

## 変位制御型の動的緩和法による鋼薄肉変断面梁－柱の面内強度解析

INPLANE STRENGTH ANALYSIS OF TAPERED THIN-WALLED STEEL BEAM-COLUMNS  
BY DYNAMIC RELAXATION METHOD UNDER DISPLACEMENT-CONTROL LOADING

三上 市藏\* 三浦 泰夫\*\* 田中 成典\*\*\* 新内 康芳\*\*\*\*

By Ichizou MIKAMI, Yasuo MIURA, Shigenori TANAKA, and Yasuyoshi SHINNAI

Thin-walled steel tapered beam-columns subjected to end-bending and compression are analyzed to obtain the in-plane strength. The dynamic relaxation method (D.R.M.) is used, where a new technique of loading by the compelled axial-displacement or slope is proposed. The technique is able to trace the relation between load and displacement over a peak. The numerical solutions by D.R.M. are compared with experimental results for I- and box-cross sections, and it is found that the D.R.M. can give very accurate solutions.

## 1. まえがき

鋼構造に変断面部材が用いられることがしばしばあるが、変断面梁－柱の弾塑性座屈強度に関しては、Prawelら<sup>1)</sup>の理論的・実験的研究、Salterら<sup>2)</sup>の実験的研究、吉田ら<sup>3)</sup>の理論的研究、奥村ら<sup>4)</sup>の実験的研究、塩見ら<sup>5)</sup>、<sup>6)</sup>の実験的・理論的研究などがあるが、等断面部材の場合に比べてずいぶん少ない。また、設計公式に関する研究<sup>6)</sup>、<sup>7)</sup>も特に少ない。このように研究が少ないのは、等断面部材の場合と比べて変断面部材の強度解析が複雑であり、効率よく解くことが困難なためである。

差分法に基づく反復法の一つである動的緩和法(Dynamic Relaxation Method)は種々の離散化解法のなかでもコンピュータの記憶容量や計算時間やプログラミングの点で有利な解法であり、ベクトル計算機向きの解法でもある。<sup>8)</sup>、<sup>9)</sup>著者らは、この解法が鋼等断面部材の弾塑性座屈解析<sup>10)</sup>に有効であり、さらには鋼変断面部材の弾塑性面内座屈強度解析<sup>11)</sup>に有効であることを報告してきた。しかし通常の動的緩和法では、作用荷重を直接制御する荷重制御型反復計算手法が用いられるため、荷重－変位関係のピーク近傍では細かい注意を払って荷重を設定しなければならず、ピークを正しく捕らえ難い。

本論文では、材端に回転変位または軸方向変位を強制的に与えて載荷する変位制御型反復計算手法を提示

\* 工博 関西大学教授 工学部土木工学科 (〒564 吹田市山手町3丁目3番35号)

\*\* 工修 ㈱東洋情報システム大阪本社 応用技術システム開発部 (〒564 吹田市豊津町8番7号)

\*\*\* 工修 ㈱東洋情報システム大阪本社 (〒564 吹田市江の木町11番30号); 元関西大学大学院

\*\*\*\* 関西大学大学院 工学研究科博士課程前期課程 (〒564 吹田市山手町3丁目3番35号)

する。この変位制御型解析を行うと、荷重と変位の関係をピーク後も確実に追跡し、終局挙動を把握することができる。したがって、入力データの設定が容易になり、変断面梁-柱のパラメトリック解析が容易になる。理論解は、奥村ら<sup>4)</sup>や塩見ら<sup>5) 6)</sup>による実験の結果と比較する。また、この解法は材料的非線形のみならず、幾何学的非線形をも考慮した解析にも容易に拡張できるので、この解法を適用して計算対象の梁-柱の有限変位の影響を照査してみる。

## 2. 変断面梁-柱の弾塑性解析

Fig.1(a)に示すように、長さL (cm)の鋼変断面部材が、両端で単純支持され、両端に軸方向圧縮力Pと大断面端にモーメント $M_{(L)}$ を受けている。

梁-柱はz方向に初期たわみを有しており、断面には残留応力が存在する。以下の解析方法は1軸対称断面で、任意に断面変化した部材に適用できるが、本論文では Fig.1(b) に示すように、2軸対称断面で腹板のみにテーパが付いているI形断面部材と、Fig.1(c)に示すように腹板とフランジにテーパが付いている箱形断面部材を扱う。解析にあたって、次の仮定を用いる。①断面は部材の変形後も元の形状を保つ。②変位は微小である。③平面保持の仮定が成立つ。④材料はヤング率E (kgf/cm<sup>2</sup>)、降伏応力 $\sigma_y$  (kgf/cm<sup>2</sup>)の完全弾塑性体である。⑤せん断ひずみは無視する。

### 2.1 基礎式

動的緩和法を適用するため、x, z方向の静的つり合い式に慣性項と減衰項を付加した次の動的つり合い式を考える。

$$m \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + k_u \dot{u} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1)$$

$$m \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} + k_w \dot{w} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \quad (2)$$

ここに、u, wは図心軸のx, z方向の付加変位(cm)、 $w_0$ はz方向の初期たわみ(cm)、Nは軸力(kgf)、Mは曲げモーメント(kgf-cm)、mは線密度(kgf-s<sup>2</sup>/cm<sup>2</sup>)、 $k_u, k_w$ はx, z方向の減衰係数(kgf-s/cm<sup>2</sup>)である。 $\dot{u}, \dot{w}$ は変位速度(cm/s)であり、変位と次のような関係にある。

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3)$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4)$$

図心軸から距離zの点のx方向のひずみ $\varepsilon(x, z)$ を変位u, wを使って次のように表す。

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

また、同じ点の応力 $\sigma(x, y, z)$  (kgf/cm<sup>2</sup>)はひずみ $\varepsilon(x, z)$ から次のように算定される。

$$|\sigma_e| < \sigma_y : \quad \sigma = \sigma_e \quad (6a)$$

$$|\sigma_e| \geq \sigma_y : \quad \sigma = \pm \sigma_y \quad (6b)$$

$$\sigma_e = E \varepsilon + \sigma_{re} \quad (7)$$

ただし、 $\sigma_e(x, y, z)$ は弾性を仮定した場合の応力、 $\sigma_{re}$ は残留応力である。

任意断面(断面積A)における軸力N(x)と曲げモーメントM(x)は、応力 $\sigma$ の値を使って次式で算定される。

$$N = \int_A \sigma \, dA \quad (8)$$

$$M = \int_A \sigma z \, dA \quad (9)$$

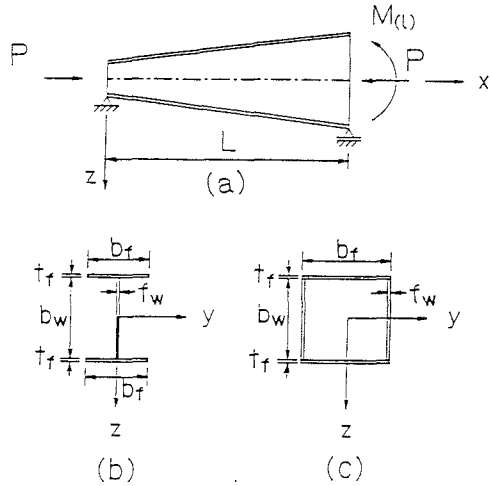


Fig. 1 Tapered beam-column and cross-sections

## 2.2 境界条件式

小断面端での境界条件式は次のようになる。

$$\begin{aligned} x=0 : \quad w=0, \quad u=0, \\ M=0 \end{aligned} \quad (10a-c)$$

大断面端には、荷重のために、Fig.2(a)のように強制回転変位  $\theta_{(1)}$  を与えるか、または、Fig.2(b)のように強制軸方向変位  $u_{(1)}$  を与える。モーメント荷重  $M_{(1)}$  が大きい場合は強制回転変位  $\theta_{(1)}$  を用いて制御し、軸方向荷重  $P$  が大きい場合は強制軸方向変位  $u_{(1)}$  を用いて制御する。そして、いずれの場合も、大断面端において、軸方向荷重とモーメント荷重の比  $M_{(1)} / PL$  を一定に保つために次の条件を課さなければならない。

$$x=L : \quad \alpha M/L + N = 0 \quad \text{または} \quad M/L + \beta N = 0 \quad (11a,b)$$

### (1) 強制回転変位による荷重

Fig.2(a)に示すように、大断面端に回転変位  $\theta_{(1)}$  を強制的に与えて荷重するので、境界条件式は次のようになる。

$$x=L : \quad w=0, \quad m \partial \dot{w} / \partial t + k_b \dot{w} = \partial w / \partial x - \theta_{(1)} \quad (12a,b)$$

ここに、式(12b)はたわみ角の条件式を動的表示したもの<sup>10)</sup>で、 $k_b$ は減衰係数(kgf-s/cm<sup>2</sup>)である。さらに、条件式(11a)は次のように動的表示する。<sup>10)</sup>

$$x=L : \quad m \partial \dot{u} / \partial t + k_u \dot{u} = \alpha M/L^2 + N/L \quad (12c)$$

曲げのみが荷重する場合 ( $P=0$ ) は、式(12c)の代わりに次式を用いる。

$$x=L : \quad N=0 \quad (12d)$$

### (2) 強制軸方向変位による荷重

Fig.2(b)に示すように、大断面端に軸方向変位  $u_{(1)}$  を強制的に与えて荷重するので、境界条件式は次のようになる。

$$x=L : \quad w=0, \quad u=u_{(1)} \quad (13a,b)$$

さらに、条件式(11b)は次のように動的表示する。<sup>10)</sup>

$$x=L : \quad m \partial \dot{w} / \partial t + k_w \dot{w} = M/L^2 + \beta N/L \quad (13c)$$

なお、式(12c)と式(13c)では数値計算の安定のために、右辺を  $L$  で除してある。

圧縮のみが荷重する場合 ( $M_{(1)} = 0$ ) は、式(13c)の代わりに次式を用いる。

$$x=L : \quad M=0 \quad (13d)$$

## 3. 数値計算法

動的つり合い式(1),(2)は場および時間に関する偏微分方程式であるので、差分法を用いて、場および時間の両方について離散化する。

### (1) 初期不整

初期たわみ分布は部材中央の初期たわみ  $f_0$  (cm)を用いて、次式のように仮定する。

$$w_0 = f_0 \sin(\pi x/L) \quad (14)$$

残留応力分布は、I形断面の場合はFig.3(a)に示すような分布を仮定する。<sup>11)</sup> これは中部

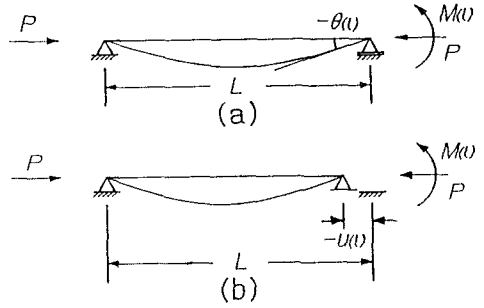


Fig. 2 Method of loading

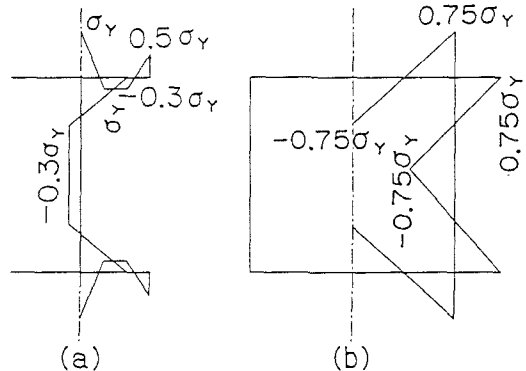


Fig. 3 Residual stress pattern

大学の実験模型の測定分布<sup>5)</sup>に合致する<sup>12)</sup>ように定めたものである。また、箱形断面の場合はFig.3(b)に示すような分布を仮定する。<sup>11)</sup>

## (2) 基礎式の差分表示

梁-柱をx方向に $n_x$ 分割(差分間隔 $\Delta x$ )し、差分点に0～ $n_x$ の番号をふる。断面に関しては、フランジの幅を $n_{yf}$ 分割、厚さを $n_{zt}$ 分割、腹板の幅を $n_{zw}$ 分割する。また、時間軸は間隔 $\Delta t$ に分割する。プログラミングの便宜のため、2つの技法を採用する。一つは仮想差分点を用いない技法<sup>13)</sup>であり、他の一つは、従来の動的緩和法が $\Delta t/2$ 刻みの時刻に対して差分表示する<sup>14)</sup>のに対して、 $\Delta t$ 刻みの時刻に対して差分表示する技法<sup>10)</sup>である。

式(1)および式(2)を、場に関して任意の差分点 $i$ において中央差分表示し、時間に関して任意の時刻 $j$   $\Delta t$ において前進差分表示すると、次式が得られる。

$$\dot{u}_{i(j)} = (1 - \Delta t k_u) \dot{u}_{i(j-1)} + (\Delta t / 2\Delta x) \{ N_{i+1} - N_{i-1} \}_{(j-1)} \quad (15)$$

$$\dot{w}_{i(j)} = (1 - \Delta t k_w) \dot{w}_{i(j-1)} + (\Delta t / \Delta x^2) [ \{ M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} \}_{(j-1)} + N_{i(j-1)} \{ w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} \}_{(j-1)} + w_{0,i+1} + 2w_{0,i} + w_{0,i-1} ] \quad (16)$$

ただし、 $m$ の大きさは静的解に無関係なので、 $m=1$ とした。

式(3)および式(4)を時間に関して後退差分表示すると、次のようになる。

$$u_{i(j)} = u_{i(j-1)} + \Delta t \dot{u}_{i(j)} \quad (17)$$

$$w_{i(j)} = w_{i(j-1)} + \Delta t \dot{w}_{i(j)} \quad (18)$$

式(5)を場に関して中央差分表示すると

$$\varepsilon_{i(j)} = (1/2\Delta x) \{ u_{i+1} - u_{i-1} \}_{(j)} - (z/\Delta x^2) \{ w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} \}_{(j)} \quad (19a)$$

となる。ただし、式(19a)は $i=1 \sim n_x - 1$ に対して適用するもので、 $i=0$ および $i=n_x$ に対しては、それぞれ5差分点を使った、場に関して打ち切り誤差が $(\Delta x)^4$ のオーダーである次の高精度の前進差分表示および後退差分表示を用いる。

$$i=0 : \varepsilon_{i(j)} = (1/12\Delta x) \{ -25u_0 + 48u_1 - 36u_2 + 16u_3 - 3u_4 \}_{(j)} - (z/12\Delta x^2) \{ 45w_0 - 154w_1 + 214w_2 - 156w_3 + 61w_4 - 10w_5 \}_{(j)} \quad (19b)$$

$$i=n_x : \varepsilon_{i(j)} = (1/12\Delta x) \{ 3u_{i-4} - 16u_{i-3} + 36u_{i-2} - 48u_{i-1} + 25u_i \}_{(j)} - (z/12\Delta x^2) \{ -10w_{i-5} + 61w_{i-4} - 156w_{i-3} + 214w_{i-2} - 154w_{i-1} + 45w_i \}_{(j)} \quad (19c)$$

式(8)および式(9)は次のように変形できるので、断面内の差分点における応力 $\sigma(y, z)_{i(j)}$ の値と積 $\sigma z$ の値を用いて台形公式による数値積分を行うと、任意断面における軸力 $N$ および曲げモーメント $M$ が算定できる。

$$N_{i(j)} = \int \int_{\text{top-flg.}} \sigma \, dydz + \int \int_{\text{bottom-flg.}} \sigma \, dydz + t_w \int_{\text{web}} \sigma \, dz \quad (20)$$

$$M_{i(j)} = \int \int_{\text{top-flg.}} (\sigma z) \, dydz + \int \int_{\text{bottom-flg.}} (\sigma z) \, dydz + t_w \int_{\text{web}} (\sigma z) \, dz \quad (21)$$

ただし、箱形断面の場合は、式(20)および式(21)の右辺第3項を2倍する。

## (3) 境界条件式の差分表示

式(10)は次のようになる。

$$i=0 : w_{i(j)} = u_{i(j)} = M_{i(j)} = \dot{w}_{i(j)} = \dot{u}_{i(j)} = 0 \quad (22a-e)$$

強制回転変位 $\theta_{(1)}$ による載荷の場合、式(12a)は

$$i=n_x : w_{i(j)} = \dot{w}_{i(j)} = 0 \quad (23a,b)$$

である。式(12b)を時間に関して後退差分表示し、場に関して $i=n_x$ において後退差分表示すると、式(23a,b)の条件から式(12b)の左辺が0になって不都合になる。そこで、差分点 $i=n_x - 1$ において時間に関して差分表示すると次式が得られる。

$$i = n_x : \dot{w}_{i-1(j)} = (1 - \Delta t k_b) \dot{w}_{i-1(j-1)} + \Delta t \theta_{(j)} - (\Delta t / 12 \Delta x) \{ 3w_{i-4} - 16w_{i-3} + 36w_{i-2} + 48w_{i-1} + 25w_i \}_{(j-1)} \quad (23c)$$

となる。式(12c)を時間に関して後退差分表示すると、次のようになる。

$$i = n_x : \dot{u}_{i(j)} = (1 - \Delta t k_u) \dot{u}_{i(j-1)} - \Delta t (\alpha M_{i(j)} / L^2 + N_{i(j)} / L) \quad (24)$$

強制軸方向変位  $u_{(j)}$  による载荷の場合、式(13a,b)は

$$i = n_x : w_{i(j)} = \dot{w}_{i(j)} = 0, \quad u_{i(j)} = u_{(j)} \quad (25a-c)$$

となる。式(13c)を  $i = n_x$  において、時間に関して後退差分表示するのであるが、式(25a,b)の条件から式(13c)の左辺が0になって不都合である。そこで、左辺は差分点  $i = n_x - 1$  において差分表示すると、次式が得られる。

$$i = n_x : \dot{w}_{i-1(j)} = (1 - \Delta t k_w) \dot{w}_{i-1(j-1)} - \Delta t (M_{i(j)} / L^2 + \beta N_{i(j)} / L) \quad (26)$$

なお、式(24)と式(26)において、発散を避けるために右辺第二項を負にした。

#### (4)初期値

時刻  $t = 0$  における初期値は原則として0であるが、強制変位による衝撃载荷の影響を防ぐために、次のような初期値を設定する。

強制回転変位  $\theta_{(j)}$  による载荷の場合：

$$u_{i(0)} = \dot{u}_{i(0)} = \dot{w}_{i(0)} = 0 \quad (27a-c)$$

$$w_{i(0)} = -(\theta_{(j)} L / 2) \{ 2(1 - i / n_x) - 3(1 - i / n_x)^2 + (1 - i / n_x)^3 \} \quad (27d)$$

強制軸方向変位  $u_{(j)}$  による载荷の場合：

$$\dot{u}_{i(0)} = \dot{w}_{i(0)} = w_{i(0)} = 0 \quad (28a-c)$$

$$u_{i(0)} = u_{(j)} \quad (i / n_x) \quad (28d)$$

#### (5)数値計算手順

時間を進めながら、基礎式と境界条件式を用いて、逐次代入計算を行えば、減衰振動の後に静的解に到達する。計算手順のフローチャートはFig.4 のようになるが、以下に詳細を述べる。

【Step1】式(27)または式(28)を用いて、初期値  $\dot{u}_{(0)}$ ,  $u_{(0)}$ ,  $\dot{w}_{(0)}$ ,  $w_{(0)}$ ,  $M_{(0)}$ ,  $N_{(0)}$  を設定する。

【Step2】各断面  $i = 0 \sim n_x$  において、断面内の各差分点に対して、式(19a-c)を用いて  $u_{(j)}$ ,  $w_{(j)}$  からひずみ  $\varepsilon_{(j)}$  を求め、式(7)を用いて  $\varepsilon_{(j)}$  と残留応力  $\sigma_{re}$  から弾性状態の応力を求める。そして、降伏判定を行い、弾塑性状態の応力  $\sigma_{(j)}$  を式(6)から求める。

【Step3】各断面  $i = 0 \sim n_x$  において、式(20)を用いて応力  $\sigma_{(j)}$  から軸力  $N_{(j)}$  を求める。各断面  $i = 1 \sim n_x$  において、式(21)を用いて応力  $\sigma_{(j)}$  から曲げモーメント  $M_{(j)}$  を求める。断面  $i = 0$  において、式

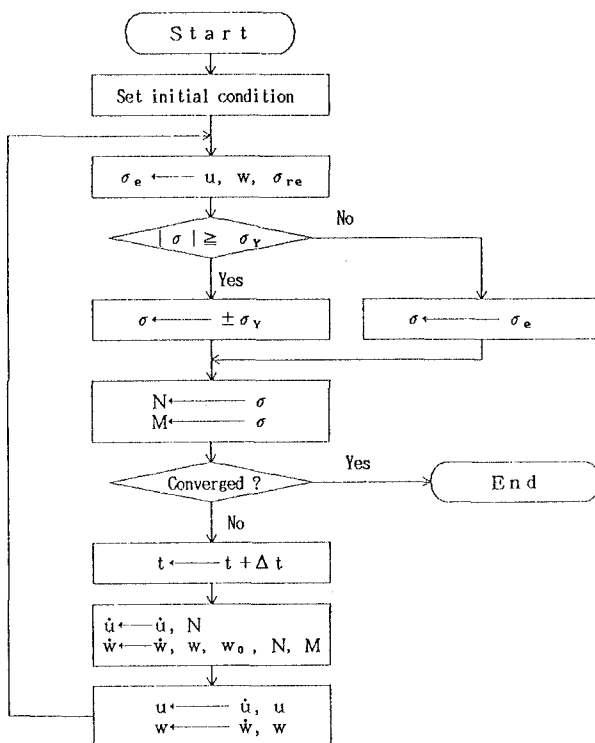


Fig. 4 Flow-chart of calculation for a load step

(22c) から  $M_{(j)} = 0$  である。

【Step 4】  $w$  と  $u$  について収束判定を行い、収束していない場合は【Step 2】に戻る。

【Step 5】 時計を時刻  $j\Delta t$  に進める。

【Step 6】 式(15)を用いて  $\dot{u}_{(j-1)}, N_{(j-1)}$  から  $i = 1 \sim n_x - 1$  に対して  $\dot{u}_{(j)}$  を求める。  $i = 0$  に対する  $\dot{u}_{(j)}$  は式(22e) である。  $i = n_x$  に対する  $\dot{u}_{(j)}$  は、回転変位制御の場合は式(24)から求めるが、軸方向変位制御の場合は求めなくてよい。同様に、式(16)を用いて  $\dot{w}_{(j-1)}, w_{(j-1)}, N_{(j-1)}, M_{(j-1)}$  と  $w_0$  から  $i = 1 \sim n_x - 2$  に対して  $\dot{w}_{(j)}$  を求める。  $i = n_x - 1$  に対する  $\dot{w}_{(j)}$  は 回転変位制御の場合は式(23c) から、軸方向変位制御の場合は式(26)から求める。  $i = 0$  および  $i = n_x$  に対しては、式(22d) および式(23b) または式(25b) から  $\dot{w}_{(j)} = 0$  である。

【Step 7】 式(17)を用いて  $u_{(j-1)}, \dot{u}_{(j)}$  から  $i = 1 \sim n_x$  に対して  $u_{(j)}$  を求める。ただし、軸方向変位制御の場合は、  $i = n_x$  に対する  $u_{(j)}$  は式(25c) で与えられる。  $i = 0$  に対しては、式(22b) から  $u_{(j)} = 0$  である。同様に式(18)を用いて  $w_{(j-1)}, \dot{w}_{(j)}$  から  $i = 1 \sim n_x - 1$  に対して  $w_{(j)}$  を求める。  $i = 0$  および  $i = n_x$  に対しては、式(22a) および式(23a) または式(25a) から  $w_{(j)} = 0$  である。

以上の計算手順で明らかのように、動的緩和法を利用し、式(1) で示される減衰縦振動と式(2) で示される減衰横振動を追跡すると、弾塑性応力分布と変位分布が一重の繰返し計算によって求められる。式(12c) または式(13c) の技法を採用することによって、荷重  $P$  と  $M_{(1)}$  の比率を一定に保ちながら、強制回転変位または強制軸方向変位で制御し、載荷できる。

#### 4. 数値計算結果

分割数が解の精度に与える影響は文献11) で検討した。ここでは、その結果に基づいて、  $n_x = 24$ ,  $n_{yf} = 24$ ,  $n_{zf} = 3$ ,  $n_{zw} = 24$  の分割を用いる。また、時間間隔は  $\Delta t = 0.0005s$  を用いた。

##### (1) 減衰係数

減衰係数  $k_w, k_u, k_b$  の値は解の収束の速さと、弾塑性状態では解の信頼性に関連する。そこで I 形変断面部材を例にとり、最適減衰係数を調べてみた。断面

寸法は  $b_f = 10cm$ ,  $t_f =$

$1cm$ ,  $b_{w(s)} = 10cm$ ,  $b_{w(l)} = 25cm$ ,  $t_w = 0.8cm$  で、部材長は  $L = 200cm$  である。ただし、下付き添字 "(s)" および "(l)" はそれぞれ小断面端および大断面端を表す。初期たわみは  $f_0 = L/1000$ , 降伏応力は  $\sigma_Y = 2400kgf/cm^2$ ,  $E = 2.1 \times 10^4 kgf/cm^2$  とした。

まず、圧縮と曲げを受ける弾性状態の梁－柱

について、  $k_w = k_u = k_b = 0$  とおいて自由振動を発生させる。そして、  $w_{12}, u_{12}, w_{23}$  の振動周期  $T$  を調べ、限界減衰係数  $k_{cr} = 4\pi m/T$  の関係<sup>15)</sup> から定める。結果はTable 1 およびTable 2 のようである。両表からわかるように、回転変位制御の場合は  $k_{w, cr}$  と  $k_{u, cr}$  はほとんど同じであるが、軸方向変位制御の場合は  $k_{w, cr}$  に比べて  $k_{u, cr}$  は 10 倍以上になる。また、回転変位制御の場合に使用する  $k_{b, cr}$  は  $k_{w, cr}$ ,  $k_{u, cr}$  に比べて極端に小さい。

次に  $k_w, k_u, k_b$  の値を大きくしてゆき、過減衰が生じる値をもって最適値  $k_{opt}$  とする。結果を

Table 1 Optimal and critical damping factors for compelled slope

| $\theta_{(1)}$ | $k_{w, cr}$ | $\frac{k_{w, opt}}{k_{w, cr}}$ | $k_{u, cr}$ | $\frac{k_{u, opt}}{k_{u, cr}}$ | $k_{b, cr}$ | $\frac{k_{b, opt}}{k_{b, cr}}$ |
|----------------|-------------|--------------------------------|-------------|--------------------------------|-------------|--------------------------------|
| -0.005         | 35.0        | 2.0                            | 40.0        | 1.3                            | 0.5000      | 0.0001                         |
| -0.008         | —           | 3.3                            | —           | 4.1                            | —           | 0.0001                         |
| -0.015         | —           | 13.3                           | —           | 6.3                            | —           | 0.0001                         |

Table 2 Optimal and critical damping factors for compelled axial-displacement

| $u_{(1)}$ | $k_{w, cr}$ | $\frac{k_{w, opt}}{k_{w, cr}}$ | $k_{u, cr}$ | $\frac{k_{u, opt}}{k_{u, cr}}$ |
|-----------|-------------|--------------------------------|-------------|--------------------------------|
| -0.10     | 15.0        | 1.7                            | 160.0       | 2.0                            |
| -0.15     | —           | 1.8                            | —           | 2.3                            |
| -0.25     | —           | 8.6                            | —           | 2.4                            |

Table 1 および Table 2 に  $k_{cr}$  の比で示す。両表でわかるように  $k_b$  の最適値は  $k_{b, cr}/1000$  程度で、弾性状態から弾塑性状態に渡って一定でよい。これに比べて  $k_w$  と  $k_u$  の最適値は塑性状態の進展とともに大きくなり、その増加の割合は  $k_w$  の方が  $k_u$  より大きい。

(2) 解の収束

静的解への収束の様子を調べるため、Table 1 および Table 2 の最適減衰係数を用いて上記の I 形変断面部材を解析した。

モーメント荷重  $M_{11}$  が大きい場合 ( $\alpha=3.0562$ ) について、回転変位制御による解析を、部材の一部が弾塑性状態に入った  $\theta_{11} = -0.008$  の場合と、終局強度近傍の  $\theta_{11} = -0.015$  の場合について行った。 $\theta_{11} = -0.008$  の場合、部材中央のたわみ  $w_{12}$  と軸方向変位  $u_{12}$ 、式 (23c) が適用された差分点 23 のたわみ  $w_{23}$  は Fig. 5、大断面端の曲げモーメント  $M_{24}$  と軸力  $N_{24}$  は Fig. 6 のようになる。変位  $w, u$  は時間の経

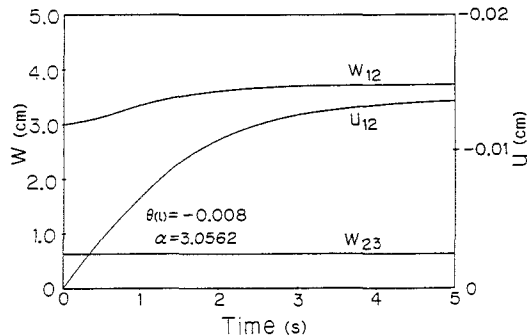


Fig. 5 Time variation of displacements

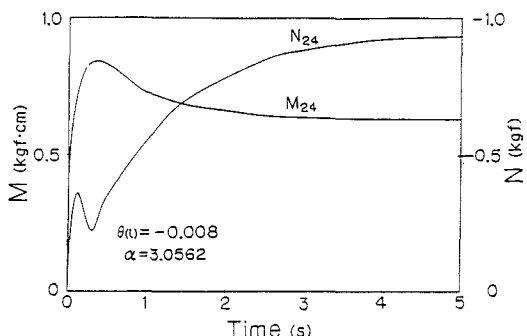


Fig. 6 Time variation of stress resultants

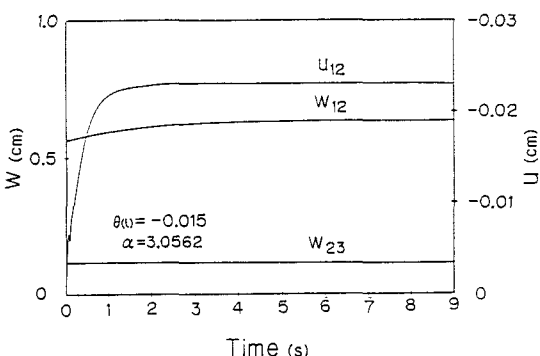


Fig. 7 Time variation of displacements

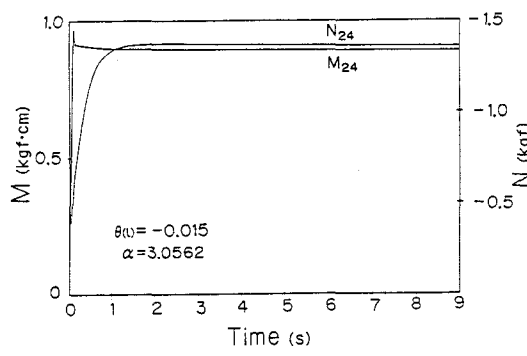


Fig. 8 Time variation of stress resultants

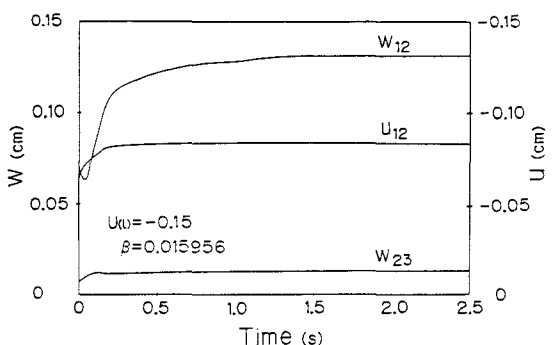


Fig. 9 Time variation of displacements

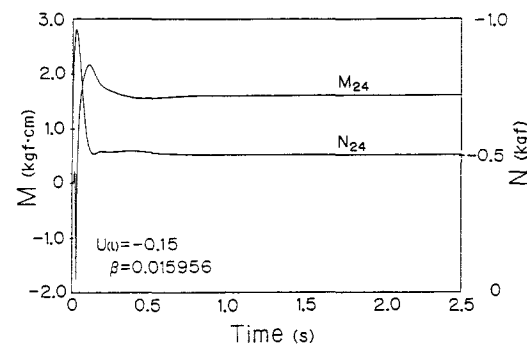


Fig. 10 Time variation of stress resultants

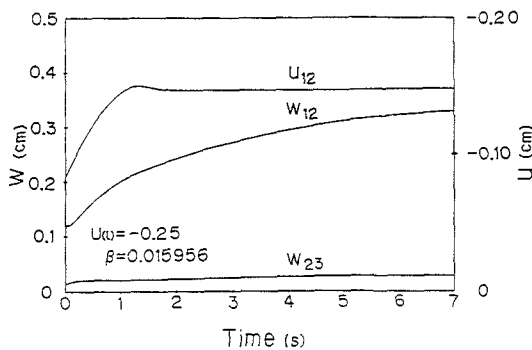


Fig.11 Time variation of displacements

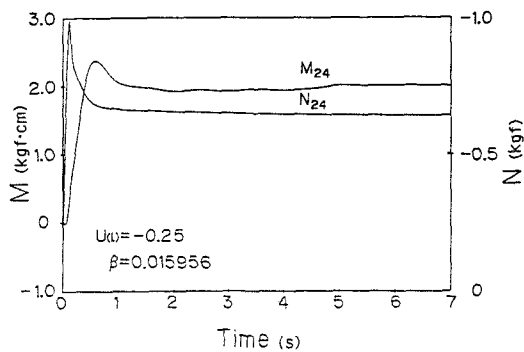


Fig.12 Time variation of stress resultants

過とともに順調に、かつ速く収束し、式 (23c) はきわめて早い段階で成立している。また、断面力M、Nは当初は振動するが、時間の経過とともに順調に収束している。大断面端の回転変位が強制量  $u_0$  として与えられるため、たわみwが軸方向変位uより、曲げモーメントMが軸力Nより、それぞれ収束が速い。

終局状態における変位と断面力の収束の様子は Fig.7および Fig.8のようになる。この場合も、変位、断面力とも速やかに収束している。

逆に、軸方向圧縮荷重Pが大きい場合 ( $\beta = 0.015956$ ) について、軸方向変位制御による解析を、部材の一部が弾塑性状態に入った  $u_0 = -0.15$  の場合と、終局強度近傍の  $u_0 = -0.25$  の場合について行った。  $u_0 = -0.15$  の場合、部材中央のたわみ  $w_{12}$  と軸方向変位  $u_{12}$ 、式 (26) で求められる差分点23のたわみ  $w_{23}$  は Fig.9、大断面端の曲げモーメント  $M_{24}$  と軸力  $N_{24}$  は Fig.10 のようになる。この場合も、変位w、u、断面力M、Nとも順調に、速く収束しており、回転変位制御の場合 (Fig.6とFig.7) とよく似た収束状況である。ただし、大断面端の軸方向変位が強制量  $u_0$  として与えられるため、軸方向変位uがたわみwより、軸力Nが曲げモーメントMより、それぞれ収束が速い。式 (26) はきわめて早い段階で成立している。

終局状態における変位と断面力の収束の様子は Fig.11および Fig.12 のようになる。この

Table 3 Comparison between test and theoretical results

| Ref.   | Model    | $M_{(1)}$<br>P L | $P/P_Y$ (s) |        | ①<br>② |
|--------|----------|------------------|-------------|--------|--------|
|        |          |                  | D.R.M.①     | Test ② |        |
| 5)     | IT-1.4-1 | 0.0379           | 0.587       | 0.554  | 1.061  |
|        | IT-1.6-2 | 0.0458           | 0.591       | 0.561  | 1.053  |
|        | IT-1.8-3 | 0.101            | 0.403       | 0.389  | 1.037  |
|        | IT-2.2-5 | 0.163            | 0.324       | 0.282  | 1.149  |
|        | IT-2.4-6 | 0.334            | 0.186       | 0.174  | 1.069  |
| 4)     | 30-1-1   | 0.0145           | 0.681       | 0.704  | 0.967  |
|        | 30-1-2   | 0.0289           | 0.540       | 0.586  | 0.925  |
|        | 30-1-3   | 0.0433           | 0.445       | 0.528  | 0.843  |
|        | 30-8-1   | 0.0190           | 0.999       | 1.055  | 1.054  |
|        | 30-8-2   | 0.0379           | 0.895       | 0.846  | 1.059  |
|        | 30-8-3   | 0.0570           | 0.786       | 0.724  | 1.085  |
|        | 30-15-1  | 0.0202           | 1.010       | 1.000  | 1.010  |
|        | 30-15-2  | 0.0404           | 0.939       | 0.936  | 1.002  |
|        | 30-15-3  | 0.0607           | 0.837       | 0.771  | 1.083  |
|        | 50-1-1   | 0.0090           | 0.684       | 0.665  | 1.029  |
|        | 50-1-2   | 0.0173           | 0.553       | 0.580  | 0.953  |
|        | 50-1-3   | 0.0260           | 0.462       | 0.466  | 0.991  |
|        | 50-8-1   | 0.0114           | 0.920       | 0.905  | 1.017  |
|        | 50-8-2   | 0.0228           | 0.792       | 0.777  | 1.019  |
|        | 50-8-3   | 0.0342           | 0.692       | 0.662  | 1.045  |
| 70-1-1 | 70-1-1   | 0.0062           | 0.574       | 0.570  | 1.007  |
|        | 70-1-2   | 0.0124           | 0.492       | 0.444  | 1.108  |
|        | 70-1-3   | 0.0186           | 0.472       | 0.413  | 1.143  |
|        | 70-8-1   | 0.0081           | 0.777       | 0.792  | 0.983  |
|        | 70-8-2   | 0.0163           | 0.669       | 0.669  | 1.000  |
|        | 70-8-3   | 0.0244           | 0.590       | 0.650  | 0.899  |
|        | 70-15-1  | 0.0086           | 0.820       | 0.899  | 0.911  |
|        | 70-15-2  | 0.0173           | 0.709       | 0.712  | 0.996  |
|        | 70-15-3  | 0.0260           | 0.628       | 0.604  | 1.043  |
|        | 90-1-1   | 0.0048           | 0.454       | 0.448  | 1.013  |
| 90-1-2 | 90-1-2   | 0.0096           | 0.377       | 0.394  | 0.957  |
|        | 90-1-3   | 0.0144           | 0.325       | 0.363  | 0.895  |
|        | 90-8-1   | 0.0063           | 0.682       | 0.694  | 0.981  |
|        | 90-8-2   | 0.0127           | 0.503       | 0.562  | 0.960  |
|        | 90-8-3   | 0.0190           | 0.471       | 0.535  | 0.879  |
|        | 90-15-1  | 0.0067           | 0.655       | 0.739  | 0.887  |
|        | 90-15-2  | 0.0135           | 0.572       | 0.591  | 0.965  |
|        | 90-15-3  | 0.0202           | 0.510       | 0.498  | 1.024  |

場合も、変位、断面力とも速やかに収束している。

### (3) 荷重制御と変位制御

中部大学で行われた実験<sup>5)</sup>の供試体Model No. IT-1. 6-2について、荷重制御と変位制御（回転変位制御）で解析した。Fig.13に荷重と部材中央のたわみの関係を示す。解析結果には差が無いが、変位制御型解析法によれば荷重と変位の関係をピーク後も確実に追跡できている。

### (4) 実験結果との比較

理論解の妥当性を検証するため、中部大学<sup>5)</sup>と東京大学<sup>4)</sup>で行われた鋼変断面梁一柱の実験値を数値計算結果と比較する。中部大学では5体の2軸対称I形溶接変断面材の面内座屈実験が行われた。初期たわみは実測値<sup>5)</sup>を用い、残留応力は実測分布<sup>5)</sup>と一致するような分布<sup>12)</sup>を仮定した。また、東京大学では36体の2軸対称箱形溶接変断面材の面内座屈実験が行われた。細長比を4通り、テーバーを3通り、偏心量を3通りに変化させている。初期不整は不明なので、初期たわみ $f_0 = L/2500$ と、Fig.3(b)の残留応力分布を仮定した。

実験および解析による最大荷重をTable 3に示す。ここに、 $P_{Y(s)}$ は小断面側の全断面降伏軸荷重である。 $P/P_{Y(s)}$ の理論値と実験値との比について、平均値と標準偏差を計算するとTable 4のようである。実験値と解析値の差は2～3のモデルを除いて10%前後であり、解析は良好な結果を与えることがわかる。

### (5) 弾塑性有限変位解析

これまでの、材料的に非線形であるが、幾何学的に線形な挙動を解析してきた。ここで、幾何学的非線形性の影響を調べておく。

式(5)のひずみと変位の関係は次のように書き換えられる。

$$\varepsilon = \partial u / \partial x + (\partial w / \partial x)^2 / 2 + (\partial w / \partial x)(\partial w_0 / \partial x) - z \partial^2 w / \partial x^2 \quad (29)$$

したがって、式(19a)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i(j)} = & (1/2\Delta x) \{u_{i+1} - u_{i-1}\}_{(j)} + (1/8\Delta x^2) \{w_{i+1} - w_{i-1}\}_{(j)}^2 \\ & + (1/4\Delta x^2) (w_{0,i+1} - w_{0,i-1}) \{w_{i+1} - w_{i-1}\}_{(j)} \\ & - (z/\Delta x^2) \{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}\}_{(j)} \end{aligned} \quad (30)$$

同様に式(19b)および式(19c)も書き換える。

式(30)と、式(19b,c)の代わりの式とを用い、残りの式はそのまま、変断面梁一柱の材料的・幾何学的非線形挙動が解析できる。一例として、Fig.13のモデルを解析した。荷重と部材中央たわみの関係はFig.14のようである。この部材の場合、有限変位の影響はないことがわかる。

## 5. あとがき

残留応力および初期たわみを有する任意変断面の鋼部材が、軸方向圧縮力およびモーメントを受ける場合の面内弾塑性座屈強度の解析に有効な動的緩和法に基づく解法を確立した。部材端に回転変位または軸方向変位を強制的に与えることによって、軸荷重と曲げ荷重の比率を一定に保ちながら載荷できるようにしたので、荷重と変位の関係をピークを越えて追跡できる。この解析によって、文献の実験結果と比較して妥当な最大強度が得られることがわかった。また、有限変位の影響を調べるために、この解法を変断面材の弾塑性有限変位解析に適用してみた。この解法を使えば、種々の設計因子と強度との関連を数値的に広範囲に調査することが可能であり、変断面梁一柱の設計公式を論ずるための資料を比較的容易に得ることができる。

本研究にあって、桑原英治君（現在、丸正建設㈱）と小堀憲司君（現在、中央コンサルタンツ㈱）には関西大学工学部土木工学科の卒業研究として協力を頂いた。ここに記して深謝するものである。

Table 4 Statistic values of ①/② in Table 3

| Ref.         | Mean   | Standard deviation |
|--------------|--------|--------------------|
| 5)           | 1.0748 | 0.0551             |
| 4)           | 0.997  | 0.0664             |
| Whole models | 1.035  | 0.0760             |

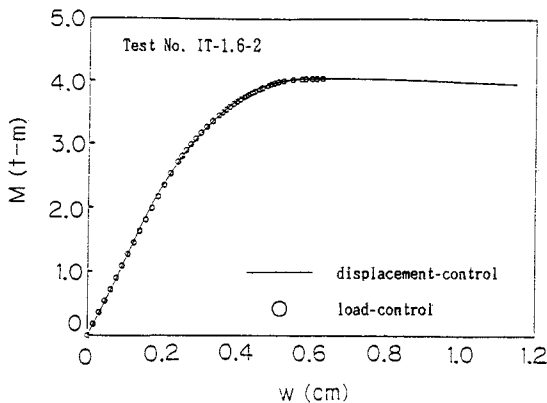


Fig.13 Relation between load and deflection

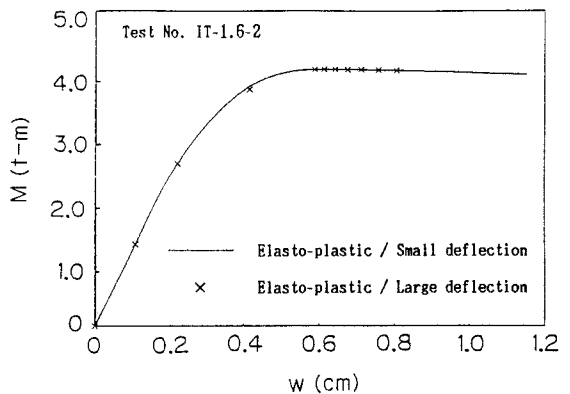


Fig.14 Relation between load and deflection

### 参考文献

- 1) Prawel, S.P., Morrell, M.L., and Lee, G.C.: Bending and buckling strength of tapered structural members, Welding Research Supplement to the Welding Journal, Vol.53, No.2, pp. 75s-84s, Feb., 1974.
- 2) Salter, J.B., Anderson, D., and May, I.M.: Tests on tapered steel columns, The Structural Engineer, Vol.58A, No.6, pp.189-193, June, 1980.
- 3) 吉田博・西田進: 変断面H型鋼柱の強度と変形, 土木学会論文報告集, No.220, pp.17-27, 1983.12.
- 4) 奥村敏恵・阿部英彦・竹名興英・友広勲: 箱型変断面鋼柱の終局耐荷力, 土木学会年次学術講演会概要集, 第1部, pp.175-176, 1972.
- 5) 塩見弘幸・西川俊一・倉田宗章: 鋼変断面はり一柱部材の耐荷力実験, 土木学会論文報告集, No.334, pp.163-172, 1983.6.
- 6) Shiomi, H., and Kurata, M.: Strength formula for tapered beam-columns, Jour. of Structural Engineering, ASCE, Vol.110, No.7, pp.1630-1643, July, 1984.
- 7) Lee, G.C., Morrell, M.L., and Ketter, R.L.: Design of tapered members, Welding Research Council Bulletin, No.173, p.1-32, 1972.
- 8) 三上市藏・山科純・田中克弘: ベクトル計算機を用いた円筒パネルの弾性有限変位解析, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.313-322, 1986.3.
- 9) 三上市藏・田中克弘: ベクトル計算機を用いた円筒パネルの弾塑性有限変位解析, 構造工学論文集, Vol.33A, pp.53-62, 1987.3.
- 10) Mikami, I., Miura, Y., Matsumura, K., and Tanaka, K.: Useful techniques for dynamic relaxation method, Technology Report of Kansai Univ., No.27, pp.187-200, Mar., 1986.
- 11) 三上市藏・三浦泰夫・辻本敦巨・田中成典: 動的緩和法による鋼薄肉変断面はり一柱の面内強度解析, 構造工学論文集, Vol.33A, pp.247-256, 1987.3.
- 12) 西田進・星名博文: 溶接組立断面部材の残留応力推定とその自己つり合い条件式, 土木学会論文報告集, No.340, pp.209-212, 1983.12.
- 13) Mikami, I.: Dynamic and viscous relaxation methods using simulation language, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.32, Univ. of Tokyo Press, pp.507-515, 1984.
- 14) Day, A.S.: An introduction to dynamic relaxation, Engineer, Vol.219, pp.218-221, Jan., 1965.
- 15) Rashton, K.R.: Dynamic-relaxation solution of elastic-plate problems, Jour. of Strain Analys., Vol.1, No.1, pp.23-32, 1963.

(1987年10月16日受付)