

面内曲げを受ける曲線平板の座屈特性

Buckling of an Annular Sector Plate Subjected to Inplane Moment

夏秋義広*、高橋和雄**、小西保則***、平川倫明****

By Yoshihiro NATSUAKI, Kazuo TAKAHASHI, Yasunori KONISHI and Michiaki HIRAKAWA

Buckling of an annular sector plate subjected to equal and opposite moments at the radial edges is examined. The governing differential equation of the plate is solved by a Galerkin method. Buckling moments and buckling modal shapes are obtained for the annular sector plate with radial edges simply supported and arbitrary boundary conditions along the circular edges.

Numerical results are shown for various boundary conditions along the circular edges and geometrical parameters of the annular sector plate and are compared with the buckling moments of the rectangular plate.

1. はじめに

面内変動荷重が平板構造に作用すると、比較的小さい荷重振幅のもとで、係数励振による面外振動（動的安定性）が生ずることが知られている¹⁾。著者らは、動的安定性の立場からケーブル²⁾、プレートガーダーの腹板³⁾などの面外振動の発生条件およびその振幅を明らかにしている。現在、アーチ系橋梁の腹板やラーメン構造の隅角部などに使用される曲線平板の基本構造である扇形板に面内変動曲げが作用したときの動的安定性解析に着手している。

動的安定性を取扱う場合、まず、扇形板の固有振動特性と静的曲げを受ける場合の座屈特性を明らかにしておく必要がある。扇形板の振動問題に関しては数多くの論文が見受けられる⁴⁾が、座屈問題に関する研究は少ない。一様な圧縮力を受ける場合を取り扱ったRubin⁵⁾、Srinivasanら⁶⁾の研究、薄肉I断面曲がりばりの扇形腹板を対象としたChu⁷⁾および三上ら⁸⁾の研究が見受けられる程度である。これらのうち、Chuおよび三上らは充腹アーチや鋼ラーメン隅角部に見受けられる薄肉I断面曲がりばりの腹板を扇形板と

* 棚片山鉄工所 橋梁設計部 〒551 大阪市大正区南恩加島6丁目2-21

(長崎大学大学院学生 海洋環境建設学講座)

** 工博 長崎大学助教授 工学部土木工学科 〒852 長崎市文教町1-14

*** 工博 長崎大学教授 工学部土木工学科 〒852 長崎市文教町1-14

****長崎大学大学院学生 工学部土木工学科 〒852 長崎市文教町1-14

してはじめて取り扱った研究である。すなわち、 Chu は曲げ、せん断および軸力を受けるI断面曲がりばりの扇形腹板の局部座屈をRitz法を用いて解析し、開き角 90° の場合について座屈特性を明らかにしている。また、三上らは、薄肉I断面曲がりばりが曲げを受ける場合について、腹板の局部座屈およびフランジとの連成座屈をべき級数法を用いて定式化し、円弧辺が単純支持と固定の場合の座屈特性を明らかにしている。以上の研究によって、扇形板の座屈特性はかなり明確になっている。しかし、これらの研究は、薄肉I断面曲がりばりの腹板を対象としているために、一枚の扇形板としての特性の評価は十分とは言えないようである。

そこで、本研究では、一枚の独立した直線辺が単純支持された扇形板に面内曲げが作用する場合を対象に、二次元弾性論から得られる面内力分布を用いて、平板の基礎方程式をGalerkin法を用いて解析するものである。解析にあたっては、動的安定性を取り扱うのに適した形となるように、扇形板の自由振動の基準関数を採用して離散化を行う。数値解析において、解の収束性および精度を検討した後、円弧辺が単純支持、固定および自由の3種類の境界条件をもつ扇形板の座屈特性を内外径比をパラメーターに、座屈曲げと縦横比との関係を明らかにし、長方形板との特性の比較および円弧辺が自由な場合に、はり理論による円弧アーチの横振じれ座屈特性と比較するものである。

2. 基礎式および境界条件

(1) 面内曲げを受ける扇形板の基礎式

図-1に示すような外径 a 、内径 b 、開き角 α の扇形板を考える。この扇形板の直線辺 AC 、 BD に面内曲げモーメント M が作用している。座標系として、図に示すような極座標系 (r, θ) を採用する。

図のように辺 AC 、 BD に面内曲げ M が作用する場合の面内方向の境界条件は次のように与えられる。

円弧辺 ($r=b, a$): $N_r = 0$

直線辺 ($\theta=0, \alpha$): $\int_b^a N_\theta dr = 0$,

$$\int_b^a N_\theta r dr = M \quad (1)$$

全周辺: $N_{r\theta} = 0$

ここに、 N_r, N_θ : r 方向, θ 方向の面内力、 $N_{r\theta}$: せん断力

平板中央面の面内力 $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$ は二次元弾性論によれば次のように与えられる³⁾。

$$N_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{a}{b} + a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 \ln \frac{b}{r} \right) \quad (2)$$

$$N_\theta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{a}{b} + a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 \ln \frac{b}{r} + a^2 - b^2 \right) \quad (3)$$

$$N_{r\theta} = 0 \quad (4)$$

ここに、 $N = (a^2 - b^2)^2 - 4a^2 b^2 (\ln(a/b))^2$

式(2), (3), (4)から明らかなように、面内力 $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$ の分布は θ に無関係(軸対称)である。

微小扇形要素のつりあい式は次のように与えられる。

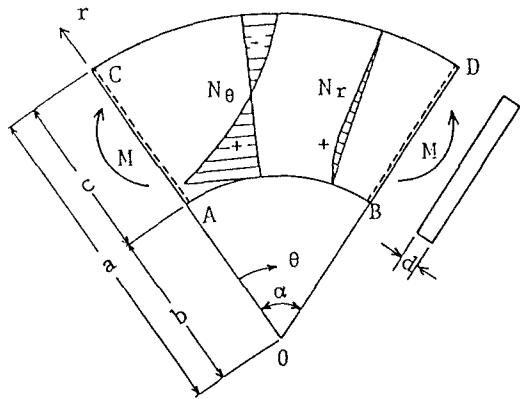


図-1 一般図および座標系

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(M_\theta) - M_\theta - rQ_r = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(M_\theta) + M_{r\theta} - rQ_\theta = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[rN_r \frac{\partial w}{\partial r} + N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + rQ_r\right] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r}N_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} + Q_\theta\right] = 0 \quad (7)$$

ここに、 M_r, M_θ : r, θ 方向の曲げモーメント、 $M_{r\theta}$: ねじりモーメント、 w : たわみ、 Q_r, Q_θ : せん断力

式(5), (6), (7)のつりあい式を満たす扇形板の座屈の基礎式は次のように与えられる。

$$D\nabla^4 w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(rN_r \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r}\right)\right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}N_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \quad (8)$$

ここに、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 、 $D = E d^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$: 板剛度、 E : ヤング率、 ν : ポアソン比

面内曲げを受ける場合の面内力は θ に無関係であること、および $N_{r\theta} = 0$ の条件を考慮すると、式(8)は次のように簡略化される。

$$D\nabla^4 w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(rN_r \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} N_\theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (9)$$

(2) 境界条件

図-1の扇形板の境界条件は、直線辺(載荷辺)を単純支持とし、円弧辺については、次の3ケースを考える。すなわち、

直線辺 ($\theta = 0, \alpha$)

$$w = 0, M_\theta = 0 \quad (10)$$

円弧辺 ($r = b, a$)

$$\text{case I (単純支持)} \quad w = 0, M_r = 0 \quad (11)$$

$$\text{case II (固定)} \quad w = 0, \partial w / \partial r = 0 \quad (12)$$

$$\text{case III (自由)} \quad M_r = 0, V_r = 0 \quad (13)$$

ここに、 V_r : 換算せん断力

(3) 無次元化

解析に先立って、変数 r を扇形板の外径 a を用いて無次元化する。すなわち、

$$\xi = r / a \quad (14)$$

このとき、式(9)は次のように書き改められる。

$$L(w) = \nabla^4 w + \frac{4M}{ND} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \xi f_1(\xi) \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{\xi^2} f_2(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (15)$$

ここに、 $L(w)$: 微分演算子、 $\bar{N} = (1 - \beta^2)^2 - 4\beta^2 (\ln(1/\beta))^2$ 、 $\beta = b/a$ (内外径比)

$$f_1(\xi) = \frac{\beta^2}{\xi^2} \ln \frac{1}{\beta} + \ln \xi + \beta^2 \ln \frac{\beta}{\xi}, f_2(\xi) = -\frac{\beta^2}{\xi^2} \ln \frac{1}{\beta} + \ln \xi + \beta^2 \ln \frac{\beta}{\xi} + 1 - \beta^2$$

3. 解法

式(15)は変数係数の微分方程式であるから、厳密解を求めることは不可能である。本論文では、Galerkin法による近似解法を用いる。すなわち、式(15)の一般解を次のように仮定する。

$$w = \sum a_{sn} W_{sn}(\xi, \theta) \quad (16)$$

ここに、 a_{sn} ：未定定数、 W_{sn} ：境界条件を満足する座標関数、 $n=1, 2, \dots$

式(16)の座標関数として、扇形板の自由振動の基準関数を用いる。自由振動の基準関数には直交性が成り立つために、演算の一部が簡潔になる。また、次の研究段階である面内変動曲げを受ける扇形板の動的安定性の解析の際、少ない項数で高精度の解が得られることが期待される。 $W_{sn}(\xi, \theta)$ は次のように表わされる¹⁰⁾。

$$W_{sn}(\xi, \theta) = R_{sn}(\xi) \sin \alpha_n \theta \quad (17)$$

ここに、 $R_{sn} = A_{sn} J_{\alpha_n}(k_{sn} \xi) + B_{sn} Y_{\alpha_n}(k_{sn} \xi) + C_{sn} I_{\alpha_n}(k_{sn} \xi) + D_{sn} K_{\alpha_n}(k_{sn} \xi)$ 、 $A_{sn}, B_{sn}, C_{sn}, D_{sn}$ ：境界条件によって定まる定数、 $k_{sn} = \sqrt{(\rho d a^4 \omega_n^2 / D)}$ ： s 次振動の固有値、 $J_{\alpha_n}, Y_{\alpha_n}$ ： α_n 次の第1種、第2種 Bessel関数、 $I_{\alpha_n}, K_{\alpha_n}$ ：変形された α_n 次の第1種、第2種 Bessel関数、 $\alpha_n = n\pi/\alpha$ 、 ω_n ：固有円振動数、 n ： θ 方向の半波数、 s ： r 方向の振動次数

扇形板の基準関数 W_{sn} に関して、次式が成り立つ。

$$\nabla^4 W_{sn} = k_{sn}^4 W_{sn} \quad (18)$$

式(16)を式(15)に代入して、式(18)の關係を用いれば、

$$L(w) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{sn} k_{sn}^4 W_{sn} + \frac{4M}{ND} \sum_{s=1}^{\infty} a_{sn} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \xi f_1(\xi) \frac{\partial W_{sn}}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{\xi^2} f_2(\xi) \frac{\partial^2 W_{sn}}{\partial \theta^2} \right] \quad (19)$$

式(16)は仮定した解で、式(15)の厳密解ではない。したがって、式(19)の右辺は一般にゼロにならない。そこで、仮定した基底関数が不平衡力に対して仕事をしないという条件を用いる。これは、微分方程式の近似解法として知られている Galerkin 法に対応する。つまり、

$$\int_{\beta}^1 \int_0^{\alpha} L(w) W_{pn} \xi d\xi d\theta = 0 \quad (20)$$

ここに、 $p=1, 2, \dots$

Appendix A に示すような固有振動形の直交性および定積分の演算を部分積分を用いて簡潔にすると、次式が得られる。

$$k_{pn}^4 I_{pn} a_{pn} - (M/D) \sum a_{pn} I_{spn} = 0 \quad (21)$$

ここに、 $I_{pn} = \int_{\beta}^1 R_{pn}^2 \xi d\xi$

$$I_{spn} = \frac{4}{N} \int_{\beta}^1 \left\{ \xi f_1(\xi) \frac{dR_{sn}}{d\xi} \frac{dR_{pn}}{d\xi} + \frac{a_n^2}{\xi} f_2(\xi) R_{sn} R_{pn} \right\} d\xi$$

式(21)を行列表示すれば、次のように書き改められる。

$$[II] \{X\} = (M/D) [G] \{X\} \quad (22)$$

ここに、 $[II]$ ：単位行列、 $[G]$ ： $I_{spn}/k_{pn}^4 I_{pn}$ を要素とする行列、 $\{X\} = \{a_{1n} a_{2n} a_{3n} \dots a_{nn}\}^T$
上式において、 $M/D = \lambda_{cr}$ とおけば、固有値問題に帰着される。

$$[G] \{X\} = \lambda \{X\} \quad (23)$$

ここに、 $\lambda = 1/\lambda_{cr}$

式(23)の固有値 λ と固有ベクトル X は通常の行列の固有値問題のプログラムを用いて求められる。 $\lambda_{cr} = 1/\lambda$ より座屈固有値が得られ、固有ベクトルを用いて、式(16)より座屈波形が得られる。

式(23)に含まれる形状パラメーターは、扇形板の開き角 α と内外径比 $\beta (=b/a)$ の2個である。面内曲げを受ける長方形板の座屈特性と比較するために、次式で定義される扇形板の縦横比を導入する。

$$\mu = \frac{\text{平均円弧長}}{\text{載荷辺長}} = \frac{\ell}{c} = \frac{\alpha(1+\beta)}{2(1-\beta)} \quad (24)$$

4. 数値結果

(1) 解の収束性および精度

本解析では、自由振動の固有振動形を重ね合せて、座屈波形を近似する手法を用いて座屈荷重および座屈波形を求めるものである。数値解析に先立って、本解法の解の収束性を検討する。開き角 $\alpha = 60^\circ$ 、縦横比 $\mu = 1.0$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ の扇形板に対して、採用した項数 N に伴う最低次の座屈固有値の収束状況を図-2に示す。case III の自由の場合には、1項で十分である。case I (単純支持) および case II (固定) の場合には、5項程度を必要とする。この理由は、case III の場合は、座屈波形が1次の固有振動形と似ているが、case I および II では両者の間に差があるためである。一般に負のモーメントに対する座屈固有値の場合の座屈波形の最大値(腹の位置)は固有振動形のそれよりも内径側に寄ってくる。

次いで、本法の収束解を既存の解と比較する。case I の内外径比 $\beta = 0.5$ 、開き角 $\alpha = 90^\circ$ の扇形板に対して示せば、本法： $\lambda_{cr} = -26.1$ 、べき級数法⁹⁾： $\lambda_{cr} = -26$ 、Ritz法⁷⁾： $\lambda_{cr} = -26.2$ のとおりである。この結果より、本法と既存の解はよい精度で一致しているといえる。

(2) 座屈解析

扇形板の座屈特性を明らかにするために、載荷辺の長さ c を一定に保って、開き角 α を変化させた計算を行い、形状パラメーターである縦横比 $\mu = l/c$ の形でデータの整理を行う。座屈強度の表現法として、長方形板の場合には、応力表示 $\sigma_{ck} = k\pi^2 D/b^2 d$ (ここに、 b : 載荷辺長、 d : 板厚、 $k = 6\lambda_{cr}/\pi^2$) の座屈係数 k を定義している。扇形板の座屈特性に及ぼす面内力の最大値 $N_{\theta a}$ 、 $N_{\theta b}$ 、 N_{r1} 、と内外径比 β との関係を図-3に示す⁹⁾。図のように、扇形板では内外径比 β によって、面内力 N_θ の分布形状が異なる。このため、内外径比 β に対して計算して圧縮側の縁応力を表示する必要がある。そこで、本論文では、換算せずに応力の合力、すなわち $\lambda_{cr} = M/D$ の形で座屈モーメントを表現する。

内外径比 $\beta = 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ の各ケースについて、縦横比 μ の変化に伴う最低次の座屈モーメント

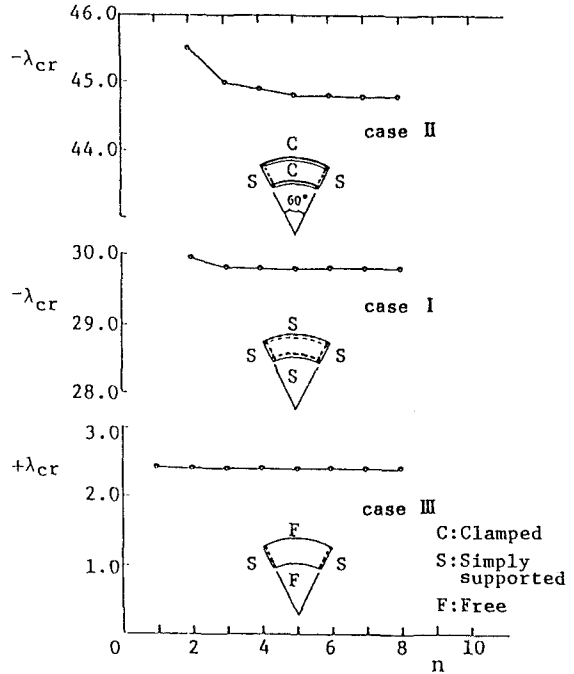


図-2 座屈固有値の収束状況 ($\mu = 1.0, \alpha = 60^\circ$)

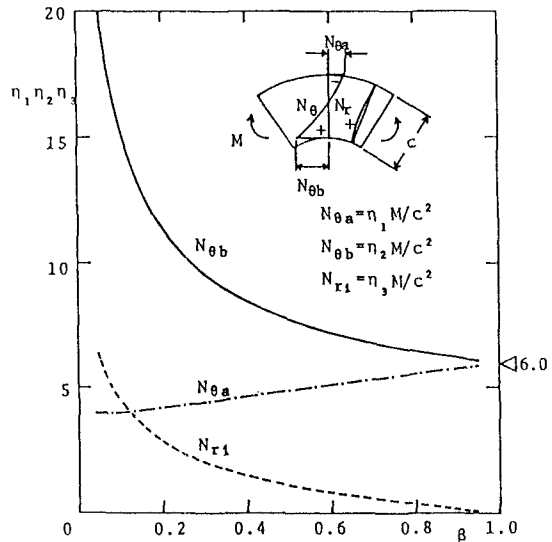


図-3 最大面内力と内外径比との関係

$\lambda_{cr} = M/D$ を、各境界条件に対して求めれば、図-4～7のとおりである。図中の n は θ 方向の半波数を示す。各ケースとも、正、負の曲げモーメントに対する座屈モーメントを併記してある。

まず、図-4に示している $\beta = 0.8$ 、すなわち面内力の分布が長方形板に近い場合を考察の対象とする。単純支持 (case I)、固定 (case II) の境界条件とも、座屈曲線に極値が存在し、極値を与える円周方向の半波数 n は縦横比 μ によって変化する。また、極値の値は半波数 n に無関係に一定である。負の座屈モーメントが正の座屈モーメントよりも小さい値をとる。座屈曲線の半波数に注目すると、座屈モーメントの値が大きいほど、波数が大きくなる特性をもつ。これに対して、自由 (case III) の場合には、 θ 方向の半波数 $n = 1$ の座屈モーメントが最小値を取り、 $n \geq 2$ の座屈曲線が $n = 1$ の座屈曲線よりも常に大きく交わることはない。case III の場合は case I, II の場合と異なって、正の座屈モーメントの方が小さい。この原因は $\beta = 0.8$ に対する座屈曲線の特性は、case I, II, III いずれの場合も、一様圧縮力および面内曲げを受ける長方形板と同じ座屈曲線のパターンを示す。

β の値が小さくなるにつれて (図-4 $\Rightarrow$ 図-7)、扇形板としての力学的特性が現われてくる。すなわち、正、負の座屈曲線の値の差が大きくなるとともに、case I, II の負の座屈曲線が極値をもたなくなる。この結果、 $n = 1$ すなわち、半波数が 1 の場合の座屈曲線が最小値を取るようになる (case I で 0.6, case II で 0.4)。つまり、case I, II の座屈曲線が case III (自由) と同じパターンとなる。しかし、case I, II の正の座屈曲線については、 β が小さくなくても極値をもつパターンは変わらない。

β が小さく、かつ縦横比 μ が小さい領域では、case I, II の正の座屈曲線が、負のそれよりも小さくなっていることがわかる (図-6, 7 参照)。

図-8 は内外径比 $\beta = 0.2$ 、 $\alpha = 60^\circ$ (縦横比 $\mu = 0.786$) の扇形板の正、負の座屈モーメントに対する座屈波形を case I および III の 2 ケースについて示したものである。いずれも圧縮面内力側の変形が大きく、引張側の変形が小さい (正の場合：外径側圧縮、負の場合：内径側圧縮)。case III の自由の場合には、正の曲

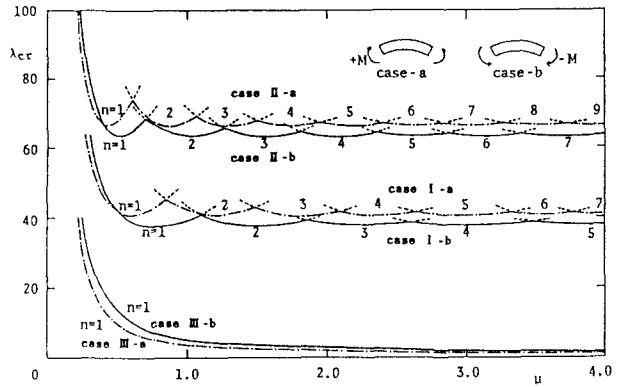


図-4 扇形板の座屈曲線 ($\beta = 0.8$)

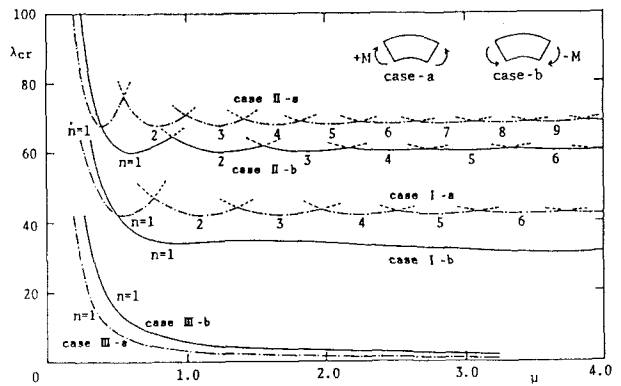


図-5 扇形板の座屈曲線 ($\beta = 0.6$)

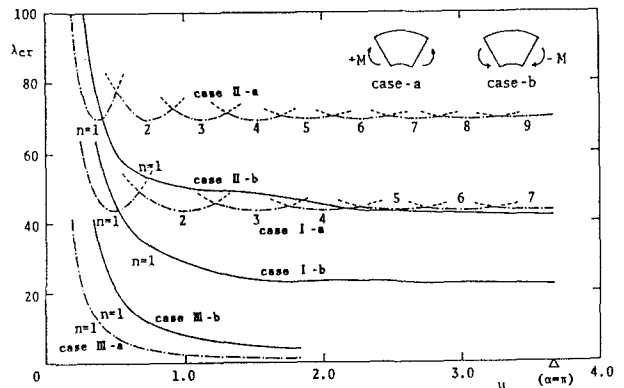


図-6 扇形板の座屈曲線 ($\beta = 0.4$)

げのもとでは、図-8のように、扇形板は弾性変形の影響が小さく剛体変形が優勢な座屈波形をもつに対して、負の場合は弾性変形が優勢な座屈波形となる。このような事実から、正の曲げによる座屈モーメントが小さくなるものと予想される。

(3) 扇形板(I, II)と長方形板との比較

次に、長方形板と同一の座屈パターンを示す扇形板について、長方形板との比較を行う。最低次の座屈曲げモーメントと内外径比 β との結果を示せば、図-9の結果が得られる。比較対照のために、長方形板の座屈係数¹¹⁾($23.9 \times \pi^2 / 6 = 39.3$ (case I), $39.6 \times \pi^2 / 6 = 65.0$ (case II))を併記している。図4~7の結果からも予想されるように、正の曲げモーメントの場合は、内外径比 β の変化に無関係に長方形板と同様な極値をもつパターンとなる。一方、負の曲げモーメントの場合は、内外径比が大きいとき(case Iで $\beta > 0.67$, case IIで $\beta > 0.53$)に同じ挙動を示す。正、負いずれの曲げモーメントも、内外径比 β が大きくなると同じ値、すなわち、長方形板の値に近づくことが予想される。この図からも明らかなように、扇形板では、内外径比が大きい場合($\beta > 0.80$)を除いて、長方形板で近似することは不可能で、扇形板として解析する必要があることが確かめられる。

表-1は、各内外径比 β に対する正負の座屈曲げモーメントとそのときの縦横比($n=1$ の場合)との関係を示したものである。

座屈曲げモーメントが長方形板の値よりも高い正の面内曲げの場合には、長方形板の場合の座屈係数よりも小さい縦横比で極値をとり、逆に低い負の面内曲げの場合には、大きな縦横比で極値をとる。

(4) 扇形板(case III)と円弧アーチとの比較

case IIIで内外径比が大きい場合には、扇形板は円弧アーチとみなすことができる。断面剛の仮定から誘導されているはり理論に基づくアーチの横倒れ座屈解析の有効性を検証するために、本節では、平板としての

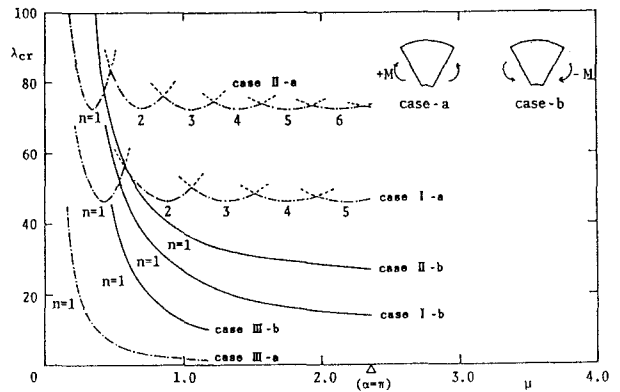


図-7 扇形板の座屈曲線 ($\beta=0.2$)

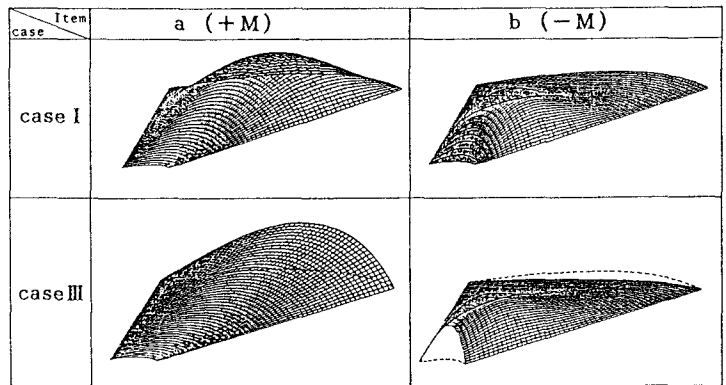


図-8 正負の座屈モーメントによる座屈波形の相違 ($\beta=0.2, \alpha=60^\circ$)

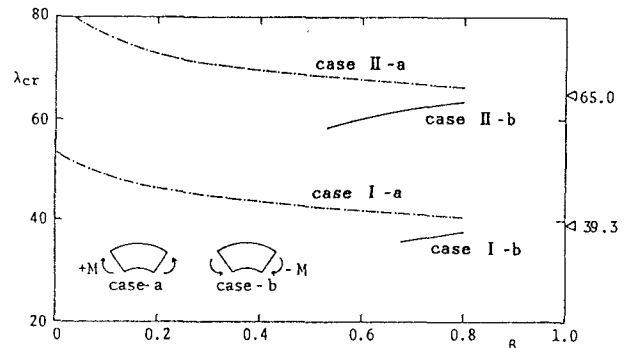
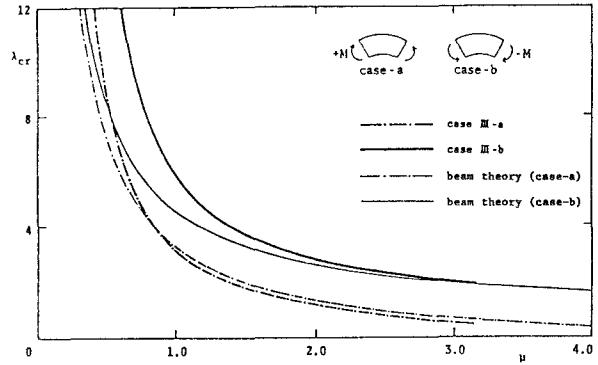


図-9 内外径比と最小座屈モーメントとの関係

表一 1 最小座屈モーメントと縦横比との関係

β	case-I				case-II			
	case-a	μ	case-b	μ	case-a	μ	case-b	μ
0.2	46.3	0.45	-	-	72.6	0.35	-	-
0.3	44.9	0.47	-	-	70.8	0.37	-	-
0.4	43.7	0.51	-	-	69.5	0.38	-	-
0.5	42.9	0.52	-	-	68.5	0.39	-	-
0.6	42.0	0.56	-	-	67.7	0.41	-60.1	0.61
0.7	41.3	0.57	-36.2	0.84	67.0	0.42	-62.0	0.56
0.8	40.6	0.61	-37.6	0.77	66.4	0.43	-63.5	0.52
*	39.3	0.67	-39.3	0.67	65.0	0.47	-65.0	0.47

*:Buckling eigenvalue of the rectangular plate



図一10 円弧アーチの横捩れ座屈と扇形板の座屈の比較 ($\beta=0.6$)

解(caseⅢ)とはり理論による解の比較を行う。

面内曲げを受ける円弧アーチの横捩れ座屈強度は次式で与えられる^{12),13)}。

$$M_{cr} = \frac{EI + GJ}{2r_0} \pm \sqrt{\left(\frac{EI - GJ}{2r_0}\right)^2 + \frac{EI \cdot GJ}{r_0^2} \frac{\pi^2}{\alpha^2}} \tag{25}$$

ここに、EI:曲げ剛性、GJ:捩れ剛性、 r_0 :アーチの断面中央の曲率半径、 α :開き角
アーチの断面が長方形(板厚:d,高さ:c)、ポアッソン比 $\nu=0.3$ の場合、式(25)は扇形板の諸元を用いて次のように書き改められる。

$$\lambda_{cr} = \frac{M_{cr}}{EI} = \frac{1.269}{\mu'} \pm \sqrt{\left(\frac{0.269}{\mu'}\right)^2 + 1.538\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^2} \tag{26}$$

ここに、 $\mu' = (1 + \beta) / (2(1 - \beta))$

内外径比 $\beta=0.6$ について、式(26)から得られる円弧アーチの横捩れ座屈モーメントと縦横比 μ との関係を示せば、図一10のとおりである。比較対照のために、断面変形を考慮している扇形板としての解を図中の太線で示してある。図のように、正の曲げを受ける場合の座屈曲線に注目すると、内外径比 $\beta=0.6$ とかなり断面の背の高い場合においても、はり理論と平板としての解析結果が、 μ が0.8より大きい領域でよく一致している。一方、負の曲げを受ける場合には、 β が2.0より小さい範囲では両者の間に差がある。図一8(a),(b)の比較からわかるように、正の曲げの場合には、扇形板の座屈波形が断面変形が小さい剛体変形型である。一方、負の曲げの場合には、座屈波形は曲げ変形(局部変形)が卓越している。以上の考察から、次のようなことが明らかになった。すなわち、正の曲げを受ける円弧辺が自由な扇形板の座屈モーメントは、円弧アーチの横倒れ座屈モーメントで精度よく表現される。しかし、負の曲げを受ける場合には、扇形板としての取扱いが必要である。

5. まとめ

本研究は、面内曲げを受ける直線辺が単純支持された扇形板の座屈特性を、二次元弾性論と薄板の曲げ理論を用いて解析したものである。得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1)円弧辺が単純支持および固定の場合には、円周方向の面内力が卓越する内径側を圧縮する負の曲げモーメントの座屈固有値が、一般に、正の曲げによる値よりもその絶対値が小さい。縦横比をパラメーターと

した正の曲げモーメントによる座屈曲線には長方形板と同様に各円周方向の半波数に対して同じ値をもつ極値が存在する。一方、負の曲げモーメントによる座屈曲線においては、この性質が内外径比が小さくなると存在しなくなる。つまり、縦横比に無関係に円周方向の半波数が1の座屈波形をもつ座屈曲げモーメントが最低次となる。

(2) 円弧辺が自由の場合には、正の曲げモーメントによる座屈曲線が負の場合よりも小さい。正、負いずれの座屈曲線も円周方向の半波数が1の座屈波形をもつ固有値が最低次となる。

(3) 扇形板の座屈特性は、内外径比が大きく、その形状が長方形板に近い場合には、長方形板と同様な座屈特性を示す。しかし、内外径比が小さくなると、扇形板としての特性が現われ、独特の座屈特性を示す。扇形板を等価な長方形板に置換して座屈モーメントを推定することは、一般に困難で扇形板としての取扱いが必要である。

(4) 円弧辺が自由な扇形板の座屈波形は、曲げ変形の影響が小さい剛体変形型である。この場合の座屈モーメントは、円弧アーチの横倒れ座屈モーメントで精度よく表現できる。

以上によって、面内曲げを受ける扇形板の座屈特性が明確にされた。今後、扇形板の動的安定性、座屈後の幾何学的非線形挙動、初期たわみの影響など逐次発表していく予定である。本研究の数値計算には、長崎大学情報処理センターのFACOM M-180を使用したことを付記する。なお、本論文の査読者より、文献^{7), 8)}の存在をお教え頂いたことに感謝申し上げます。

Appendix A Galerkin 法に含まれる定積分

(1) 基準関数の直交性

$$\int_p^1 R_{sn} R_{pn} \xi d\xi \begin{cases} = 0 & (s \neq p) \\ = I_{sn} & (s = p) \end{cases} \quad (A-1)$$

(2) 定積分

$$\begin{aligned} & \int_p^1 \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi f_1(\xi) \frac{dR_{sn}}{d\xi} \right\} R_{pn} \xi d\xi \\ &= \left[\xi f_1(\xi) \frac{dR_{sn}}{d\xi} R_{pn} \right]_p^1 - \int_p^1 \xi f_1(\xi) \frac{dR_{sn}}{d\xi} \frac{dR_{pn}}{d\xi} d\xi \\ &= - \int_p^1 \xi f_1(\xi) \frac{dR_{sn}}{d\xi} \frac{dR_{pn}}{d\xi} d\xi \quad (\because f_1(\beta) = f_1(1) = 0) \end{aligned} \quad (A-2)$$

参考文献

- 1) Bolotin, V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, San Francisco: Holden-Day Inc. 1964.
- 2) 高橋・田川・佐藤: ケーブルの面外不安定振動, 土木学会論文集, 第350号/I-2, pp.355~358, 1984.
- 3) 高橋・田川・池田・松川: 面内曲げを受ける長方形板の動的安定性, 土木学会論文報告集, 第341号, pp.179~186, 1984.
- 4) Swaminadham M., Danielski, J. and Mahrenholtz, O.: Free Vibration Analysis of Annular Sector Plates by Holographic Experiments, Journal of Sound and Vibration, Vol.95, pp.333~340, 1984.
- 5) Rubin, C.: Stability of Polar-Orthotropic Sector Plates, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.45, No.2, pp.448~450, 1978.
- 6) Srinivasan, R.S. and Thiruvengatathari, V.: Stability of Annular Sector Plates with Variable Thickness, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol.22, No.2, pp.315

~317, 1984.

- 7) Chu, K.Y. : Beuluntersuchung von ebenen Stegblechen kreisförmig gekrümmter Trager mit I-Querschnitt, Stahlbau, Heft 5, pp.129~142, 1966.
- 8) 三上・赤松・武田 : 純曲げを受ける薄肉 I 断面曲がり桁の局部座屈と連成座屈, 土木学会論文報告集, 第230号, pp.45~54, 1974.
- 9) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity, 3rd ed., pp.71~75, McGraw-Hill Book Co., 1970.
- 10) 山崎・樗木・金子 : 扇形板の自由振動解析, 九州大学工学集報, 第42巻, 第4号, pp.379~388, 1969.
- 11) 福本 : 構造物の座屈・安定解析, 技報堂出版, pp.265~309, 1982.
- 12) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., 1961.
- 13) Ali, S.A. : Parametric Instability of Curved Girders, Journal of the Structural Engineering, ASCE, Vol.109, No.4, pp.829~842, 1983.

(1987年10月16日)