

非線形弾性地盤上の矩形板の非弾性曲げの一解析法

AN ANALYSIS OF INELASTIC BEHAVIOUR OF RECTANGULAR PLATE ON NONLINEAR ELASTIC FOUNDATIONS

松田浩* 崎山毅**

by Hiroshi MATSUDA and Takeshi SAKIYAMA

The problems on bending of rectangular plates on elastic foundations have been studied by many investigators. However it has been hardly carried out to study for an inelastic bending of rectangular plate on elastic foundations.

In this paper, using the discrete method which the authors proposed previously, inelastic behaviours of square plate with four free edges on nonlinear elastic foundations under a concentrated load applied at the center are analyzed.

1. 序言

地盤上の構造物や軌道等の設計においては、従来、地盤反力と地盤の変形量との関係が線形であるとしたWinklerの仮定に基づいて、構造物は線形ばねが連続分布した、いわゆる、弾性基礎上にあるものとして解析される場合が多かった。しかしながら、より実際に近い条件の下で構造物の挙動を解析するためには、地盤には負の反力が存在しないこと、また、地盤反力と地盤の変形量との間の関係が非線形性を示すことなどの条件を考慮する必要がある。

基礎地盤との相互作用を含めた平板の非線形挙動に関して、現時点においては、線形弾性地盤^{1)~6)}、諸種の非線形弾性地盤⁷⁾あるいは粘弾性地盤^{8)~9)}などの上に置かれた弾性平板に関する研究が行われており、基礎地盤上の矩形板の材料非線形性を考慮した非線形解析法に関しては筆者らが知る限り見当たらないようである。

本論文は、筆者らが先に提示した離散化手法による解法^{10)~12)}を用いて、Winkler 基礎上および非線形弾性地盤上の矩形板の弾性解析および非弾性解析を行ない、本解法のそれらの問題への適用性を検討するとともに、弾性基礎地盤の非線形性および平板の材料非線形性がその挙動特性へ与える影響などを明らかにしたものである。なお、本文においては板厚方向に多層等分割して材料非線形性の影響を考慮する。

*工博 長崎大学助手 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)
**工博 長崎大学教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)

また、厳密には幾何学的非線形性をも考慮しなければならないが、ここではその影響を無視して解析を行なう。数値計算例として、4辺自由板に中央点集中荷重が作用する正方形板を取り扱い、基礎地盤は双曲線形非線形ばねとしてモデル化した。さらに、本例以外の種々の境界条件および荷重条件、あるいは、種々のばね特性をもつ弾性ばね基礎の場合についても本例と同様にして解析することが可能である。

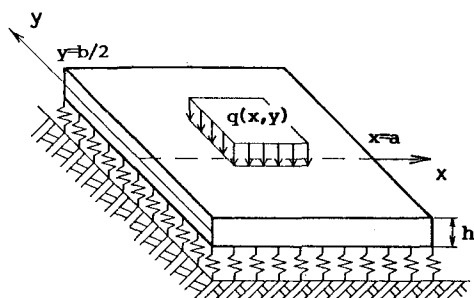


Fig.1 弾性地盤上の矩形板

2. 増分形基礎微分方程式

矩形板のせん断力を Q_y 、 Q_x 、ねじりモーメント M_{xy} 、曲げモーメントを M_y 、 M_x 、たわみ角を θ_y 、 θ_x 、たわみを w とすれば、Mindlin理論($\sigma_z=0$)に基づく弾性地盤上の矩形板の弾塑性挙動を支配する基礎微分方程式は、次の増分形式の変数係数の連立偏微分方程式で表わされる。(図1 参照)

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + \Delta q - k_v \Delta w = 0 \quad (1-a) \quad \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{D} (b_{21} \Delta M_x + b_{22} \Delta M_y + b_{23} \Delta M_{xy}) \quad (1-e)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1-b) \quad \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{D} (b_{31} \Delta M_x + b_{32} \Delta M_y + b_{33} \Delta M_{xy}) \quad (1-f)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1-c) \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{\Delta Q_x}{\kappa G h} \quad (1-g)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{D} (b_{11} \Delta M_x + b_{12} \Delta M_y + b_{13} \Delta M_{xy}) \quad (1-d) \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{\Delta Q_y}{\kappa G h} \quad (1-h)$$

ここに、 $q=q(x,y)$: 横荷重強度、 E : 弾性係数、 $G=E/2(1+\nu)$: せん断弾性係数、 ν : ポアソン比、

$h=h(x,y)$: 板厚、 $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度、 $\kappa=5/6$: せん断修正係数、 $k_v=k_v(x,y)$: 地盤反力係数、 Δ : 荷重増分 Δq に対する各断面力および変形量の増分、 $[b_{ij}]$: APPENDIX I

次の無次元量:

$$X_1 = a^2 Q_v / [D_0 (1 - \nu^2)], X_2 = a^2 Q_x / [D_0 (1 - \nu^2)], X_3 = a M_{xy} / [D_0 (1 - \nu^2)], X_4 = a M_v / [D_0 (1 - \nu^2)]$$

$$X_5 = a M_x / [D_0 (1 - \nu^2)], X_6 = \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a, \eta = x/a, \zeta = y/b,$$

を用いると、式(1-a)~(1-h)は、次式のように簡単に書き換えられる。

$$\sum_{s=1}^8 \{ F_{1ts} (\partial \Delta X_s / \partial \zeta) + F_{2ts} (\partial \Delta X_s / \partial \eta) + F_{3ts} \Delta X_s \} + \delta_{1t} \Delta \bar{q} = 0 \quad (2)$$

ここに、 δ_{ij} : Kronecker's delta、 $t=1,2,\dots,8$ 、 F_{kts} : APPENDIX II、

a, b : 矩形板の横縦の辺長、 $\mu=b/a$ 、 h_0 : 基準板厚、 q_0 : 基準荷重

強度、 $\bar{q} = \mu q_0 a^3 / [D_0 (1 - \nu^2)] [q(x,y)/q_0]$ 、 $K = Eh_0^3 / (12 \kappa G h)$ 、

$I = I(x,y) = \mu (1 - \nu^2) (h_0/h)^3$ 、 $D_0 = Eh_0^3 / [12 (1 - \nu^2)]$: 基準板剛度、

$\bar{K}_v = \mu k_{v0} a^4 / [D_0 (1 - \nu^2)] [k_v(x,y)/k_{v0}]$ 、 k_{v0} : 基準地盤反力係数

式(2)を用いて、弾性地盤上の矩形板の非弾性曲げ解析が行われる。

3. 基礎微分方程式の離散解

等厚な矩形板であっても、弾塑性状態にある矩形板の基礎方程式は、式(1)のような $[b_{ij}]$ を変数係数とする連立偏微分方程式となるため、その解析解を一般的に求めることはほとんど不可能であると考えられ

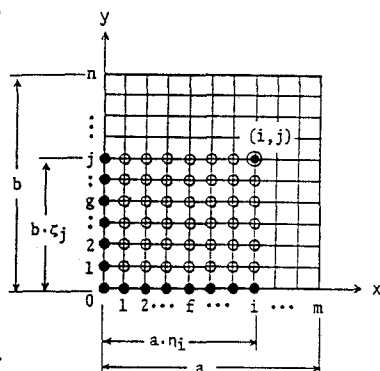


Fig.2 矩形板の離散点

る。したがって、ここでは、図2に示すように、矩形板を横、縦方向にそれぞれ m, n 等分し、これらの等分割線の交点を対象として、これらの離散点における基礎微分方程式の離散解を求める。

図2において、任意の交点 (i, j) に関連する矩形領域、 $0 \leq \eta \leq \eta_i, 0 \leq \zeta \leq \zeta_j$ に注目し、これを領域 $[i, j]$ と表記することとする。また、図中の◎印を付けた交点を任意領域 $[i, j]$ の主要点、○印を付けた交点を内部従属点、●印を付けた交点を境界従属点と称して区別することとする。

はじめに、式(2)を領域 $[i, j]$ において面積分し、積分方程式に変換すれば、次の式が得られる。

$$\sum_{s=1}^8 \left\{ F_{1ts} \int_0^{\eta_i} [\Delta X_s(\eta, \zeta_j) - \Delta X_s(\eta, 0)] d\eta + F_{2ts} \int_0^{\zeta_j} [\Delta X_s(\eta_i, \zeta) - \Delta X_s(0, \zeta)] d\zeta \right. \\ \left. + F_{3ts} \int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \Delta X_s(\eta, \zeta) d\eta d\zeta \right\} + \delta_{1t} \int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \Delta q(\eta, \zeta) d\eta d\zeta \quad (3)$$

つぎに、等間隔の数値積分法の応用により、領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) および従属点 (k, l) の諸量を用いて、これらの積分方程式を離散表示すれば、無次元化された断面力および変形の主要点 (i, j) における未知量に関する連立方程式が次のように得られる。

$$\sum_{s=1}^8 \left\{ F_{1ts} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} [\Delta X_{skj} - \Delta X_{sk0}] + F_{2ts} \sum_{l=0}^j \beta_{jl} [\Delta X_{sil} - \Delta X_{s0l}] \right. \\ \left. + F_{3ts} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} \Delta X_{skl} \right\} + \delta_{1t} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} \Delta q_{kl} = 0 \quad (4)$$

ここで、 q_{kl} は点 (k, l) における関数 $q(\eta, \zeta)$ の値である。

主要点 X_{pij} に関する、連立方程式(4)の解は、次のように表わすことができる。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i A_{pt} \beta_{if} [\Delta X_{tf0} - \Delta X_{tfj} (1 - \delta_{fi})] + \mu \sum_{g=0}^j B_{pt} \beta_{jg} [\Delta X_{t0g} - \Delta X_{tig} (1 - \delta_{gj})] \right. \\ \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j C_{ptfg} \beta_{if} \beta_{jg} \Delta X_{tf g} (1 - \delta_{fi} \delta_{gj}) \right\} - A_{p1} \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if} \beta_{jg} \Delta q_{fg} \quad (5)$$

$p=1 \sim 8, i=1 \sim m, j=1 \sim n, k=0 \sim i, l=0 \sim j, \beta_{ik} = \alpha_{ik}/m, \beta_{jl} = \alpha_{jl}/n,$

δ_{ij} : Kronecker's delta, A_{pt}, B_{pt}, C_{ptkl} : APPENDIX III

係数 β_{ik}, β_{jl} は数値積分法における重み係数である。本論文においては、等分割数値積分法として、台形公式を用いることとする。このとき、 $\alpha_{ik} = 1 - (\delta_{0k} + \delta_{ik})/2, \alpha_{jl} = 1 - (\delta_{0l} + \delta_{jl})/2$

領域 $[i, j]$ を $[1, 1], [1, 2], \dots, [1, n], [2, 1], [2, 2], \dots, [2, n], [m, 1], [m, 2], \dots, [m, n]$ と順次拡大してゆけば、ある領域の主要点は、次のより拡大された領域の内部従属点となる。したがって、最小領域 $[1, 1]$ から始めて、順次、領域を拡大しつつ、各領域の主要点の諸量 ΔX_{pij} を式(5)により求め、これを次の領域の内部従属点における諸量 $\Delta X_{pk l}$ として、式(5)の右辺に逐次代入していけば、各領域の内部従属点の諸量はすべて消去され、結局、任意の領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) における諸量 ΔX_{pij} は、この領域の境界従属点 $(k, 0), (0, l)$ における諸量 $\Delta X_{rk0}, (r=1, 3, 4, 6, 7, 8), \Delta X_{s0l}, (s=2, 3, 5, 6, 7, 8)$ のみによって表わされることになり、その結果は次式のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left\{ \sum_{k=0}^i a_{pijkd} \Delta X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \Delta X_{s0l} \right\} + \Delta q_{pij} \quad (6)$$

$a_{pijkd}, b_{pijld}, q_{pij}$: APPENDIX IV

式(6)は、矩形板の縦横の等分割線の交点における、基礎微分方程式(1-a)~(1-h)を無次元化した式(2)の離散解である。この解式中に含まれる境界従属点の6個ずつの諸量 $\Delta X_{rk0}, \Delta X_{s0l}$ はいわゆる積分定数であり、具体的には、それぞれ、矩形板の $y=0$ および $x=0$ なる辺上の等分割点 $(k, 0)$ および $(0, l)$ における断面力および変形を表わす。各等分割点において6個ずつの積分定数が存在するが、平板の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか3個の積分定数は、はじめから既知である。残りの3個の未知なる

積分定数は、 $x = a$ および $y = b$ の各辺の境界条件によって決定される。なお、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 ΔX_{pij} を、この領域の境界従属点における諸量 ΔX_{rfo} 、 ΔX_{sog} に関係づける要素 a_{pijkd} および b_{pijkd} は、伝達マトリックス法におけるいわゆる伝達マトリックスに相当するものである。

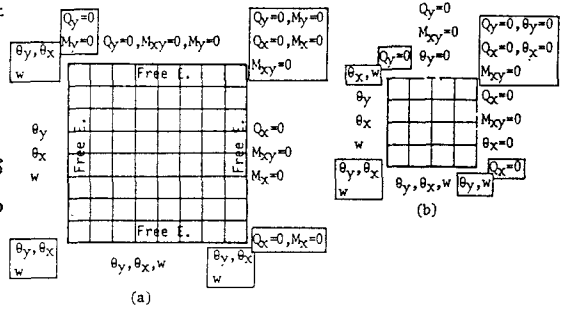


Fig.3 4辺自由板の積分定数と境界条件

図3に4辺自由板の積分定数と境界条件を示す。図3において、(a)図は、矩形板全体を対象とした場合であり、(b)図は、左右および上下の2軸対称性をもつ平板の1/4部分を対象とした場合である。各図において、隅角点における積分定数および境界条件は、□で囲まれている。なお、積分定数と境界条件の取り扱い方法について、詳細は文献[10]を参照されたい。

5、数値計算手法

(1) 矩形板の材料非線形性

矩形板の材料非線形性を考慮する場合の仮定は次のとおりである。

- (1) 矩形板は、非硬化性材料から成る。
- (2) 部材断面に降伏域が生じた後もMindlinの理論が成り立つ。
- (3) 変形は、板厚に比して小さい。したがって、幾何学的非線形性は考慮しない。
- (4) 材料は、von-Misesの降伏条件式に従う。

いま、第 n 荷重段階で矩形板の断面の一部が弾塑性状態にあるとするなら、基礎微分方程式(1-a)～(1-h)における変数係数 $[b_{ij}]$ ($i, j=3$)は、次の計算手順によって求めることができる。なお、本論文においては、断面を多層等分割して解析を行なう。(板厚方向の等分割数： $n_z=20$)

〔データ〕 第 $(n-1)$ 荷重段階における無次元応力

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_0} = \frac{n-1}{\Sigma} \frac{\Delta \sigma_x}{\sigma_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \frac{n-1}{\Sigma} \frac{\Delta \sigma_y}{\sigma_0}, \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} = \frac{n-1}{\Sigma} \frac{\Delta \tau_{xy}}{\sigma_0}$$

- (a) 第 $(n-1)$ 荷重段階の無次元応力を用いて、すべての離散点における断面のすべての要素について無次元偏差応力 $\sigma_x', \sigma_y', \tau_{xy}'$ を計算する。
- (b) $[b_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}$ の計算。(これにより剛性の低下が評価される)
- (c) $[b_{ij}]$ が決定されると、第 n 荷重段階での増分荷重 Δq に対する増分断面力および増分変形量が求められる。($\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_{xy}$ の算定)
- (d) 第 n 荷重段階における無次元増分応力の算定。

$$\Delta \sigma_x / \sigma_0, \quad \Delta \sigma_y / \sigma_0, \quad \Delta \tau_{xy} / \sigma_0$$

- (e) 第 n 荷重段階における無次元応力の算定。

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_0} = \frac{n}{\Sigma} \frac{\Delta \sigma_x}{\sigma_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \frac{n}{\Sigma} \frac{\Delta \sigma_y}{\sigma_0}, \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} = \frac{n}{\Sigma} \frac{\Delta \tau_{xy}}{\sigma_0}$$

以上の(a)～(e)の計算を増分法を用いて繰り返して計算を行なう。

(2) 非線形弾性地盤

本論文においては図4に示すように地盤反力と地盤の変形量との関係が次式の双曲線形(文献[7]参照)で表わされる

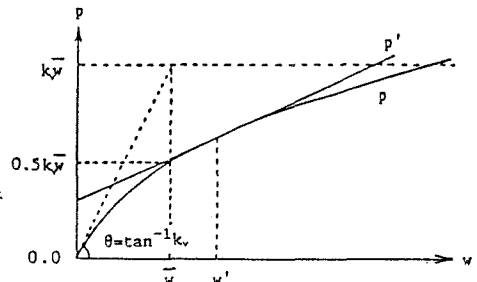


Fig.4 双曲線形非線形弾性地盤

非線形ばねを用いた。

$$p = k_v \bar{w} w / (\bar{w} + w)^2 \quad (7)$$

従って、任意の変形量 w' に対する地盤反力係数は、式(7)の微係数として次式で表わされる。

$$k_v w'^2 / (w' + \bar{w})^2 \quad (8)$$

5. 数値解析結果

弾性地盤との相互作用を含めた平板の材料非線形性の影響を明らかにするために、Winkler基礎上および双曲線形非線形弾性基礎上の四辺自由正方形板に中央点集中荷重が作用する場合の解析を行なった。(分割数： $m/2=n/2=5$)

図5～図7に、Winkler基礎上および双曲線形非線形弾性基礎上の矩形板の弾性および非弾性曲げの荷重-変位曲線を示す。図5は、矩形板の中央点における荷重-変位曲線を示したものであるが、弾性地盤上の矩形板の非弾性曲げ挙動は、塑性開始後、荷重の増分とともに変位は急激には増加しない。これは、荷重の増加に伴い、地盤反力も増加するためである。図6および図7は、各々、矩形板の自由辺の中央点および隅角部における荷重-変位曲線を示したものである。これらの図より、辺上での荷重-変位曲線は矩形板の中央点における荷重-変位曲線とは異なり、塑性開始後荷重の増加とともに増分変位は小さくなる傾向がある。特に隅角部においては、図7に示すように、塑性開始後、荷重の増加とともに増分変位は小さくなり始め、崩壊荷重に近い荷重値(図7におけるA,B点)では、荷重が増加しても変位はほとんど増加せず、さらにそれ以後は、逆に荷重の増加とともに変位が減少していることがわかる。すなわち、塑性域の進行とともに隅角部には相対的な浮き上がりが生ずるものと判断される。

図8は、板中央点におけるWinkler基礎上および双曲線形非線形弾性基礎上の矩形板の弾性および非弾性曲げの荷重-曲げモーメント(M_x)曲線を示す。荷重-曲げモーメント

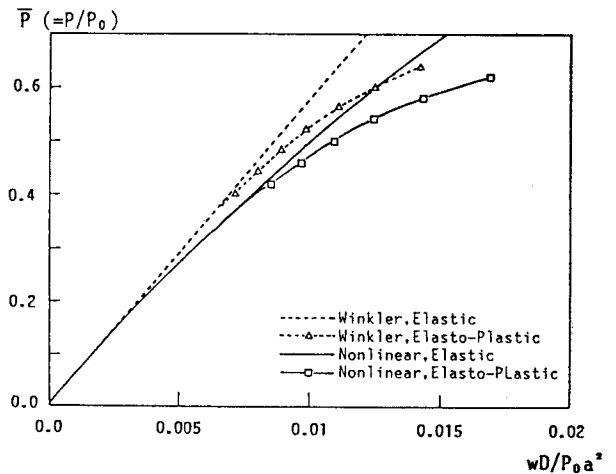


Fig.5 荷重-変位曲線[中央点(a/2,0)]

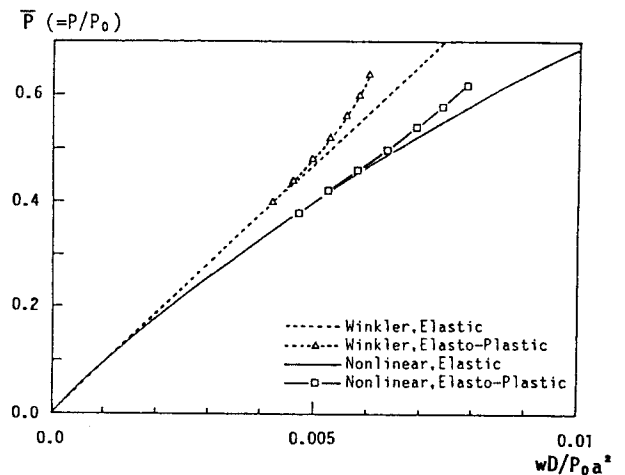


Fig.6 荷重-変位曲線[自由辺中央点(0,0)]

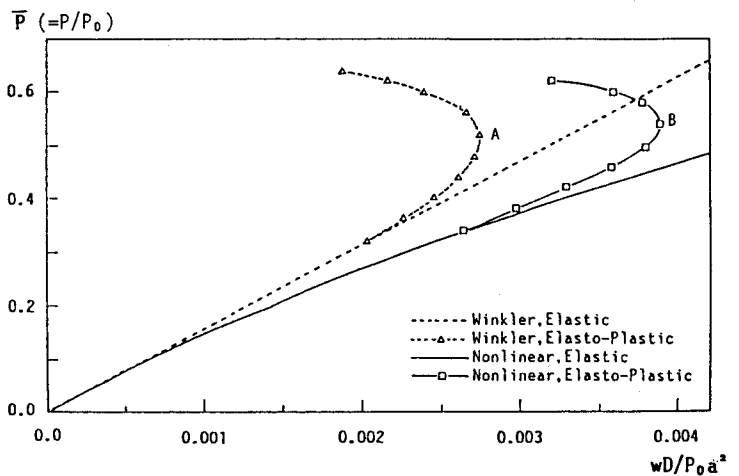


Fig.7 荷重-変位曲線[隅角点(0,b/2)]

曲線はWinkler基礎上および双曲線形非線形弾性基礎上の場合とではほとんど変わらない。しかしながら、弾性および非弾性に注目すると、非弾性の場合は塑性域が進行するにつれ荷重が増加してもモーメントの増加はほとんどなく、モーメントはある一定値に収束することがわかる。

図9～図12は、各々、塑性開始後の $P=0.24$ 、 0.48 、 0.62 のときの、 $y=0$ 上のたわみ w 、曲げモーメント M_y および M_x 、地盤反力 p の分布図を示したものである。図10より、曲げモーメント M_y の分布は、 $P=0.48$ のときは板中央部、 $P=0.62$ のときは板全体において平滑化していることがわかる。これは弾性範囲を超え

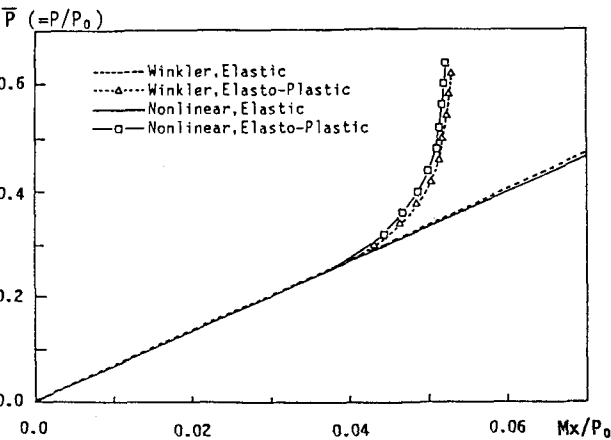


Fig.8 荷重—曲げモーメント(M_x)曲線[中央点($a/2,0$)]

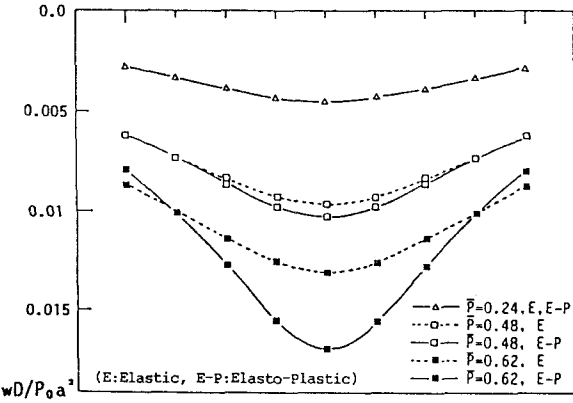


Fig.9 たわみ分布図 ($y=0$)

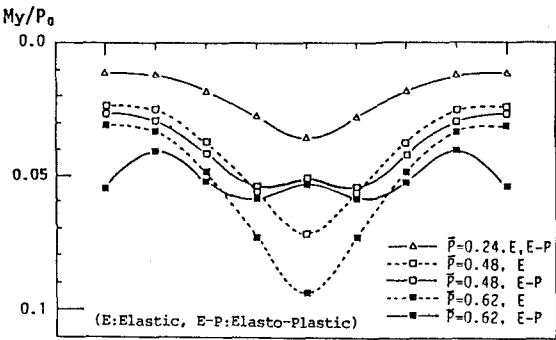


Fig.10 曲げモーメント(M_y)分布図 ($y=0$)

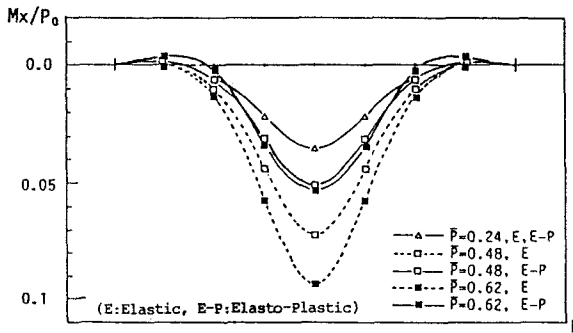


Fig.11 曲げモーメント(M_x)分布図 ($y=0$)

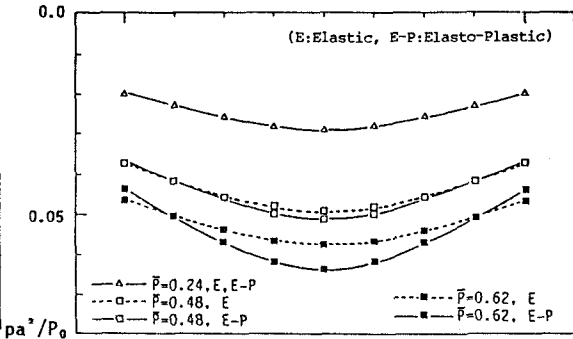


Fig.12 地盤反力(p)分布図 ($y=0$)

塑性化した部分はもはや外力に対して抵抗せず、その近隣部分が増分荷重に対して抵抗するためであると考えられる。図11より、曲げモーメント M_x に関しては、非弾性挙動において $P=0.48$ と $P=0.62$ のときとほぼ一致した分布を示すことがわかる。図9および図12は、各々、たわみおよび地盤反力の分布図である。両者ともほぼ同じような傾向を示し、荷重の増加につれ弾性および非弾性の差が大きくなることがわかる。

図13は、 $P=0.62$ のときの塑性域の進行図を示す。同図で色分けの区分は塑性化する前の板厚 h_0 を基準とし、塑性化した断面を取り除いた弾性部分の深さ h との比 h/h_0 で表わし、同図中に示す色分け区分で表わしている。弾性地盤上の四辺自由正方形板においては、塑性域は板中央部から境界辺に垂直方向に拡っていることがわかる。

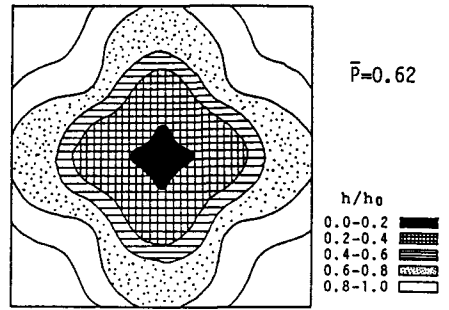


Fig.13 塑性域の進行図

6. 結語

基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により、弾性地盤上の矩形板の挙動を支配する連立偏微分方程式の離散解を求め、これにもとづく、非線形弾性地盤上の矩形板の非弾性曲げ問題に関する一般的な解法を提示した。

非線形弾性地盤との相互作用を含めた矩形板の非弾性挙動解析を行なった結果、塑性域が進行すると曲げモーメントはある値に収束すること、また、地盤のばね特性あるいは矩形板の材料特性次第では隅角部に浮き上がり現象が生じる可能性があることなどが明らかにされた。

[Appendix I]

$$[b_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}$$

$$[a_{ij}] = 12 \int_{-1}^1 [a_{ij}] \xi^2 d\xi$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} - \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{bmatrix}$$

$$a = \alpha_x + \nu \alpha_y, \quad b = \nu \alpha_x + \alpha_y, \quad c = (1-\nu) \tau_{xy}, \quad d = a\alpha_x + b\alpha_y + c\tau_{xy}$$

$$\bar{\sigma}'_x = (2\alpha_x - \alpha_y)/3\sigma_0, \quad \bar{\sigma}'_y = (2\alpha_y - \alpha_x)/3\sigma_0, \quad \bar{\tau}'_{xy} = \tau_{xy}/\sigma_0$$

$$\bar{\sigma}'_x = \sigma'_x/\sigma_0, \quad \bar{\sigma}'_y = \sigma'_y/\sigma_0, \quad \bar{\tau}'_{xy} = \tau'_{xy}/\sigma_0 \quad \sigma_0: \text{yield stress}$$

[Appendix III]

[Appendix II]

$$\begin{aligned} F_{111} &= F_{123} = F_{134} = F_{156} = F_{167} = F_{189} = F_{278} = F_{377} = 1 \\ F_{212} &= F_{225} = F_{233} = F_{247} = F_{266} = F_{386} = -F_{322} = -F_{331} = \mu \\ F_{318} &= -\bar{k}_v, \quad F_{372} = -K, \quad F_{381} = -\mu K, \\ F_{345} &= Ib_{11}, \quad F_{344} = Ib_{12}, \quad F_{343} = Ib_{13}, \\ F_{355} &= Ib_{21}, \quad F_{354} = Ib_{22}, \quad F_{353} = Ib_{23}, \\ F_{365} &= Ib_{31}, \quad F_{364} = Ib_{32}, \quad F_{363} = Ib_{33}, \\ \text{other } F_{ijk} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{p1} &= \gamma_{p1} & B_{p1} &= 0 & C_{p1kl} &= \mu(\gamma_{p3} + \gamma_{p8} K_{kl}) \\ A_{p2} &= 0 & B_{p2} &= \gamma_{p1} & C_{p2kl} &= \mu\gamma_{p2} + \gamma_{p7} K_{kl} \\ A_{p3} &= \gamma_{p2} & B_{p3} &= \gamma_{p3} & C_{p3kl} &= I_{kl}(\gamma_{p4} b_{13kl} + \gamma_{p5} b_{23kl} + \gamma_{p6} b_{33kl}) \\ A_{p4} &= \gamma_{p3} & B_{p4} &= 0 & C_{p4kl} &= I_{kl}(\gamma_{p4} b_{12kl} + \gamma_{p5} b_{22kl} + \gamma_{p6} b_{32kl}) \\ A_{p5} &= 0 & B_{p5} &= \gamma_{p2} & C_{p5kl} &= I_{kl}(\gamma_{p4} b_{11kl} + \gamma_{p5} b_{21kl} + \gamma_{p6} b_{31kl}) \\ A_{p6} &= \gamma_{p5} & B_{p6} &= \gamma_{p6} & C_{p6kl} &= -\mu\gamma_{p8} \\ A_{p7} &= \gamma_{p6} & B_{p7} &= \gamma_{p4} & C_{p7kl} &= -\gamma_{p7} \\ A_{p8} &= \gamma_{p8} & B_{p8} &= \gamma_{p7}/\mu & C_{p8kl} &= \gamma_{p1} K_{kl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \beta_{ii}, \quad \rho_{12} = \mu\beta_{jj}, \quad \rho_{18} = -\bar{k}_v \beta_{ij}, \quad \rho_{22} = -\mu\beta_{ij}, \quad \rho_{23} = \beta_{ii}, \\ \rho_{25} &= \mu\beta_{jj}, \quad \rho_{31} = -\mu\beta_{ij}, \quad \rho_{33} = \mu\beta_{jj}, \quad \rho_{34} = \beta_{ii}, \quad \rho_{42} = -I_{ij} \beta_{ij} b_{13ij}, \\ \rho_{44} &= -I_{ij} \beta_{ij} b_{22ij}, \quad \rho_{45} = -I_{ij} \beta_{ij} b_{11ij}, \quad \rho_{47} = \mu\beta_{jj}, \quad \rho_{53} = -I_{ij} \beta_{ij} b_{23ij}, \\ \rho_{54} &= -I_{ij} \beta_{ij} b_{22ij}, \quad \rho_{55} = -I_{ij} \beta_{ij} b_{21ij}, \quad \rho_{56} = \beta_{ii}, \quad \rho_{63} = -I_{ij} \beta_{ij} b_{33ij}, \\ \rho_{64} &= -I_{ij} \beta_{ij} b_{32ij}, \quad \rho_{65} = -I_{ij} \beta_{ij} b_{31ij}, \quad \rho_{66} = \mu\beta_{jj}, \quad \rho_{67} = \beta_{ii}, \\ \rho_{72} &= \beta_{ij} K_{ij}, \quad \rho_{77} = \beta_{ij}, \quad \rho_{78} = \beta_{jj}, \quad \rho_{81} = -\mu\beta_{ij} K_{ij}, \quad \rho_{86} = \mu\beta_{ij}, \\ \rho_{88} &= \beta_{ii} \end{aligned}$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ii} \cdot \beta_{jj}$$

$$[\gamma_{pt}] = [\rho_{pt}]^{-1}$$

[Appendix IV]

$$a_{pijkd} = \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i A_{pt\beta if} [a_{tfokd} - a_{tfjkd}(1-\delta_{fi})] \right. \\ \left. + \mu \sum_{g=0}^j B_{pt\beta jg} [a_{t0gkd} - a_{tigkd}(1-\delta_{gj})] \right. \\ \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j C_{ptfg\beta if\beta jg} a_{tfgkd}(1-\delta_{fi}\delta_{gj}) \right\}$$

$$b_{pijld} = \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i A_{pt\beta if} [b_{tfolld} - b_{tfjld}(1-\delta_{fi})] \right. \\ \left. + \mu \sum_{g=0}^j B_{pt\beta jg} [b_{t0gld} - b_{tigld}(1-\delta_{gj})] \right. \\ \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j C_{ptfg\beta if\beta jg} b_{tfgld}(1-\delta_{fi}\delta_{gj}) \right\}$$

$$\Delta q_{pij} = \sum_{t=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i A_{pt\beta if} [\Delta q_{tfo} - \Delta q_{tfj}(1-\delta_{fi})] \right. \\ \left. + \mu \sum_{g=0}^j B_{pt\beta jg} [\Delta q_{t0g} - \Delta q_{tig}(1-\delta_{gj})] \right. \\ \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j C_{ptfg\beta if\beta jg} \Delta q_{tfg}(1-\delta_{fi}\delta_{gj}) \right\} \\ - A_{p1} \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if}\beta_{jg} \Delta \bar{q}_{fjg}$$

$$b_{sioo3} = \frac{1}{t_{11}(i,0)} \frac{\bar{D}_{oo\bar{1}}}{D_{io\bar{1}}}$$

$$a_{4oj03} = \frac{1}{t_{22}(0,j)} \frac{\bar{D}_{oo\bar{2}}}{D_{oj\bar{2}}}$$

$$a_{sio03} = -\frac{t_{12}(k,0)}{t_{11}(i,0)} \frac{\bar{D}_{k0\bar{3}}}{D_{io\bar{3}}}$$

$$b_{4oj23} = -\frac{t_{21}(0,l)}{t_{22}(0,j)} \frac{\bar{D}_{ol\bar{3}}}{D_{oj\bar{3}}}$$

$$a_{sio02} = -\frac{t_{13}(k,0)}{t_{11}(i,0)} \frac{\bar{D}_{k0\bar{2}}}{D_{io\bar{2}}}$$

$$b_{4oj22} = -\frac{t_{23}(0,l)}{t_{22}(0,j)} \frac{\bar{D}_{ol\bar{2}}}{D_{oj\bar{2}}}$$

$$a_{sio05} = \frac{1}{(1-\nu^2)D_{11}t_{11}(i,0)} \bar{Y}_{ik}$$

$$b_{4oj24} = \frac{1}{\mu(1-\nu^2)D_{1j}t_{22}(0,j)} \bar{Y}_{jl}$$

$$a_{1oj01} = \frac{\kappa_{00}}{\kappa_{0j}} \bar{a}_j, \quad b_{1oj24} = \frac{1}{\kappa_{0j}} \bar{b}_{jl}, \quad b_{1oj26} = \frac{1}{\mu\kappa_{0j}} \bar{Y}_{jl}$$

$$b_{2io01} = \frac{\kappa_{00}}{\kappa_{10}} \bar{a}_i, \quad a_{2io05} = \frac{1}{\kappa_{10}} \bar{b}_{ik}, \quad a_{2io06} = \frac{1}{\kappa_{10}} \bar{Y}_{ik}$$

$$[t_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}$$

$$\bar{a}_i = (-1)^i, \quad \bar{a}_j = (-1)^j, \quad \bar{D}_{io} = D_o/D_{io},$$

$$\bar{b}_{ik} = \delta_{ik} + (-1)^{i+1} \cdot \delta_{ok}, \quad \bar{b}_{jl} = \delta_{jl} + (-1)^{j+1} \cdot \delta_{ol},$$

$$\bar{Y}_{ik} = \frac{4m(-1)^{i+k}}{1 + \delta_{ik} + \delta_{ok}}, \quad \bar{Y}_{jl} = \frac{4n(-1)^{j+l}}{1 + \delta_{jl} + \delta_{ol}}$$

$$\bar{Y}_{ik} = \begin{cases} 0 & (i < k) \\ \bar{Y}_{ik} & (i \geq k) \end{cases}, \quad \bar{Y}_{jl} = \begin{cases} 0 & (j < l) \\ \bar{Y}_{jl} & (j \geq l) \end{cases}$$

参考文献

- 1) 能町純雄：弾性基礎にある四辺四隅自由な矩形板の曲げについて，土木学会論文報告集，第32号，pp.26-32，1956.
- 2) 北村泰寿・桜井春輔：弾性基礎上の4辺自由板の級数解，土木学会誌，Vol.64-3，pp.61-66，1979.
- 3) Hetenyi, M.: Beams on Elastic Foundations, University of Michigan Press, 1964.
- 4) Cheung, Y.K. and O.C. Zienkiewicz: Plates and Tanks on Elastic Foundations—An Application of Finite Element Method, Int. Jour. Solids and Structures, Vol.1, pp.451-461, 1965.
- 5) Henry, T.Y.V.: Flexible Plates Finite Element on Elastic Foundation, Jour. Structural Division Proc. ASCE, Vol.96, ST10, pp.2083-2101, 1970.
- 6) Svec, O.J.: Thick Plates on Elastic Foundations by Finite Element Method, Proc. ASCE, Vol.102, EM3, pp.461-477, 1976.
- 7) 倉田宗章・高橋宏直・谷平勉：非線形ばね基礎上の周辺自由な平板の数値解析，土木学会論文報告集，第208号，pp.13-21，1972.
- 8) Sonoda, K. and H. Kobayashi: Rectangular Plates on Linear Visco-elastic Foundations, Proc. ASCE, Vol.106, EM2, pp.323-338, 1980.
- 9) Kobayashi, H. and K. Sonoda: Rectangular Thick Plates on Linear Visco-elastic Foundations, Proc. JSCE, No.341, pp.33-39, 1984.
- 10) 崎山毅・松田浩：変厚矩形板の曲げの一般解析法，土木学会論文報告集，第338号，pp.21-28，1983.
- 11) 松田浩・崎山毅：不均一弾性地盤上の矩形板の曲げの一般解析法，構造工学論文集，Vol.32A，pp.343-352，1986
- 12) Matsuda, H. and T. Sakiyama: Bending Analysis of Rectangular Plate on Non-Uniform Elastic Foundations, Proc. JSCE, No.380/I-7, pp.103-112, 1987.

(1987年10月16日受付)