

## 断面変形を考慮した曲線多室箱桁橋の理論と解析

THEORY AND ANALYSIS OF CURVED, MULTI-CELL BOX GIRDER BRIDGES  
UNDER CONSIDERATION OF CROSS-SECTIONAL DISTORTION

白木 恒雄\*

By Tsuneo USUKI

The theory of curved, thin-walled, multi-cellular beams and a method of determining the stresses and deformation, including warping, are presented. The equations governing small displacements in the linear elastic range are derived using the principle of virtual work. The solution includes the distortion of the cross-section, the influence of shear deformation, and the variation of longitudinal fibre curvature. The numerical analysis is based on the modified transfer matrix method, which enables the analysis of long span beams. As a numerical example, an eccentrically loaded four span continuous concrete box girder bridge with a varied cross-section of four cells is examined, and the relation between the bridge curvature and the maximum stress is briefly discussed.

## 1. まえがき

曲線桁橋の解析は曲げねじり理論を用いるのが最も一般的であるが、断面変形は発生しないと仮定している。この仮定に基づき、はりを構成する母線の曲率半径の変化の影響を考慮して曲がりばりの理論を組立てた研究に、文献1)~5)がある。

これに対し、断面変形の影響を考慮しつつ曲線橋を解析する方法は、対象を箱桁に限定すると、はりの理論、一般化座標法、折板理論、有限要素法、有限帯板法、有限要素法と有限帯板法の併用、有限要素法と一般化座標法の結合、などに分類される。

本研究は曲線ばりの曲げねじり理論と断面変形の理論を滑らかに結合することを主眼とし、はりの理論によった。なお、はりの理論以外の解析法の文献名とその概要などは、たとえば文献 6), 7)を参照されたい。

曲線箱桁の断面変形をはりの理論で扱った研究は直線箱桁のそれに比べるときわめて少なく、筆者の知る限りでは、Dabrowski の一室箱桁の研究報告<sup>8)</sup>またはそこで求められた微分方程式に立脚して理論を展開したもの<sup>9)</sup>、そしてDabrowski とほぼ同様の立場から簡易基礎理論を誘導したもの<sup>10)</sup>、などである。四角形断面をもつはりにおいて、直線、曲線を問わず、ねじりと断面変形の反りは互いに連成するが、文献 8) ではその連成の影響を無視することによって弾性床上のはりとアナロジーな常微分方程式を誘導している。この方程式はその簡便さゆえに鋼箱桁橋の中間隔壁の設計などに盛んに用いられているが、あくまでも簡易理論であるから、これを曲率の大きい一室および多室の箱桁橋に適用するのは問題である。

以上の観点より、本報告では曲げねじり理論と並列の形式で断面変形を扱い、お互いの反りの連成を対等に評価する支配方程式の組立を主たる目的とした。本研究は筆者の直線多室箱桁橋に関する報告<sup>11)</sup>を曲線多室箱桁橋に拡張したものであるが、ここでも仮想仕事の原理を用いて方程式を誘導し、反り抵抗マトリックスの直交化によって断面変形の変形パターンを抽出している。

薄肉断面材の反り応力に釣り合う二次的なせん断応力によって発生する変形を二次せん断変形とよぶが、この変形の影響は閉断面材の曲げねじり現象において顕著である。そこで、本報告においても理論の厳密性および整合性を保持すべく二次せん断変形の影響を考慮している。

なお、はりの理論を用いて薄肉閉断面曲線材の断面変形を各板の運動学的考察に基づいて扱った研究に文献 12), 13) がある。これら閉断面材においては、ねじりと断面変形の反り連成の問題は発生しないし、二次せん断変形の影響も僅少であるから考慮されていない。

## 2. 座標系と仮定

はりは一平面内で曲がり、その曲率は、はりの軸方向に区分的一定である。円柱座標系  $(\delta, \rho, \theta)$  を Fig. 1のごとく設定し、円柱軸  $\delta$  とはりの曲率中心軸を一致させておく。はりの断面の中立点  $N$  を連ねて作った中立軸<sup>3)</sup>を  $x$  軸とし、これより直角に断面主軸  $y, z$  を定める。ただし、 $\rho$  軸と  $y$  軸のなす角は  $\beta$  とする。この座標系に加えて、断面を構成する板の肉厚中心線を通る輪郭線座標  $s$ 、および  $s$  より直角に板厚方向の座標  $n$  を定める。輪郭線座標  $s$  の原点を断面の中立点  $N$  と一致させておき、この点と断面を構成する板の任意の位置とを厚さ  $t=0$  の仮想の板で結びつけておく。この仮想板の手法は文献 4) による。

本文で用いた主な仮定は以下のごとくなる。

- 断面は肉厚中心線が直線となる板よりなる。
- 板の厚さ  $t$  はその幅  $b$  に比べて十分小さい。
- 構造材料は Hooke の弾性則を満たす。
- 輪郭線座標  $s$  方向の伸縮ひずみは零とする。
- 断面が変形するときの中立点  $N$  およびせん断中心点  $M$  の位置の変位は微小とし無視する。
- 断面変形による変位量の算定において、系は隅角部をヒンジ結合された折板構造とする。
- 断面変形の横曲げモーメントの算定では、系は隅角部を剛結されたラーメン構造とする。
- はりの軸方向垂直応力の算定では、断面変形による  $\rho$  軸方向変位は微小として無視する。

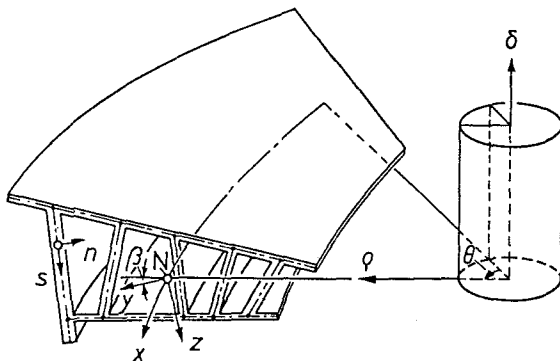


Fig. 1 Coordinate systems

## 3. 支配方程式の誘導

### (1) ひずみと変位

はりのある断面を構成する板の肉厚中心線上の任意の点  $A$  の  $\rho, \theta, y, z$  軸方向の変位成分をそれぞれ  $r, u, v, w$  とするならば、その点における変位とひずみの間には次の関係が存在する。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{r}{\rho}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{\theta y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{\rho} \right), & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{z\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot a \sim f)$$

また、点Aの軸線座標  $s$  方向の変位を  $f$  とあらわすならば、 $\theta - s$  面上のせん断ひずみは次式となる<sup>4)</sup>。

$$\gamma_{\theta s} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u}{\rho} \right) \quad (2)$$

はりの軸線の微小長  $dx$  は、はりの曲率中心と断面中立点との距離  $R_N$  を用いて次式で与えられる。

$$dx = R_N d\theta \quad (3)$$

この式(3)を用いて式(1)、(2)を書き直し、添字  $\theta$  を  $x$  と改めると、次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{R_N}{\rho} u \right) + \frac{r}{\rho}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{R_N}{\rho} \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 v \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{R_N}{\rho} u \right), & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \frac{R_N}{\rho} \gamma_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 w \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{R_N}{\rho} u \right) \end{aligned} \right\} \quad (4 \cdot a \sim f)$$

$$\frac{R_N}{\rho} \gamma_{xs} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 f \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{R_N}{\rho} u \right) \quad (5)$$

これらの式は単純ねじりのせん断応力によるひずみ、すなわち初等せん断ひずみを考慮しているが、二次せん断応力によるひずみは考慮されていない。従来のはりの理論の展開に従いつつこの二次せん断ひずみを考慮するため、ここでは便宜的に面内変位成分を固定し、面外変位成分  $u$  のみ影響を受けて、最終的な反りは  $u_1$  となったとする。すなわち、二次せん断ひずみによる反りの減少量を  $u_2$  とあらわすなら、Fig.2 より次式となる。

$$u_1 = u - u_2 \quad (6)$$

また、初等せん断ひずみおよび二次せん断ひずみを、それぞれ  $\gamma_{xs, pr}$ 、 $\gamma_{xs, se}$  とあらわすならば、総合せん断ひずみ  $\gamma_{xs}$  は次式で与えられる。

$$\gamma_{xs} = \gamma_{xs, pr} + \gamma_{xs, se} \quad (7)$$

式(6)、(7)を用いて式(4)、(5)を書き直すと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{R_N}{\rho} u_1 \right) + \frac{r}{\rho}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{R_N}{\rho} \gamma_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 v \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{R_N}{\rho} u_1 \right), & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \frac{R_N}{\rho} \gamma_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 w \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{R_N}{\rho} u_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (8 \cdot a \sim f)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_N}{\rho} \gamma_{xs, pr} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 f \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{R_N}{\rho} u \right), & \frac{R_N}{\rho} \gamma_{xs, se} &= - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{R_N}{\rho} u_2 \right) \\ \frac{R_N}{\rho} \gamma_{xs} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 f \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{R_N}{\rho} u_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (9 \cdot a \sim c)$$

## (2) 基本条件式

### a) ひずみの条件

構造系が荷重作用を受けて変形するならば、系に発生するひずみおよび変位は、断面剛の成分と断面変形の成分の和で与えられる。これらの成分をそれぞれ、添字 R および D で区別するならば、断面剛の仮定は、

$$(\varepsilon_y)_R = 0, \quad (\varepsilon_z)_R = 0, \quad (\gamma_{yz})_R = 0 \quad (I)$$

となる。これに対し、断面変形によるひずみの状態は、 $(\varepsilon_y)_D \neq 0$ 、 $(\varepsilon_z)_D \neq 0$ 、 $(\gamma_{yz})_D \neq 0$  である。しかし、仮定 f) で述べたごとく、板の横曲げによる  $n$  座標方向の変位成分を零とみなし、部材角のみの変形を考えるならば、仮定 d) も考慮して次の条件式を得る。

$$(\varepsilon_y)_D = 0, \quad (\varepsilon_z)_D = 0, \quad (\gamma_{yz})_D = 0 \quad (II)$$

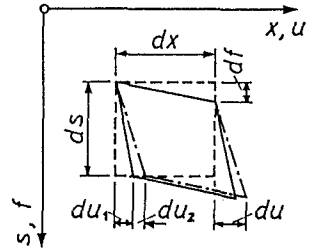


Fig. 2 Shearing strain

b) 軸方向反りの連続条件

式(8)に示したごとく、直線ばりにおける軸方向反り  $u_1$  は、曲線ばりの  $(R_N/\rho) \cdot u_1$  に対応する。したがって、曲線ばりの軸方向反りの連続条件は次式となる。

$$\oint_{\partial i} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{R_N}{\rho} u_1 \right) dS = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 $i$  は部屋番号、 $m$  は部屋の総数である。従来の曲げねじり理論に適合させるため、式(6)を用いて便宜的に上式を次のごとき二本の式に分解する。

$$\left[ \oint_{\partial i} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{R_N}{\rho} u \right) dS = 0 \right], \quad \left[ \oint_{\partial i} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{R_N}{\rho} u_2 \right) dS = 0 \right] \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (III, IV)$$

この式(IV)に式(9.b)を代入すると、次式となる。

$$\left[ \oint_{\partial i} \frac{R_N}{\rho} \gamma_{xs, se} dS = 0 \right] \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (IV)'$$

c) はりの微小要素の力のつり合い条件

板厚  $t$  の微小要素の二辺の長さが  $\rho \cdot d\theta$  および  $ds$  で与えられるならば、垂直応力  $\sigma_\theta$ 、せん断応力  $\tau_{s\theta}$  およびはりの軸方向の分布荷重  $p_N(\theta, s)$  の間には次の関係が存在する<sup>14)</sup>

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial S} (\rho^2 \tau_{s\theta} t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_\theta t) + p_N t = 0 \dots\dots\dots (11)$$

上式の  $\theta$  による微分を  $x$  による微分に変更するため、反り  $u_1$  の変換同様に  $\sigma_\theta$  のかわりに  $(R_N/\rho) \cdot \sigma_x$  を使い、式(3)の関係を代入すると、次式となる。

$$\left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{\partial}{\partial S} \left[ \left( \frac{\rho}{R_N} \right)^2 \tau_{xs} t \right] + \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x t) + p_N t = 0 \dots\dots\dots (12)$$

さらに、初等せん断応力は垂直応力に関係しないから、上式は次のごとき二本の式に分解できる。

$$\left[ \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{\partial}{\partial S} \left[ \left( \frac{\rho}{R_N} \right)^2 \tau_{xs, pr} t \right] = 0 \right], \quad \left[ \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{\partial}{\partial S} \left[ \left( \frac{\rho}{R_N} \right)^2 \tau_{xs, se} t \right] + \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x t) + p_N t = 0 \right] \dots\dots\dots (V, VI)$$

(3) 面内変位

ひずみの式(8)において、ひずみ成分  $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}$  の定義は直線ばりと全く同じであるから、ひずみの条件(I) および(II)を用い、簡単な積分計算より断面内変位の式は直線ばりと等しく次のごとくなる<sup>11)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} v &= \eta(x) - (z - z_M) \varphi(x) - \sum_{i=1}^m (z - z_{vi}) a_i(s) \gamma_i(x) \\ w &= \zeta(x) + (y - y_M) \varphi(x) + \sum_{i=1}^m (y - y_{vi}) a_i(s) \gamma_i(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13 \cdot a, b)$$

ここで、 $\eta(x), \zeta(x)$  はそれぞれ曲げ変形による  $y, z$  軸方向の移動量、 $\varphi(x)$  はねじりによるせん断中心まわりの回転角、 $\gamma_i(x)$  は断面変形の基本変形(i)の大きさをあらわす。そして、せん断中心Mの座標は  $y_M, z_M$  であり、断面変形の基本変形(i)における各板の回転中心の座標は  $y_{vi}, z_{vi}$  である。さらに、 $a_i(s)$  は断面変形の基本変形(i)における各板の回転角と  $\gamma_i(x)$  の線形関係を取りもつ板ごとに一定値をとる関数である。この式より、輪郭線座標方向の変位  $f$  は次式で与えられる。

$$f = \eta(x) \cos \alpha + \zeta(x) \sin \alpha + \varphi(x) r_r + \sum_{i=1}^m \gamma_i(x) r_{pi} \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $\alpha$  は  $y$  軸と各板とのなす角度であり、せん断中心Mより各板までの距離  $r_r$  および断面変形の基本変形(i)における各板の回転中心Vよりその板までの距離  $r_{pi}$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} r_T &= (y - y_M) \sin \alpha - (z - z_M) \cos \alpha \\ r_{Pi} &= [(y - y_{vi}) \sin \alpha - (z - z_{vi}) \cos \alpha] a_i(s) \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15 \cdot a, b)$$

ここで用いた断面変形の基本変形のパターン数は部屋の総数に等しく、独立でさえあれば最初は全く任意に選ぶことができる。しかし、この基本変形も後ほど述べる直交化により最後は一意的に定められる。

#### (4) 軸方向変位と曲率半径方向変位

反り拘束の無い場合の微小要素の応力のつり合い式(V) を  $s$  で積分し、さらに Hooke則を用いると、

$$\gamma_{xs, \rho r} = \frac{1}{G} \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{T(x)}{t}, \quad \tau_{xs, \rho r} = \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{T(x)}{t} \dots\dots\dots (16 \cdot a, b)$$

を得る。ただし、 $G$  は横弾性係数、 $T(x)$  は  $s$  に関する積分より生じた積分定数 (すなわち、 $x$  のみの関数) である。この式(16.a)を初等せん断ひずみの定義式(9.a) に代入し、 $s$  で積分すると、軸方向反りの連続条件(11)を用いて軸方向反りは次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} u(x, s) = & - \left[ 1 + \left( \frac{\cos \beta}{R_N} \right) y - \left( \frac{\sin \beta}{R_N} \right) z \right] \xi'(x) - \left[ \frac{R_N}{R_M} \left( 1 + \frac{y_M}{R_N} \cos \beta \right) y - \left( \frac{y_M}{R_M} \sin \beta \right) z - \left( \frac{\sin \beta}{R_M} \right) w_T \right] \eta'(x) \\ & - \left[ \left( \frac{z_M}{R_M} \cos \beta \right) y + \frac{R_N}{R_M} \left( 1 - \frac{z_M}{R_N} \sin \beta \right) z - \left( \frac{\cos \beta}{R_M} \right) w_T \right] \zeta'(x) - w_T \phi'(x) - \sum_{i=1}^m w_{Pi} \gamma'_i(x) \dots\dots (17) \end{aligned}$$

ただし、上式中の単位反り関数は次式で定義した。

$$\left. \begin{aligned} y(s) &= \int_0^s \cos \alpha ds, \quad z(s) = \int_0^s \sin \alpha ds, \quad w_T(s) = \frac{\rho(s)}{R_N} \int_0^s \left\{ \left( \frac{R_N}{\rho(s)} \right)^2 r_T - \left( \frac{R_N}{\rho(s)} \right)^3 \frac{\Psi_T}{t} \right\} ds \\ w_{Pi}(s) &= \frac{\rho(s)}{R_N} \int_0^s \left\{ \left( \frac{R_N}{\rho(s)} \right)^2 r_{Pi} - \left( \frac{R_N}{\rho(s)} \right)^3 \frac{\Psi_{Pi}}{t} \right\} ds \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18 \cdot a \sim d)$$

上の式(17)において、 $\xi'(x)$  は  $s$  に関する積分により発生した積分定数 (すなわち、 $x$  のみの関数) であり、幾何学的には、中立点  $N$  の  $x$  軸方向の変位の大きさに  $-1$  を掛けたものである。 $R_M$  ははりの曲率中心とせん断中心  $M$  との距離である。ねじりの初等せん断流関数  $\Psi_T$  はすでに多くの文献中に定義式が与えられているので、ここでは省略する。また、断面変形の初等せん断流関数  $\Psi_{Pi}$  はねじりの初等せん断流関数と同じ形で表現される。

はりのある断面の輪郭線座標上の任意の点  $A$  の曲率半径方向の変位  $r$  は、式(13)を用い、整理すると

$$\begin{aligned} r = & -R_N \left\{ \left[ -\frac{\cos \beta}{R_N} \eta(x) + \frac{\sin \beta}{R_N} \zeta(x) - \left( \frac{y_M}{R_N} \sin \beta + \frac{z_M}{R_N} \cos \beta \right) \phi(x) \right] 1 \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\sin \beta}{R_N} \phi(x) \right] y + \left[ \frac{\cos \beta}{R_N} \phi(x) \right] z \right\} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

と与えられる。ただし、仮定 h) に明記したごとく、断面変形にともなう  $\rho$  軸方向の変位成分は曲げによる変位成分に比べて小さいから無視している。

#### (5) 応力

式の誘導を簡潔にするため、ベクトル表記を導入する。変位関数ベクトル  $V$ 、方向ベクトル  $r$ 、初等せん断流ベクトル  $\Psi$  そして単位反り関数ベクトル  $w$  を次式で定義する。ただし、ベクトル右肩の  $T$  は転置を意味する。

$$\left. \begin{aligned} V^T &= (\xi \quad \eta \quad \zeta \quad \phi \quad \gamma_1 \quad \dots \quad \gamma_m), \quad r^T = (0 \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha \quad r_T \quad r_{P1} \quad \dots \quad r_{Pm}) \\ \Psi^T &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad \Psi_T \quad \Psi_{P1} \quad \dots \quad \Psi_{Pm}), \quad w^T = (1 \quad y \quad z \quad w_T \quad w_{P1} \quad \dots \quad w_{Pm}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20 \cdot a \sim d)$$

これらを用いると、軸方向反りの式(17)および半径方向変位の式(19)は次のごとく与えられる。

$$u(x, s) = -w^T B V', \quad r(x, s) = -R_N w^T C V \dots\dots\dots (21 \cdot a, b)$$

ただし、マトリックス  $B$  および  $C$  は次のごとく定義した。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\cos \beta}{R_N} & \frac{R_N}{R_M} \left(1 + \frac{y_M}{R_N} \cos \beta\right) & \frac{z_M}{R_M} \cos \beta & & & \\ -\frac{\sin \beta}{R_N} & -\frac{y_M}{R_M} \sin \beta & \frac{R_N}{R_M} \left(1 - \frac{z_M}{R_N} \sin \beta\right) & & & \\ & -\frac{\sin \beta}{R_M} & -\frac{\cos \beta}{R_M} & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\cos \beta}{R_N} & \frac{\sin \beta}{R_N} & -\left(\frac{y_M}{R_N} \sin \beta + \frac{z_M}{R_N} \cos \beta\right) & & \\ & 0 & & \frac{\sin \beta}{R_N} & & \\ & & 0 & \frac{\cos \beta}{R_N} & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

これらマトリックスの空白部はすべて零要素である。

軸方向反りの成分  $u_1$ ,  $u_2$  は単位反り関数を共有すると仮定すれば、式(21.a)は式(6) の関係を用いて

$$u_1(x, s) = -w^T B V'_1, \quad u_2(x, s) = -w^T B V'_2 \quad (22 \cdot a, b)$$

と分解できる。ただし、次の関係が存在している。

$$V_1 = V - V_2 \quad (23)$$

垂直ひずみの定義式(8.a) に式(21.b), (22.a)を代入して、Hooke 則を併用すると、次式を得る。ただし  $E$  は縦弾性係数である。

$$\epsilon_x = -\frac{R_N}{\rho} w^T (B V'_1 + C V), \quad \sigma_x = -E \frac{R_N}{\rho} w^T (B V'_1 + C V) \quad (24 \cdot a, b)$$

軸方向反りの連続条件(III) を用いて初等せん断ひずみおよび初等せん断応力を誘導すると、次式となる。

$$\gamma_{xs, \rho r} = \left(\frac{R_N}{\rho}\right)^2 \frac{\Psi^T}{t} B V', \quad \tau_{xs, \rho r} = G \left(\frac{R_N}{\rho}\right)^2 \frac{\Psi^T}{t} B V' \quad (25 \cdot a, b)$$

二次せん断ひずみおよび二次せん断応力は二通りの方法で求められる。ひとつは、二次せん断ひずみの定義式(9.b) に式(22.b)を代入し、Hooke 則を用いる方法である。これから、次式を得る。

$$\frac{R_N}{\rho} \tilde{\gamma}_{xs, se} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R_N}{\rho} w^T\right) B V'_2, \quad \frac{R_N}{\rho} \tilde{\tau}_{xs, se} = G \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{R_N}{\rho} w^T\right) B V'_2 \quad (26 \cdot a, b)$$

ただし、 $\sim$ 印は他の方法より求まる二次せん断ひずみおよび応力と区別するため付記した。

他の方法とは、力のつり合い条件式(VI)を用いる方法である。すなわち、式(VI)に垂直応力の式(24.b)を代入し、 $s$  に関して積分し、Hooke 則を用いた後、反りの連続条件(IV)' より積分定数を決定するならば、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xs, se} &= \frac{E}{G} \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{(S-\Phi)^T}{t} (BV_1''' + CV') - \frac{1}{G} \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{f_N - q_N}{t} \\ \tau_{xs, se} &= E \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{(S-\Phi)^T}{t} (BV_1''' + CV') - \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{f_N - q_N}{t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27 \cdot a, b)$$

と与えられる。ただし、上式中の独立変数  $s$  の関数は次のごとく定義している。

$$S(s) = \int_{s_0}^s \frac{R_N}{\rho(s)} w dF, \quad f_N(x, s) = \int_{s_0}^s \left( \frac{\rho(s)}{R_N} \right)^2 p_N dF \dots\dots\dots (28 \cdot a, b)$$

また、断面の室ごとに一定値をとるベクトル  $\Phi$  および関数  $q_N$  は、 $m$ 元連立方程式を解いて定められる<sup>4)</sup>。

以上より、総合せん断ひずみ  $\gamma_{xs}$  および総合せん断応力  $\tau_{xs}$  は、式(25)および(27)の和として与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xs} &= \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{\Psi^T}{t} BV' + \frac{E}{G} \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{(S-\Phi)^T}{t} (BV_1''' + CV') - \frac{1}{G} \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{f_N - q_N}{t} \\ \tau_{xs} &= G \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{\Psi^T}{t} BV' + E \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{(S-\Phi)^T}{t} (BV_1''' + CV') - \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{f_N - q_N}{t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29 \cdot a, b)$$

上記のごとく二通りの方法で求められた二次せん断ひずみおよび応力において、それらの為す仕事の等価性を仮定するならば、次のごとき仮想荷重および仮想変位の式が成立する。

$$\int_V \delta \tau_{xs, se} \gamma_{xs, se} dV = \int_V \delta \tau_{xs, se} \bar{\gamma}_{xs, se} dV, \quad \int_V \tau_{xs, se} \delta \gamma_{xs, se} dV = \int_V \tau_{xs, se} \delta \bar{\gamma}_{xs, se} dV \dots\dots\dots (30 \cdot a, b)$$

ただし、 $\delta$  は仮想の成分、 $\int_V \dots dV$  は体積積分を意味する。式(30.a)に式(26)および(27)を代入、整理して、

$$\frac{E}{G} R(BV_1''' + CV') - \frac{1}{G} \int_F \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^3 \frac{(S-\Phi)}{t} \frac{(f_N - q_N)}{t} dF + FB(V' - V_1) = 0 \dots\dots\dots (31)$$

を得る。ただし、反り抵抗マトリックス  $F$  およびせん断修正マトリックス  $R$  は次のごとく定義している。

$$F = \int_F \left( \frac{R_N}{\rho} \right) w w^T dF, \quad R = \int_F \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^3 \frac{(S-\Phi)}{t} \frac{(S-\Phi)^T}{t} dF \dots\dots\dots (32 \cdot a, b)$$

#### (6) 面内関数の直交関係

軸方向反りの連続条件式(III)に式(21.a)を代入した式、および軸方向反りの連続条件式(IV)に式(27.a)を代入した式のそれぞれに定数ベクトル  $\Psi$  を前掛けすると次のごとき直交関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \int_F \frac{\Psi}{t} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{R_N}{\rho} w^T \right) dF &= 0 \\ \frac{E}{G} \int_F \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^3 \frac{\Psi}{t} \frac{(S-\Phi)^T}{t} dF (BV_1''' + CV') - \frac{1}{G} \int_F \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^3 \frac{\Psi}{t} \frac{(f_N - q_N)}{t} dF &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33 \cdot a, b)$$

#### (7) 横曲げモーメント

中立軸の長さが1となるように曲線ばり要素を切り取り、箱形ラーメンとみなすと、隅角部ごとに発生する未知横曲げモーメントのベクトル  $m$  と隅角部の角度変化量のベクトル  $\gamma$  の間には、応力法の関係式

$$\Delta m - E\gamma = 0 \dots\dots\dots (34)$$

が存在する。ただし、 $n$ を隅角部の総数とすると、マトリックス  $\Delta$  は、 $n \times n$ の対称マトリックスである。

$$\left. \begin{aligned} \Delta = E \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \quad \delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI(s)} ds \\ I(s) = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{\rho(s)}{R_N} t^3(s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35 \cdot a \sim c)$$

ここで、 $M_i$  は未知力をすべて解放した基本構造系において、隅角部  $\langle i \rangle$  に大きさ1で方向反対のモーメントの組が作用するときの曲げモーメント分布の関数である。また、 $\mu$  は Poisson 比である。

隅角部の角度変化量のベクトル  $\mathbf{r}$  は面内基本変形パターンにおける各板とそれに隣接する板の回転角の差を計算する変換マトリックス  $T$  を用いて変位関数ベクトル  $V$  と次のごとく対応づけられる<sup>15)</sup>。

$$\mathbf{r} = TV \quad \dots\dots\dots (36)$$

これらの式(34)，(36)より  $\mathbf{r}$  を消去すると，横曲げモーメントのベクトル  $m$  は次のごとくあらわされる。

$$m = E\Delta^{-1}TV \quad \dots\dots\dots (37)$$

#### (8) 支配微分方程式

外力の仮想仕事を  $A_a$ ，内力の仮想仕事を  $A_i$  とあらわすならば，仮想変位の原理より

$$\delta A_a + \delta A_i = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。この式の左辺の各項は次のごとく与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta A_a &= \int_{\Omega_F} p_q \delta v_q ds \rho d\theta + \int_{\Omega_F} p_N \delta u_i dF \rho d\theta + \sum_i P_{qi} \delta v_{qi} + \sum_j P_{Nj} \delta u_{ij} \\ \delta A_i &= - \int_{\Omega_F} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_s \delta \varepsilon_s + \sigma_n \delta \varepsilon_n + \tau_{xs} \delta \gamma_{xs} + \tau_{sn} \delta \gamma_{sn} + \tau_{nx} \delta \gamma_{nx}) dF \rho d\theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (39 \cdot a, b)$$

ただし， $p_q$  および  $P_q$  は，それぞれ，はりの軸線に直角で板の表面に作用する分布荷重および集中荷重である。 $p_N$  および  $P_N$  は，それぞれ，はりの軸線に平行に作用する分布荷重および集中荷重である。

薄肉構造物の仮定 b) より，上式において， $\sigma_n = \tau_{sn} = \tau_{nx} = 0$  とおける。また，断面変形により発生する垂直応力  $\sigma_s$  の仮想仕事は，横曲げモーメント  $m$  の仮想仕事に書き換えることができる。そこで，式(3)を用いて独立変数を取り替えるならば，次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \delta A_a &= \int_{\Omega_F} \frac{\rho}{R_N} p_q \delta v_q ds dx + \int_{\Omega_F} \frac{\rho}{R_N} p_N \delta u_i dF dx + \sum_i P_{qi} \delta v_{qi} + \sum_j P_{Nj} \delta u_{ij} \\ \delta A_i &= - \int_i \left[ \int_{\Omega_F} \frac{\rho}{R_N} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xs} \delta \gamma_{xs}) dF + m^T \delta \gamma \right] dx \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (40 \cdot a, b)$$

横方向荷重  $p_q$  または  $P_q$  の作用方向変位  $v_q$  は次式で与えられる。

$$v_q(x, s) = \mathbf{r}^{*T} V \quad \dots\dots\dots (41)$$

ただし，荷重作用方向ベクトル  $\mathbf{r}^*$  は次のごとく定義した。

$$\mathbf{r}^{*T} = (0 \quad \cos \alpha^* \quad \sin \alpha^* \quad r^* \quad r_{p1}^* \quad \dots \quad r_{pm}^*) \quad \dots\dots\dots (42)$$

ここで， $\alpha^*$  は  $y$  軸と荷重の作用線とのなす角， $r^*$  はせん断中心  $M$  より荷重の作用線までの距離， $r_{pi}^*$  は断面変形の基本変形(i)のときの回転中心  $V$  より荷重の作用線までの距離である<sup>16)</sup>。

仮想変位の原理式(38)に式(40)を代入し，すでに求められた式(22.a)，(24)，(29)を代入し，式(30.b)の關係を用いて整理するならば，最終的に次のごとく支配微分方程式と二つの境界条件式を得る。

$$\begin{aligned} EB^T F(BV_1^{IV} + CV'') - GB^T JBV'' + EC^T F(BV_1'' + CV) + EI_k V &= \int_{\Omega_F} \frac{\rho}{R_N} p_q \mathbf{r}^{*T} ds + B^T \int_{\Omega_F} \frac{\rho}{R_N} p'_N w dF \\ EB^T F(BV_1''' + CV') - GB^T JBV' - B^T \int_{\Omega_F} \frac{\rho}{R_N} p_N w dF + \sum_i P_{qi} \mathbf{r}_i^{*T} \Big|_{x_0}^{x_l} &= 0 \quad \dots\dots\dots (43 \cdot a \sim c) \\ EB^T F(BV_1'' + CV) + B^T \sum_j P_{Nj} w_j \Big|_{x_0}^{x_l} &= 0 \end{aligned}$$

ただし，ねじり抵抗マトリックス  $J$  およびラーメン抵抗マトリックス  $I_k$  は次のごとく定義して用いた。

$$J = \int_{\Omega_F} \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^3 \frac{\mathbf{y}}{t} \frac{\mathbf{y}^T}{t} dF, \quad I_k = T^T \Delta^{-1} T \quad \dots\dots\dots (44 \cdot a, b)$$

#### (9) 断面力

反りモーメントベクトル  $M$ ，初等せん断力ベクトル  $Q_{pr}$ ，二次せん断力ベクトル  $Q_{se}$ ，そして総合せん断力ベクトル  $Q$  を次のごとく定義する。

$$M = \int_F \sigma_x w dF, \quad Q_{pr} = \int_F \tau_{xs, pr} r dF, \quad Q_{se} = \int_F \tau_{xs, se} r dF, \quad Q = \int_F \tau_{xs} r dF \quad \dots\dots\dots (45 \cdot a \sim d)$$

これらの要素を具体的にあらわすと次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} M^T &= (N_x \quad M_x \quad M_y \quad M_{wT} \quad M_{wP1} \quad \cdots \quad M_{wPm}), \quad Q_{dT}^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad M_{T, \rho r} \quad Q_{P1, \rho r} \quad \cdots \quad Q_{Pm, \rho r}) \\ Q_{se}^T &= (0 \quad Q_y \quad Q_z \quad M_{T, se} \quad Q_{P1, se} \quad \cdots \quad Q_{Pm, se}), \quad Q^T = (0 \quad Q_y \quad Q_z \quad M_T \quad Q_{P1} \quad \cdots \quad Q_{Pm}) \end{aligned} \right\} \quad (46 \cdot a \sim d)$$

ただし、これらの曲げモーメントおよびせん断力の間には次なる関係が存在している。

$$M_T = M_{T, \rho r} + M_{T, se}, \quad Q_{P1} = Q_{P1, \rho r} + Q_{P1, se}, \quad \cdots, \quad Q_{Pm} = Q_{Pm, \rho r} + Q_{Pm, se} \quad (47)$$

上式(45)の応力の項に式(24.b), (25.b), (27.b), (29.b)を代入し、整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} M &= -EF(BV_1'' + CV), \quad Q_{\rho r} = GB^T JBV', \quad Q_{se} = -EB^T F(BV_1'' + CV) + B^T \int_{R_N}^{\rho} p_N w dF \\ Q &= GB^T JBV' - EB^T F(BV_1'' + CV) + B^T \int_{R_N}^{\rho} p_N w dF \quad (48 \cdot a \sim d) \end{aligned}$$

これらの式より、次なる関係式が見いだせる。

$$Q_{se} = B^T \left( M' + \int_{R_N}^{\rho} p_N w dF \right) \quad (49)$$

#### (10) 反り抵抗マトリックスの直交化

座標系を Fig. 1 のごとくすると、断面剛の仮定による単位反り関数はすべてたがいに直交する。しかし、断面変形の基本変形は任意に選んでいるため、その単位反り関数は直交しない。この反りの連成およびせん断ひずみの連成を次のごとく三つの条件を用いて順次直交化してゆく。

- i) 「断面変形の反り」と「軸力および曲げ変形の反り」はたがいに直交する。
- ii) 「断面変形の初等せん断ひずみ」と「ねじりの初等せん断ひずみ」はたがいに直交する。
- iii) 「断面変形の反り」はたがいに直交し、同時に「断面変形の初等せん断ひずみ」もたがいに直交する。

以上の経過より、直交化マトリックス  $K$  が求まり、これを用いて断面諸量のマトリックスの変換を計算できる(文献11)参照)。曲線ばりに特有のマトリックス  $B$  および  $C$  は次のごとく変換される。

$$K^{-1}BK \Rightarrow B, \quad K^{-1}CK \Rightarrow C \quad (50)$$

#### (11) 応力の断面力による表示

初等せん断応力を断面力であらわす。式(25.b)および(48.b)からベクトル  $V'$  を消去すると次式を得る。

$$\tau_{xs, \rho r} = \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{\Psi^{*T}}{t} J^{*-1} Q_{\rho r}^* \quad (51)$$

ただし、 $J^*$  は対角マトリックス  $J$  において、対角要素の零となる項の行および列を削除した正則なマトリックスである。また、 $\Psi^*$  および  $Q_{\rho r}^*$  は、ベクトル  $\Psi$  および  $Q_{\rho r}$  において、 $J$  から  $J^*$  への変換に対応する列を除いて得られる。

同様に、式(24.b), (48.a)から  $(BV_1'' + CV)$  を、そして式(27.b), (48.c)から  $(BV_1'' + CV)$  を消去すると、応力は次のごとく断面力であらわされる。

$$\sigma_x = \frac{R_N}{\rho} w^T F^{-1} M, \quad \tau_{xs, se} = - \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^2 \frac{(S - \Phi)^T}{t} F^{-1} (B^T)^{-1} Q_{se} \quad (52 \cdot a, b)$$

ただし、ここでは荷重項を省略して記述した。

#### (12) 連立1階常微分方程式

変位関数ベクトル  $V_1$  を  $x$  で微分したものを「たわみ角ベクトル」とよび、次式で定義する。

$$\theta_1 = V_1' \quad (53)$$

そして、状態量のベクトル  $z$  を次のごとく定義する。

$$z^T = (V \mid \theta_1 \mid M \mid Q) \quad (54)$$

式(43.a)および(48)を用いて  $z$  に関する連立1階常微分方程式を作成すると、次式となる。

$$\frac{dz}{dx} = Az + b(x) \quad (55)$$

ただし、係数マトリックス  $A$  および荷重項ベクトル  $b(x)$  は式(57), (58)で与えられる。これらの式中の  $E$  は単位マトリックス、そしてマトリックス  $D$  は次式で定義した。

$$D = F^{-1} R F^{-1} \dots\dots\dots (56)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1}(E+DJ)^{-1}B & 0 & \frac{1}{G} B^{-1}(E+DJ)^{-1}D(B^T)^{-1} \\ -B^{-1}C & 0 & -\frac{1}{E} B^{-1}F^{-1} & 0 \\ 0 & -GJ(E+DJ)^{-1}B & 0 & [E-J(E+DJ)^{-1}D](B^T)^{-1} \\ EI_k & 0 & -C^T & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (57)$$

$$b(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} B^{-1}(E+DJ)^{-1} \left\{ F^{-1} \int_F \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^3 \frac{(S-\Phi)}{t} \frac{(f_N-q_N)}{t} dF - D \int_F \frac{\rho}{R_N} p_N w dF \right\} \\ 0 \\ -J(E+DJ)^{-1}F^{-1} \int_F \left( \frac{R_N}{\rho} \right)^3 \frac{(S-\Phi)}{t} \frac{(f_N-q_N)}{t} dF - [E-J(E+DJ)^{-1}D] \int_F \frac{\rho}{R_N} p_N w dF \\ - \int_F \frac{\rho}{R_N} p_Q r^* ds \end{bmatrix} \dots\dots (58)$$

#### 4. 伝達マトリックス法による解析

解析は伝達マトリックス法によった。しかし、周知のごとく、構造系が長大になると、伝達計算過程での桁落ちとそれに伴う精度の著しい低下の問題が発生し、解析は実質上不可能となる。そこで、数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法が提案<sup>17)</sup>され、さらに、中間格点条件の効率的処理<sup>18)</sup>を施すことにより中間格点に未知量が煩雑に発生する構造系の解析も容易に行えるようになった。この方法をここでは「修正伝達マトリックス法」と呼び、その概略を述べる。

桁落ちによる精度の低下を避けるため、状態量の無次元化は不可欠である。状態量のベクトル  $z$  を無次元化すると、連立1階常微分方程式の係数マトリックスおよび荷重項ベクトルも同時に変換される。このようにして得られた無次元化状態量に関する連立1階常微分方程式の一般解に初期条件を与えることにより、通常の格間伝達マトリックスが係数マトリックス  $A$  の指数関数を用いて表せる。はりが定断面ならば、指数関数の定義に従いマトリックスの級数として格間伝達マトリックスを計算できる<sup>16)</sup>。はりが変断面ならば、Runge-Kutta の公式を用いて文献 11)に示したごとく計算できる。

次に中間未知量の総数を計算する。ただし、その計算法については文献 17)に詳述したので、ここでは省略する。この中間未知量の総数がわかると、上述の格間伝達マトリックスをもちいて逆進演算用の「拡大格間伝達マトリックス」が設定できる。さらに、その逆マトリックスを求めるならば、それが順進演算用の拡大格間伝達マトリックスとなる。

拡大格間伝達マトリックスは単位マトリックスにおいて、中間未知量の種類より決まる行でその出現する順番より決まる列の要素に順進計算では -1 を、逆進計算では +1 を代入することにより得られる。

以上のごとく、順進および逆進計算の拡大格間および格点伝達マトリックスがすべて求められたならば、両端の境界条件より初期マトリックスを設定し、順進および逆進計算をそれぞれの始端より終端まで遂行できる。その結果として与えられる各格点の順進および逆進の「伝達係数マトリックス」を組み合わせることで、中間格点の未知量に関する連立方程式を得る。これを解いて各格点の中間未知量および状態量を知る。

## 5. 数值計算例

プレストレストコンクリートの4径間連続変断面4室箱桁橋(1等橋)を取りあげる。コンクリートの設計基準強度を $400\text{kgf/cm}^2$  ( $39200\text{kPa}$ ) とすると、縦弾性係数、横弾性係数、Poisson 比は「道路橋示方書」よりそれぞれ  $3.5 \times 10^5\text{kgf/cm}^2$  ( $34.3\text{MPa}$ )、 $1.5 \times 10^5\text{kgf/cm}^2$  ( $14.7\text{MPa}$ )、 $1/6$  となる<sup>19)</sup>。

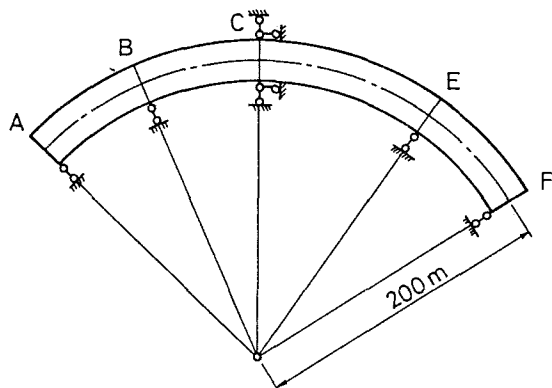
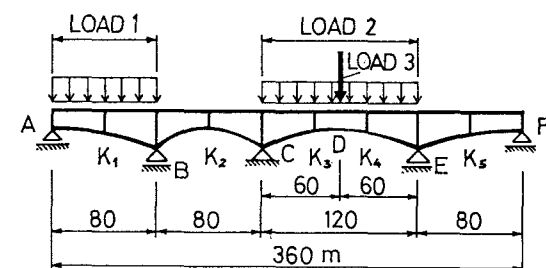


Fig. 3 Supporting condition

構造系の側面図および支持状態を Fig. 3 に示す。曲率の中心と中央ウェブの肉厚中心との距離は200mmとする。断面を構成する各部材の寸法は、ウェブ高さ $H$ と下フランジ厚さを除いてすべて一定とする (Fig. 4)。ウェブ高さ $H$ を上下フランジの肉厚の中心線間の距離と定義し、下フランジ厚さ $T$ とともに、径間ごとに橋軸方向に二次放物線関数で変化している。この連続桁の両端の支承AおよびF上の桁断面のウェブ高さ $H$ は4.0m、下フランジ厚さ $T$ は40cmである。中間隔壁は「道路橋示方書」の解説にしたがい、

構造系が薄肉部材より構成されているかどうかの明確な判定基準は確立されていないが、Vlasovによれば、 $(\text{板厚}) / (\text{断面寸法}) \leq 0.1$ 、 $(\text{断面寸法}) / (\text{材長}) \leq 0.1$  と定義している。上図の構造系のウエブはその桁高が低くなると、この規準を満足しなくなるが、はりの理論の適用範囲としては問題無いと思われる。

荷重としては、第3径間の最小断面Dに最大の断面変形を発生させるべく、「道路橋示方書」の規定を参考にして、Fig. 5に示す偏載活荷重を作用させた。

本論文の理論に基づき数値計算を行った。その結果求められた最小断面Dにおける直交化後の4つの基本

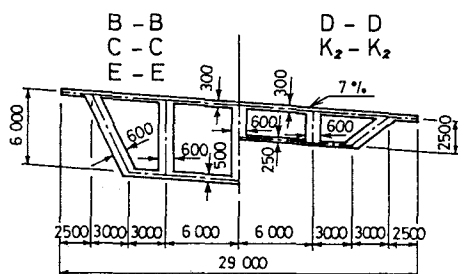


Fig. 4 Cross-section

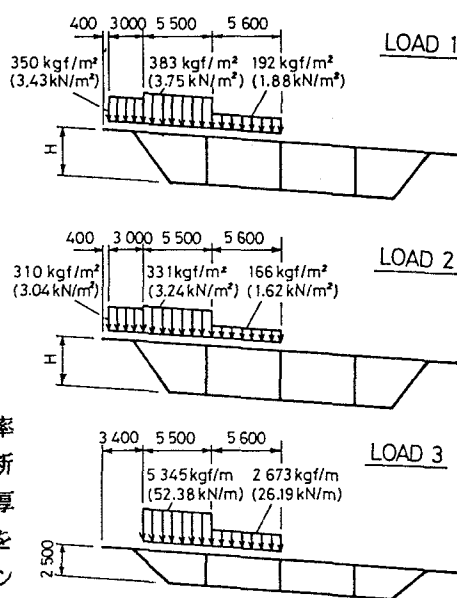


Fig. 5 Types of loads

となる断面変形のパターンを示すと、Fig. 6のごとくなる。また、求められた状態量のうち、特に重要な量の分布状態をFig. 7～11に示す。

直線ばりでは、曲げによる初等せん断力は存在しないが、曲線ばりでは値をもつ。本例題におけるy軸まわりの曲げによるせん断力の分布はFig. 10のごとくなるが、きわめてわずかな量であることがわかる。

次に応力値の検討を行う。曲率の増加と共に各応力値がどのように変化するかという課題は興味深い。そこで、本例題の構造系において、曲率0(直線)の場合、曲率 $1/200 \text{ m}^{-1}$ の場合、曲率 $1/100 \text{ m}^{-1}$ (湾曲度大)の場合、の計3種類にたいして応力値を求めた。その結果、橋軸方向の引張応力の最大値および横曲げモー

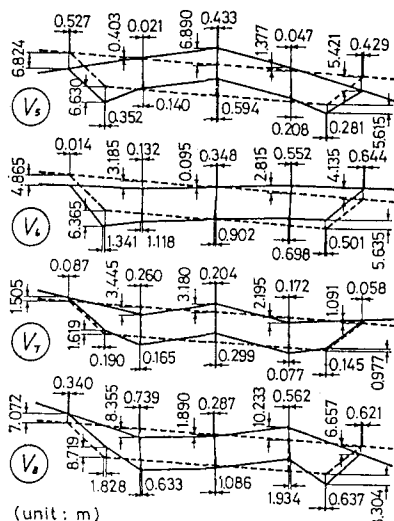


Fig. 6 Basic distortion patterns  
at the cross-section D

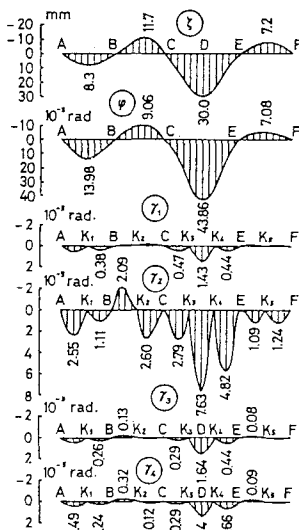


Fig. 7 Displacement

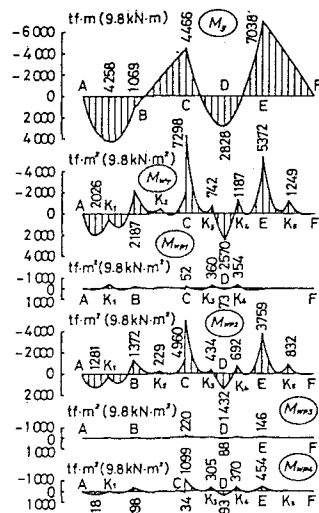


Fig. 8 Warping moment

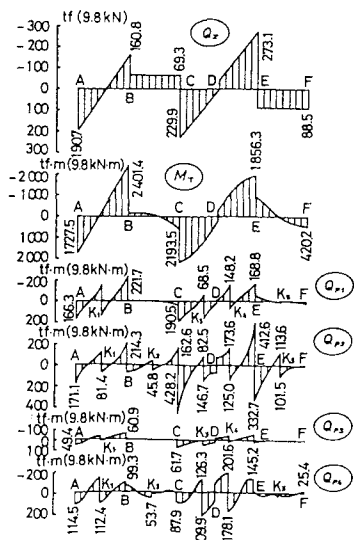


Fig. 9 Shearing force

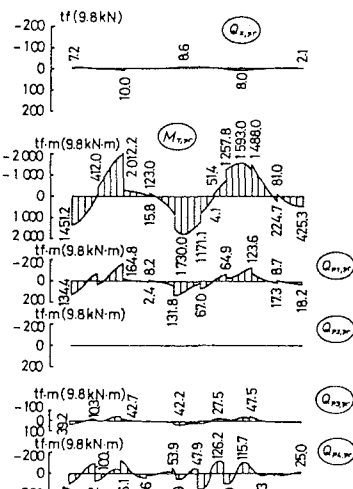


Fig. 10 Primary shearing force

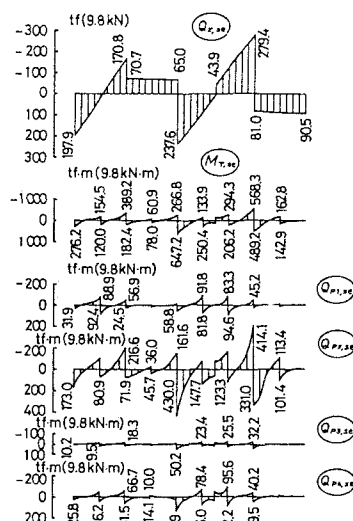


Fig. 11 Secondary shearing force

メントによる断面内方向の垂直応力の最大値は、ともに第3径間の最小断面位置Dで発生した。また、せん断応力の最大値は、中間隔壁K<sub>4</sub>の右側で発生した。これら最大値の断面内での発生点をFig. 12に示す。上述の3種類の曲率における最大応力発生点での各応力、横曲げモーメントの値をTable 1に示す。この表より以下のことがわかる。

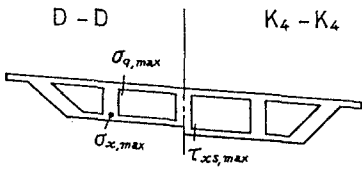


Fig. 12 Points where maximum stress occurred

- a) 曲率の増大と共にM<sub>y</sub>による垂直応力はわずかに減少するが、M<sub>wT</sub>およびM<sub>wP</sub>による垂直応力は増大する。その結果、橋軸方向の垂直応力の総和は増大してゆく。
- b) 曲率の増大と共にQ<sub>z</sub>によるせん断応力およびM<sub>T</sub>によるせん断応力は増大し、断面変形によるせん断応力は減少する。その結果、せん断応力の総和は増大してゆく。その理由はねじりモーメントによる初等せん断応力の増加率が断面変形のそれより大きいためである。
- c) 曲率の増大と共に対称変形パターンV<sub>5</sub>、V<sub>7</sub>による横曲げモーメントは増大し、逆対称変形パターンV<sub>6</sub>、V<sub>8</sub>による横曲げモーメントは減少する。その結果、総和は減少してゆく。その理由は、本例題の偏載荷重において、支配的な変形パターンがV<sub>6</sub>だからである。

### 6. あとがき

断面変形を考慮して曲線多室箱桁の理論式を誘導し、伝達マトリックス法を用いて数値計算例を解いた。本文の理論はせん断変形の影響を考慮し、同時にはりを構成する板要素の母線ごとの曲率の変化も厳密に取り扱っているため、曲率の大きな連続桁にも適用可能である。

本理論中で直線ばりの軸方向変位u<sub>1</sub>は曲線ばりの軸方向変位(R<sub>N</sub>/ρ)u<sub>1</sub>に対応することをひずみの定義式(8)で示し、それに付随してはりの微小要素の力のつり合い条件式(11)に変更を加え、式(12)とした。この変更により、微小要素の力のつり合い条件は厳密な意味では満足されないが、従来の理論を保持し、二次せん断応力分布の一意性を確保するにはやむをえない処置と思われる。

理論式の誘導に際しては、直線ばりとの対応を計るべく、係数マトリックスB、Cを導入した。直線ばりにおいて、R<sub>N</sub>/ρは1になるから、マトリックスB、Cはそれぞれ単位マトリックスおよび零マトリックスに移行する。本文の理論式をこのように変換すると、直線多室箱桁の式<sup>1)</sup>に一致することが確認できる。本文中の数値計算の結果より、はりの曲率と断面変形の応力との間に次の関係のあることがわかった。

- 1) はりの曲率の増大と共にねじりおよび断面変形による垂直応力はわずかに増える程度である。この応力の曲げ垂直応力に対する割合は20～25%ほどである。
- 2) はりの曲率の増大と共に断面変形のせん断応力および横曲げモーメントは減少する。特に、断面変形のせん断応力はすみやかに減少してゆく。
- 3) 数値計算で扱った偏載荷重(Fig. 5)の作用下では、断面変形の基本変形パターンV<sub>6</sub>が支配的影響力をもつ。

Table 1 Maximum stress values

| CURVATURE (m <sup>-1</sup> )                 | 0     | 1/200 | 1/100 |
|----------------------------------------------|-------|-------|-------|
| σ <sub>y</sub>                               | 16.8  | 16.8  | 16.7  |
| σ <sub>w</sub>                               | 3.5   | 3.7   | 3.9   |
| σ <sub>y+w</sub> (kgf/cm <sup>2</sup> )      | 20.3  | 20.5  | 20.6  |
| τ <sub>xs,z</sub>                            | 1.31  | 1.50  | 1.80  |
| τ <sub>xs,T</sub>                            | 1.88  | 2.72  | 3.84  |
| τ <sub>xs,P</sub>                            | 2.13  | 1.71  | 1.15  |
| τ <sub>xs,z+T+P</sub> (kgf/cm <sup>2</sup> ) | 5.32  | 5.93  | 6.79  |
| m <sub>5</sub>                               | 86    | 115   | 179   |
| m <sub>6</sub>                               | 839   | 586   | 217   |
| m <sub>7</sub>                               | 94    | 138   | 166   |
| m <sub>8</sub>                               | 114   | 56    | 3     |
| m <sub>5+6+7+8</sub> (kgf·m/m)               | 1 133 | 895   | 565   |

以上の事実より、曲率の大きい多室箱桁橋の断面変形による応力は直線多室箱桁橋のそれよりも小さな影響を与えることがわかる。しかし、断面変形によるせん断応力のねじりモーメントによるせん断応力に対する割合はきわめて大きい。したがって、断面変形を考慮した解析が必要である。

本文中の数値計算例は東京大学大型計算機センターの HITAC M-280H を用いて行われた。

最後に、本論文作成にあたり、種々協力してくれた東京理科大学 土木工学科 構造研究室の平山 博君（現・大日本コンサルタント(株)）および小澤光司君（現・楢崎産業(株)）に感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) 小西一郎・小松定夫：薄肉曲線桁の基礎理論，土木学会論文集，No.87，pp.35～48，1962-11.
- 2) 倉西 茂：一般薄肉曲りばりの解析，土木学会論文集，No.108，pp.7～12，1964-8.
- 3) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集，No.110，pp.30～51，1964-10.
- 4) 西野文雄・深沢泰晴：ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化，土木学会論文報告集，No.247，pp.9～19，1976-3.
- 5) Kambe, S.: Modified Theory of Torsion Bending for a Circularly Curved Box Girder Bridge, Proc.of JSCE, No.297, pp.95～110, 1980-5.
- 6) 大塚久哲・吉村虎造・彦坂 熙：曲線箱桁橋における中間隔壁の補剛効果，橋梁と基礎，Vol.12，No.1，pp.39～42，No.2，pp.40～43，1978.
- 7) 坂井藤一・長井正嗣：ブロック有限要素法による薄肉曲線桁の立体解析，土木学会論文報告集，No.295，pp.1～12，1980-3.
- 8) Dabrowski, R.: Gekrümmte dünnwandige Träger, Springer-Verlag, 1968.
- 9) 中井 博・村山泰男：ダイヤフラムを有する曲線箱桁橋のずり応力の解析と設計への応用，土木学会論文報告集，No.309，pp.25～39，1981-5.
- 10) 坂井藤一・長井正嗣：曲線鋼箱桁橋の中間ダイヤフラム設計法に関する一提案，土木学会論文報告集，No.305，pp.11～22，1981-1.
- 11) 白木恒雄：断面変形を考慮した変断面直線多室箱桁橋の一解析法，土木学会論文集，No.368/1-5，pp.265～274，1986-4.
- 12) 高橋邦引・米子明伸・水野正夫：断面変形を考慮した薄肉開き断面曲線部材の解析，土木学会論文報告集，No.320，pp.47～55，1982-4.
- 13) Hikosaka, H. and Takami, K.: Formulation of distortional behavior of thin-walled curved beam with open cross section, Proc. of JSCE, No.356/1-3, pp.91～100, 1985-4.
- 14) Beyer, K.: Statik im Stahlbetonbau, Springer-Verlag, pp.756～757, 1956.
- 15) Sedlacek, G.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für prismatische Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung, Fortschrittbericht, VDI-Z, Reihe 4, Heft 8, VDI-Verlag, 1968.
- 16) Usuki, T.: Ein Beitrag zur Theorie dünnwandiger prismatischer Stäbe mit offen-geschlossenem Profil aus vier Scheiben, Die Bautechnik, Vol.60, Heft 1, pp.14～23, 1983.
- 17) 中村秀治：数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案，土木学会論文報告集，No.289，pp.43～53，1979-9.
- 18) 白木恒雄・中村秀治：伝達マトリックス法における中間格点条件の効率的処理，土木学会論文集，No.374/1-6，pp.409～417，1986-10.
- 19) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説III，コンクリート橋編，昭和53年 1月.

(1987年10月16日受付)