 = -J_a(a_0)$  とする。
- (V) 式 (27) より  $\alpha_i$  を得る。
- (VI)  $a_{i+1} = a_i + \alpha_i d_i$
- (VII) 式 (25) より  $x_{i+1} = x(t; a_{i+1})$  を得る。
- (VIII) 式 (24) より  $J(a_{i+1})$  を得る。
- (IX)  $|J(a_{i+1}) - J(a_i)|$  が十分 0 に近ければ計算をストップする。
- (X)  $i = n - 1$  ならステップ (XII) へ行く。
- (XI)  $J_a(a_{i+1})$  を計算する。
- (XII) 
$$\beta_i = \frac{(J_a^T(a_{i+1}), J_a(a_{i+1}))}{(J_a^T(a_i), J_a(a_i))}$$
 を求め  $d_{i+1} = -J_a(a_{i+1}) + \beta_i d_i$  とする。  $i = i + 1$  としてステップ (V) へもどる。
- (XIII) 新しい  $a_0$  を決め  $i = 0$  としてステップ (III) へもどる。

## 8. 解析例

バネ定数  $K = 1000 \text{ (ton/m)}$ 、減衰定数  $h = 0.01$ 、重量  $W = 10 \text{ (ton)}$  の1自由度系の片持ちばりに加速度  $\ddot{x} = 300 \cos \omega t \text{ (cm/s}^2\text{)}$ 、 $\omega = 20 \text{ (rad/s)}$  の地動が作用する場合について解析する。ここで  $m$  は構造物の質量、 $y$  は構造物の支点からの変位、 $\phi$  は地動変位、 $u$  は操作量である。重み係数行列  $S$  を単位行列とし  $R$  の値が  $1.0 \times 10^{-3}$ 、 $1.0 \times 10^{-4}$ 、 $1.0 \times 10^{-5}$  の3つの場合について解析を行なった。

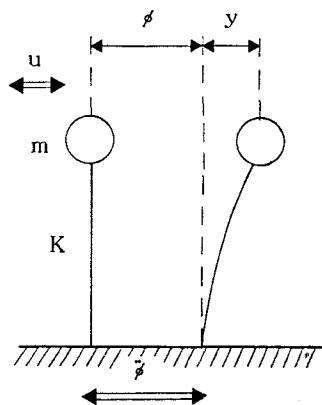


図-1

## 9. 解析結果

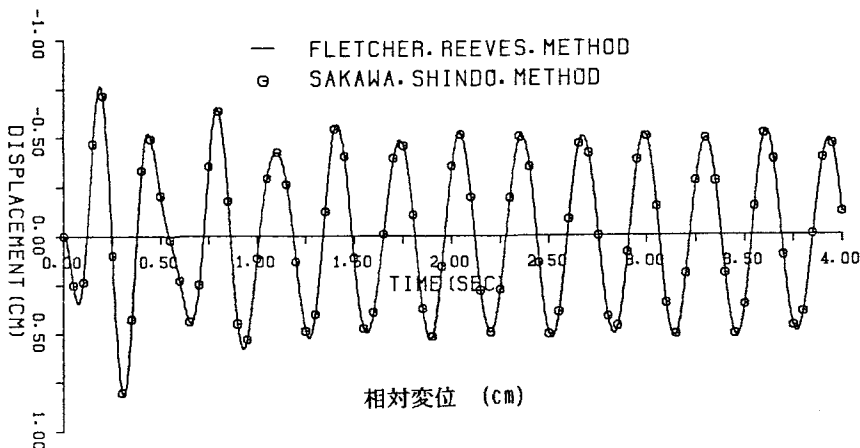
表-1は、図-1の構造について最適制御解析を行なった場合の時間を、比較したものである。いずれの方法でも相対変位、相対速度、及び最適操作量とも同一の計算結果を得ている。

| Rの値                  | リカッチ式                | 共役勾配法                | S. S                 | D. P                 | リッツ法                 |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $1.0 \times 10^{-3}$ | 0.9                  | 157.3                | 9.6                  | 1.1                  | 7.3                  |
| $1.0 \times 10^{-4}$ | 0.9                  | 159.8                | 29.0                 | 1.1                  | 7.6                  |
| $1.0 \times 10^{-5}$ | 0.9                  | 709.2                | 139.4                | 1.1                  |                      |
| 時間間隔                 | $1.0 \times 10^{-3}$ | $2.0 \times 10^{-3}$ | $2.0 \times 10^{-3}$ | $2.0 \times 10^{-2}$ | $2.0 \times 10^{-3}$ |

S. S Sakawa.Shindo  
による方法  
D. P ダイナミック  
プログラミング

表-1 計算時間 (sec.)

$R = 1.0 \times 10^{-3}$  のときの構造物の相対変位、相対速度、及び最適操作量の共役勾配法と Sakawa. Shindoによる方法での解析結果を図-2に示す。



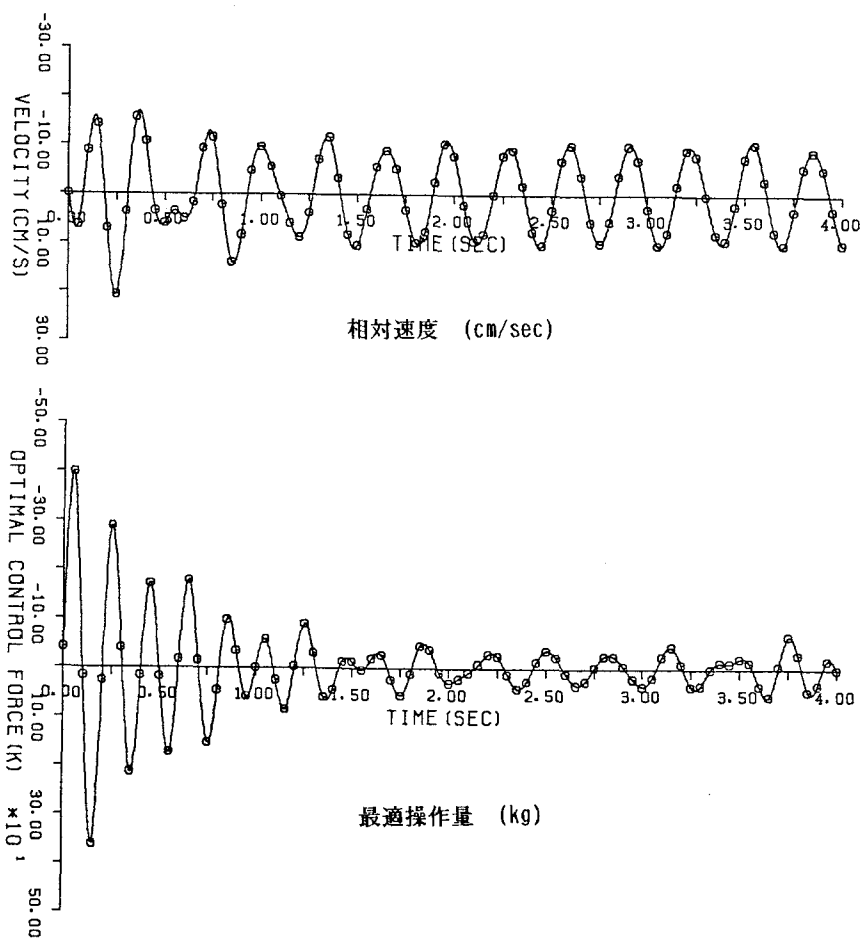


図-2

## 10. 結論

上記の計算結果よりトラッキング問題の数値解析法として、次の事が結論される。

リカッチの微分方程式を利用する方法は、計算時間や解析精度の面からみて有効な手法と考えられる。しかしこの手法は、トラッキング問題の場合、対象とする構造の自由度が増大すると記憶容量を非常に多く必要とするので、実際問題では、実用化するのは、難しいと考えられる。

共役勾配法は、計算時間の面からみると5つの手法の中で一番劣っている。しかし問題の自由度が増大しても、記憶容量がほとんど線形に増大する程度であるので実用的には、電子計算機の容量に制約のある場合きわめて有利と考えられる。

Sakawa, Shindoによる方法は、計算時間、記憶容量とも優れている。しかしこの手法は、調整パラメータ  $C_i$  の値を適切に選ぶ必要がある。これは、問題ごとに異なってくることになり、またこれが

適切でないと言算時間が増大する事がある。また重み  $R$  の値の変化によって収束するまでの時間が変化するという欠点がある。

ダイナミックプログラミングを用いる方法は、時間間隔  $\Delta t$  を他の手法と比べて相当に大きくとることができる。なおダイナミックプログラミングでは、時間間隔が大きくなるほど、急激に計算時間が減少する特色がある。

最後にリッツ法であるが、この手法は最適操作量に近似した基底関数系を与えなければならず実用上では難があるように思われる。しかし操作量がどのような近似関数で表わすことができるのかを知るのには、有効な手法であると考えられる。

#### 参考文献

- 1) Jann N. Yang, M. ASCE & Mingchien J. Liu: OPTIMAL CRITICAL-MODE CONTROL OF BUILDING UNDER LOAD, EM6, p. 1167 ~ 1185, (1982)
- 2) J. RODELLAR & A. H. BARBAT: Digital control of structures subjected to seismic actions, NUMETA, p. 281 ~ 290 (1985)
- 3) 嘉納秀明: システムの最適理論と最適化, コロナ社, (1987)
- 4) 坂和愛幸: 最適化と最適制御, 数学ライブラリー53, 森北出版, (1980)
- 5) 深沢恵志 川原睦人: トラッキング問題に関するダイナミックプログラミングの応用  
昭和62年9月 土木学会第42回年次学術講演会概要集

(1988年1月22日受付)