

弧長増分法に基づく板殻構造物の耐荷力解析

ULTIMATE STRENGTH ANALYSIS OF PLATE AND SHELL STRUCTURES BY ARC LENGTH METHOD

末武義崇* 工藤浩司* 平嶋政治** 依田照彦**

by Yoshitaka SUETAKE, Hiroshi KUDO, Masaharu HIRASHIMA and Teruhiko YODA

The present study is concerned with elasto-plastic analysis of plate and shell structures, employing Arc Length Method. The analysis is based on Herrmann's mixed finite element approach with the aid of the incremental strain theory. The solution procedure is simplified by the introduction of the modified Newton-Raphson method as an iterative solution technique. Attention is focused on the appropriate formulation to consider the direction of load increment on computation of equilibrium paths. As a numerical example, the ultimate strength analysis of curved I-girders is performed. It can be seen from the numerical example that Arc Length Method seems to be a versatile technique for the ultimate strength analysis of plate and shell structures.

1. まえがき

各種構造物の耐荷力特性を明確にすることは、構造解析の分野における重要な研究テーマの1つである。最近では大型コンピュータの進歩や有限要素法等の数値解析手法の発達に伴い、従来骨組構造物と見なして解析を行ってきたものについても、板殻構造物と見なした解析が実施されるようになってきた。これは、構造物の耐荷力特性が、その構成要素である板やシェルの性質に大きく依存していることによる。実際の構造物の終局限界状態は、弾性的な座屈に支配される場合よりも各構成要素の弾塑性的な挙動に支配される場合が多く、解析にあたっては幾何学的非線形性と材料非線形性の両者を考慮した弾塑性有限変位解析を実施する必要がある¹⁾。したがって、“板殻構造物の弾塑性有限変位挙動”を調べることは、各種構造物の耐荷力特性を解明する上で重要であり、これまでも多くの研究者^{2)~7)}がこの問題に関する研究を行なっている。板殻構造物の耐荷力を決定するためには、弾塑性有限変位解析によって釣り合い径路上の極限点を求めなければならない。さらに、極限点を越えた後の挙動を追跡することも、構造物の耐荷力特性をより明確に把握する上で意義があろう。しかるに、従来の荷重増分法とNewton-Raphson法とを組み合わせた非線形収束計算アルゴリズムに従った場合、極限点の近傍では接線剛性行列が特異に近くなり計算の収束性が著しく損われるとともに、極限点後の挙動を追うためには増分荷重を試行錯誤的に操作する必要性が生じ、極限点近傍の計算に多大の労力と時間を費さなければならない。板やシェルの解析の場合には、このような数値計算上の問題点が助長される。こうした欠点を解消し、増分幅の決定を自動化するとともに、極限点を含む臨界点近傍の収束計算アルゴリズムを改良したものがWempner⁸⁾およびRiks^{9),10)}によって提案された弧長増分法である。この手法は増分制

* 早稲田大学大学院理工学研究科 建設工学専攻 (〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)

** 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科 (〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)

値であり、 $\Delta U_m^{(1)}$ は図1の点Aにおける接線剛性行列を $K_T^{(A)}$ として次式で与えられる。

$$\Delta U_m^{(1)} = \Delta \lambda_m^{(1)} U_m^{(0)}; U_m^{(0)} = K_T^{(A)-1} P_0 \quad (3)$$

式(3)において $U_m^{(0)}$ を基準変位ベクトルと名付ける。式(3)を式(2)に代入すると次式が得られる。

$$\Delta \lambda_m^{(1)} = \pm \frac{\Delta S_m}{\sqrt{1 + U_m^{(0)} \cdot U_m^{(0)}}} \quad (4)$$

式(4)において符号の選択が問題となるが、既往の文献ではこの点が明確にされていない。本研究では、まず1自由度系について考察を行ない、これを多自由度系に拡張することによって、符号の選択を行った。

今、図2に示した模式的な1自由度系の釣り合い径路を例にとって考える。径路の追跡は、図の径路上の矢印の方向にのみ行なうものとし、逆向きの追跡過程は考えない。荷重として保存力のみを考えているので、基準荷重の向きは不変であることを考慮すると、図中、釣り合い径路Ⅰにおいては基準荷重 P_0 の向きと求める変位増分 $\Delta U^{(A)}$ に対応する荷重増分 $\Delta P^{(A)}$ の向きとが一致し、 $\Delta \lambda^{(A)} > 0$ でなければならないことがわかる。逆に、径路Ⅱにおいては基準荷重 P_0 と荷重増分 $\Delta P^{(B)}$ とがちょうど逆向きになるので、 $\Delta \lambda^{(B)} < 0$ でなければならない。一方、釣り合い径路上の各点において基準荷重が対応する基準変位に対してなす仕事の正負に注目すると、径路Ⅰにおいては正、径路Ⅱにおいては負となり、各径路上における荷重増分パラメータの符号と一致することがわかる。そこで、多自由度系においても荷重増

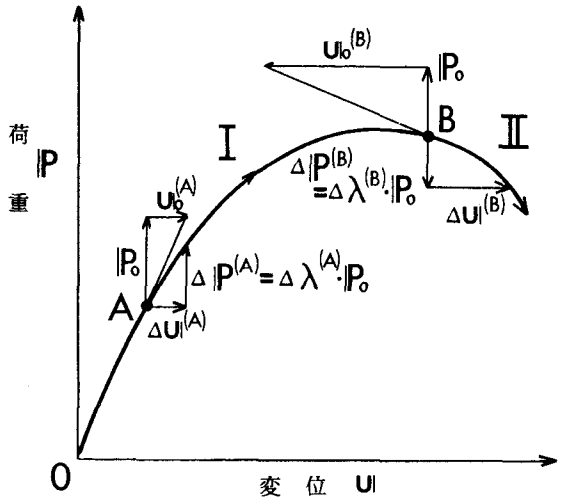


図2. 1自由度系における釣り合い径路

分パラメータ $\Delta \lambda_m^{(1)}$ の符号は、釣り合い径路上の各点において基準荷重ベクトル P_0 が対応する基準変位ベクトル $U_m^{(0)}$ に対してなす仕事 $P_0 \cdot U_m^{(0)}$ の符号に一致すると仮定し、増分制御式として式(4)の代わりに次式を用いることにする。

$$\Delta \lambda_m^{(1)} = \frac{P_0 \cdot U_m^{(0)}}{|P_0 \cdot U_m^{(0)}|} \frac{\Delta S_m}{\sqrt{1 + U_m^{(0)} \cdot U_m^{(0)}}} \quad (5)$$

従来の荷重増分法に従えば、式(5)を用いて定めた荷重増分パラメータ $\Delta \lambda_m^{(1)}$ を修正することなく繰り返し計算を行うことになるため、極限点の近傍では $\Delta \lambda_m^{(1)}$ に対応する釣り合い径路上の点が存在せず、適切な近似解を得ることができなくなる。従って、荷重増分法を用いて極限点を越える釣り合い径路を追跡する場合には、極限点近傍で荷重増分パラメータの符号を反転させるなどの試行錯誤的な操作が不可欠となる。一方、こうした極限点近傍における取り扱いにくさを取り除くために考案されたのが弧長増分法である。Ramm⁽¹¹⁾は、Riks及びWempnerによって提案された収束計算過程を簡略化し、各増分区間の最初の計算によって定められた $(N+1)$ 次元空間内のベクトル $\vec{R}_1$ (図1)に直交する超法平面と、釣り合い径路との交点Bをその増分区間における最終目標点と考え、この超法平面上に近似点 B_j ($j=2, 3, \dots$)を探していく手法を考案した。すなわち、次式で表わされる幾何学的関係

$$\vec{A}\vec{B}_i \cdot \vec{B}_i\vec{B}_j = 0; j = 2, 3, \dots \quad (6)$$

を利用し、繰り返し計算過程で生ずる荷重増分パラメータ $\Delta \lambda_m^{(1)}$ の修正量 $\Delta \lambda_m^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots$) を次式によって計算する。

$$\Delta \lambda_m^{(1)} \Delta \lambda_m^{(j)} + \Delta U_m^{(1)} \cdot \Delta U_m^{(j)} = 0; j = 2, 3, \dots \quad (7)$$

ここに、 $\Delta U_m^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots$) は修正変位増分ベクトルであり、次式で与えられる。

$$\Delta U_m^{(j)} = \Delta \lambda_m^{(j)} U_m^{(0)} + \Delta C^{(j-1)}; \Delta C^{(j-1)} = K_T^{(A)-1} R^{(j-1)} \quad (8)$$

式(8)において $R^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) は各繰り返し計算毎に生ずる不平衡力ベクトルである。この手法に従えば、極限点の近傍であっても図3に示したように容易に解析を続行することができる。Ramm は、文献11)において各繰り返し計算毎に接線剛性行列 K_T を更新していく通常の Newton-Raphson法に従った定式化を示し数値計算を行なっているが、ここではRammの示唆に従って式(8)からも明らかなように各増分区間内では接線剛性行列を不変とする修正Newton-Raphson法を用いることにした。式(7)、(8)を連立させて解けば、修正荷重増分パラメータ $\Delta \lambda_m^{(j)}$ 及び修正変位増分パラメータ $\Delta U_m^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots$) を求めることができる。なお、ここでは荷重として保存力のみを考え、式(1)を仮定したが、非保存力が作用するような場合であっても、式(1)における基準荷重ベクトル P_0 を各増分区間毎に変更することにより、基本的なアルゴリズムを変更することなく解析することができる。各増分区間で最終的に求められる荷重パラメータ $\lambda_m^{(\ell)}$ 及び変位ベクトル $U_m^{(\ell)}$ は次式のとおりである。

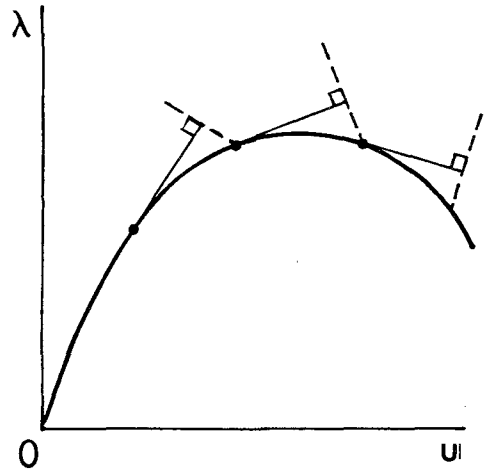


図3. 極限点近傍における釣り合い経路の追跡

$$\lambda_m^{(\ell)} = \sum_{i=1}^{\ell} \Delta \lambda_m^{(i)}, \quad U_m^{(\ell)} = \sum_{i=1}^{\ell} \Delta U_m^{(i)} \quad (9.a, b)$$

なお、収束判定は次式

$$\frac{|R^{(\ell)}|}{|\lambda_m^{(\ell)} P_0|} \leq \epsilon \quad (10)$$

で行ない、今回の数値計算では $\epsilon = 0.01$ とした。

本研究では、Herrmannの混合型有限要素を基礎にして幾何学的非線形性だけでなく、材料非線形性をも考慮して再定式化した有限要素解析手法¹⁴⁾を用いている。定式化に際し、塑性流れを考慮するために導入した仮定は以下のとおりである。(1)構成則はReussの流れ則に従う。(2)von Mises形の降伏関数によって降伏曲面が表現できる。(3)ひずみ硬化則としてZieglerの移動硬化則を用いる。また、板厚方向への塑性域の広がり进行评估するために、各要素を板厚方向に9層に分割し、板厚方向の積分についてはGauss-Legendreの数値積分公式を用いた。

3. 解析モデル

解析例としては、筆者らがこれまで修正Newton-Raphson法と荷重増分法とを用いて解析を行ってきたI形断面曲線桁¹⁴⁾を選び、増分過程に関して弧長増分法を用いた本研究の解析結果との比較を試みた。解析対象としたI形断面曲線桁パネルの全体図を図4に示す。数値解析を実施したモデルは2種類あり、両者の寸法は曲率パラメータ $Z (= h^2 \sqrt{1-\nu^2}/Rt_w)$ 、ウェブ幅厚比 h/t_w 、フランジとウェブの断面積比 A_f/A_w についてそれぞれMODEL 1: $Z=7.15$ 、 $h/t_w=150$ 、 $A_f/A_w=1.0$ 、MODEL 2: $Z=3.18$ 、 $h/t_w=100$ 、 $A_f/A_w=1.5$ である。また、両者ともにウェブのアスペクト比 R ベクトル比 $\theta/h=1.0$ 、フランジの幅厚比 $b/t_f=12$ である。

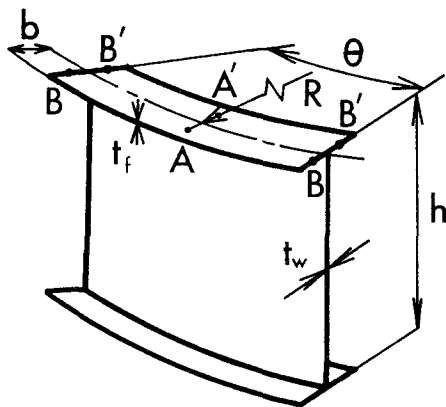


図4. 解析モデル

ある。材料に関しては、MODEL 1については使用鋼材をSS41とし、降伏応力 $\sigma_y=2400[\text{kg/cm}^2]$ すなわち $235[\text{MPa}]$ 、MODEL 2については使用鋼材SM50Yを想定して降伏応力 $\sigma_y=3600[\text{kg/cm}^2]$ すなわち $353[\text{MPa}]$ をそれぞれ仮定した。Young率 E 及びPoisson比 ν については、それぞれ $E=2.1 \times 10^6[\text{kg/cm}^2]$ すなわち $2.06[\text{MPa}]$ 、 $\nu=0.3$ とした。また、単軸状態の応力-ひずみ関係として、SS41材の場合は降伏後平坦な領域を経てからひずみ硬化を生ずるtri-linearなモデルを、SM50Y材の場合は降伏後直ちにひずみ硬化を生ずるbi-linearなモデルを考え、ひずみ硬化領域における応力-ひずみ曲線の傾きを $E/50$ と仮定した。MODEL 2については残留応力を考慮した場合の解析も実施し、荷重増分法による結果と弧長増分法による結果との比較を行なった。残留応力の分布は図5に示したとおりであり、フランジ、ウェブともに自己平衡条件を満たす矩形分布形状で与えた。数値計算にあたっては初期応力の形で残留応力を導入し、その結果生ずる等価節点力を開放した状態が初期状態であるとして解析を行った¹⁵⁾。荷重としてはフランジ部で一様分布、ウェブ部で線形分布する応力分布を仮定し、解析パネルの端部に曲げを作用させた。境界条件はフランジ端部で板曲げモーメントが零、ウェブ端部で板曲げモーメント及び面外変位が零とした。さらに、パネルの端部には本来垂直補剛材が存在するため、実際には端部の拘束がきつくなることを考慮し、図4におけるB、B'点の面外変位が零であるという条件とウェブの端辺が上下方向に伸縮しないという条件を付け加えた。なお、パネルの有限要素分割はウェブ部100分割、フランジ部上下ともに40分割とし、解析は構造の対称性を利用してパネルの右半分について実施した。

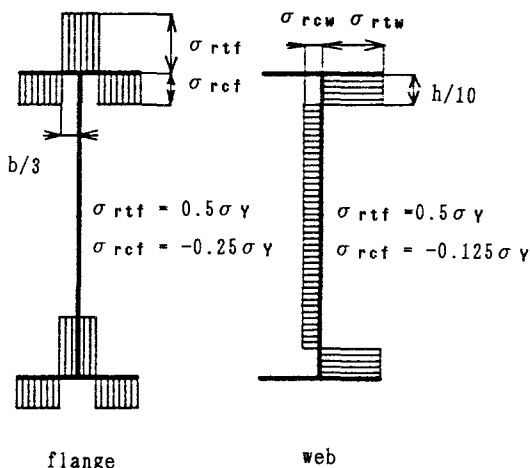


図5. 残留応力の分布

4. 解析結果及び考察

4. 1 変形挙動及び耐荷力の比較

荷重増分法と弧長増分法の両者の解析結果を比較するにあたって、まず変形挙動及びそれから決定さ

れる耐荷力について両者の結果を比較する。図6に圧縮フランジ中央辺(A-A'辺、図1)の回転挙動に関する解析結果を図示した。MODEL 1、2ともに残留応力は考慮されていない。結果は縦軸にパネル端部の曲げ荷重によるモーメント M を降伏モーメント M_Y で割って無次元化した無次元化モーメントを、横軸に圧縮フランジ中央辺の周方向まわりの回転角をそれぞれとって図示してある。図中、実線及び破線で示されているのが荷重増分法による解析結果¹⁶⁾であり、プロットで示されているのが今回の弧長増分法を用いた解析結果である。図6から明らかなように、圧縮フランジの回転挙動に関しては荷重増分法と弧長増分法の解析結果の間に差異は認められない。また耐荷力についても、両解法ともに一致した結果が得られている。さらに、MODEL 2 については残留応力を考慮した場合についても弧長増分法を用いて解析し、荷重増分法による結果¹⁶⁾との比較を行なった。圧縮フランジ中央辺の回転挙動に関する両者の比較結果を図7に示す。図中、縦軸及び横軸には図6と同様に、無次元化モーメント及び圧縮フランジ中央辺の回転角をそれぞれとってある。図7を見ると、残留応力を考慮した場合にも変形挙動や耐荷力に関し、2つの解法による差異はないことがわかる。本研究では、板殻構造物のような自由度の大きな構造系に対する弧長増分法の有用性を明らかにすることを目的の1つとしている。したがって、圧縮フランジ中央辺の回転挙動のような、局所的な変形挙動のみによって荷重増分法と弧長増分法とを比較するのでは不十分と思われる。そこで解析モデルの自由度が大きいという板殻構造物の特性を損うことなく、2つの解法による解析結果を比較検討するために、図8に示したようなウェブパネルにおける面外変形モードの等高線図を用いて両者を比較してみた。図8は、MODEL 1の最高荷重レベルにおける解析結果であり、曲率中心に向かって外向きの面外変位を正とし、圧縮側を上にして図示してある。図8(a)及び図8(b)を比較すると、ウェブパネルの面外変形についても、変形のモード、大きさともに弧長増分法の解析結果が荷重増分法の結果に一致していることがわかる。以上の比較によって、板殻構造物の一例であるI形断面曲線桁のように、大きな自由度を有する構造物の弾塑性有限変位解析に関しても、弧長増分

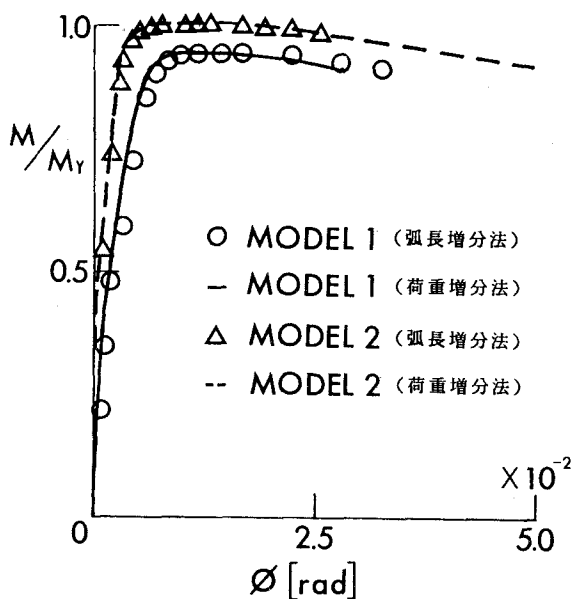


図6. 圧縮フランジの回転挙動(残留応力なし)

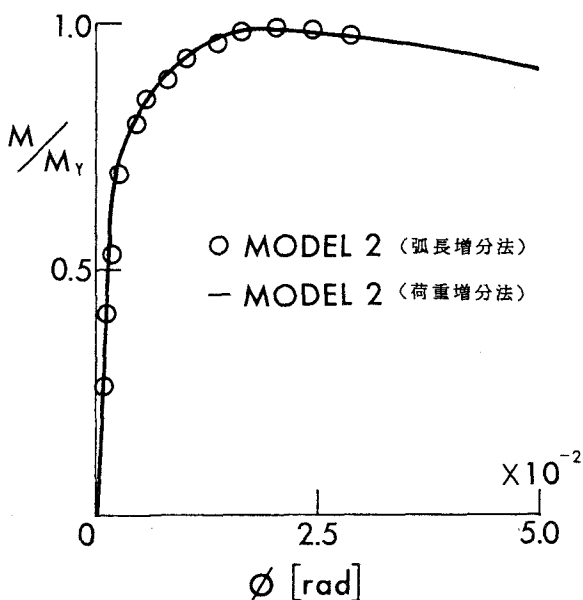
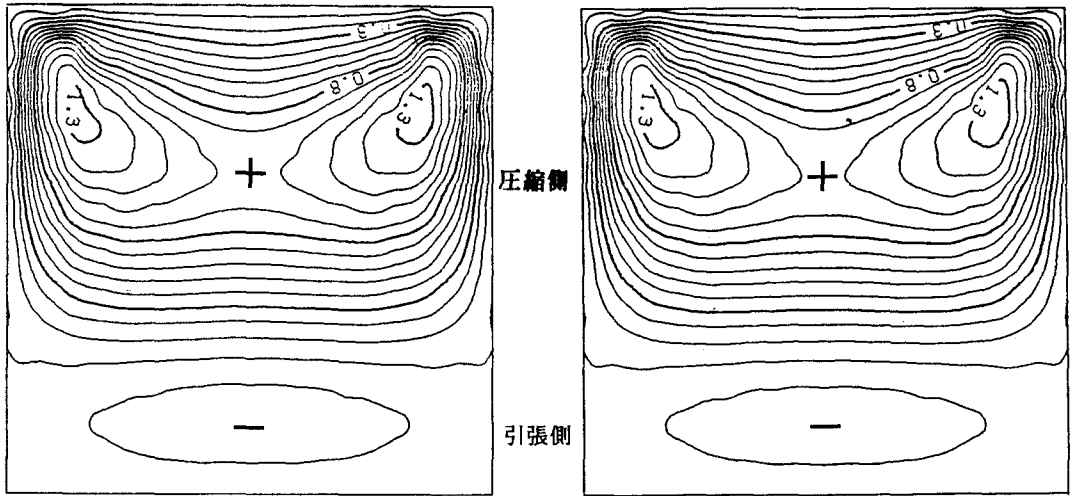


図7. 圧縮フランジの回転挙動
(MODEL 2, 残留応力あり)

単位：cm

単位：cm



(a)荷重増分法 ($M/M_y=0.947$)

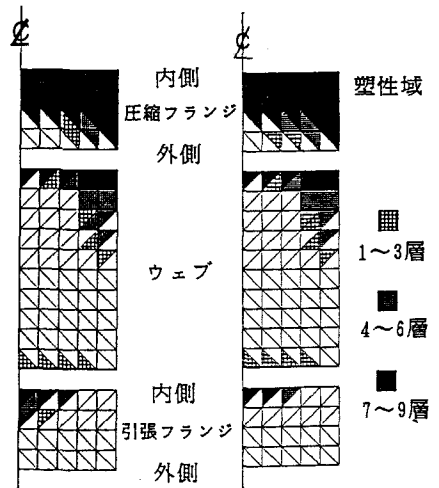
(b)弧長増分法 ($M/M_y=0.948$)

図8. ウェブパネルの面外変形モード (MODEL 1)

法を適用することによって荷重増分法と何ら変わらない解析結果が少ない演算時間で得られることがわかる。さらに、従来の荷重増分法を用いた場合、各増分幅の決定は計算する者の経験に委ねられており、最高荷重点のような極限点以後の挙動を追跡するためには試行錯誤的な操作が必要不可欠だった。これに対し、弧長増分法では式(5)によって増分幅を自動的に制御することができ、式(7)、(8)に従った繰り返し計算により極限点近傍の解析に費していた労力を飛躍的に軽減することができる。したがって板殻構造物の一例であるI形断面曲線桁の曲げ耐荷力解析のように、極限点を求めることが重要である問題に、弧長増分法が有用であることがわかる。

4. 2 塑性化状況の比較

本論文では弾塑性解析を実施しているので、面内方向及び板厚方向の塑性化状況が解法によってどのように変化するかという点も検討する必要がある。図9に荷重増分法及び弧長増分法による解析から得られた塑性化状況を図示する。2つの図は両者ともMODEL 1の最高荷重レベルにおける結果を図示したものである。図9(a)及び図9(b)を比較すると、塑性化状況についても2つの解法に本質的な差異は生じていないことがわかる。引張フランジ等、局所的に塑性化状況の異なった部分が認められるが、これは荷重増分幅や収束計算過程が2つの解法で異なっているために、局所的な要素においてひずみ履歴に差異が生じたことによる。板殻構造物の塑性化状況を追跡しつつ、構造物の崩壊機構を解明する場合にも、弧長増分法を解析手法として用いれば、荷重増分法よりもはるかに少ない労力で同一の結



(a)荷重増分法

(b)弧長増分法

($M/M_y=0.947$)

($M/M_y=0.948$)

図9. 塑性化状況 (MODEL 1)

果に到達するものと考えられる。

5. まとめ

解析結果をまとめると以下の結論が得られる。

- (1) 弧長増分法に基づく非線形収束計算アルゴリズムは、I 形断面曲線桁のような板殻構造物の耐荷力解析にも十分適用可能である。
- (2) 弧長増分法を用いることによって釣り合い径路の極限点近傍の解析における数値計算上の問題点を取り除くことができた。このため、板殻構造物のような大自由度を有する構造物の耐荷力解析が、荷重増分法の場合に比べて少ない演算時間で行なえるようになった。
- (3) 各増分区分間における増分幅の初期設定に際し、本論文で示したように基準荷重が対応する基準変位に対してなす仕事の符号を用いれば、荷重パラメータの符号を合理的に決定することができる。分岐座屈の場合にも同様の考え方が適用できると考えられる。
- (4) 弧長増分法は収束計算アルゴリズムの一種であるので、要素方程式の定式化に依存することなく利用することができる。それ故、従来のプログラムソフトを若干修正するだけで弧長増分法が使用でき、少い労力で有力な解析ソフトを開発できる。

謝 辞

本研究の図の整理にあたっては、学部4年生の高島茂晴、高平一哉、三鼓 晃、山下智靖各氏の協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 土木学会：座屈設計ガイドライン，鋼構造シリーズ2，1987-10。
- 2) 大坪英臣：平板の弾塑性大たわみ問題の一解法，日本造船学会論文集，第130号，pp.173~182，1971-12。
- 3) 上田幸雄・安川度・矢尾哲也・池上博・大南亮一：圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究（第1報），日本造船学会論文集，第137号，pp.210~221，1975-6。
- 4) 上田幸雄・安川度・矢尾哲也・池上博・大南亮一：圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究（第2報），日本造船学会論文集，第140号，pp.205~209，1976-12。
- 5) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司：残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析，土木学会論文報告集，No.244，pp.1~14，1975-12。
- 6) 吉田裕・増田陳紀・松田隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法，土木学会論文報告集，第238号，pp.41~55，1979-8。
- 7) 宇佐美勉・土屋信洋・大谷恭弘・福本嘯士：薄板集成短柱の弾塑性有限変位解析，土木学会論文集，No.362，pp.293~302，1985-10。
- 8) Wempner, G.A. : Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids, Int. J. Solids Struct., Vol. 7, pp.1581~1599, 1971.
- 9) Riks, E. : The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability, J. Appl. Mech., Vol.39, pp.1060~1066, 1972-12.
- 10) Riks, E. : An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems,

Int. J. Solids Struct., Vol.15, pp.529~551, 1979.

11) Ramm, E. : The Riks/Wempner Approach—An Extension of the Displacement Control Method in Nonlinear Analyses, Recent Advances in NON—LINEAR COMPUTATIONAL MECHANICS, CHAPTER 3, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., pp.63~86, 1982.

12) 細野 透 : 弧長法による弾性座屈問題の解析(その1・その2), 日本建築学会論文報告集, 第242・243号, pp.41~49・21~31, 1976—4・5.

13) 伊藤文人・野上邦栄 : 不完全系釣合径路追跡計算上の問題点とその対策, 構造工学論文集, Vol. 32A, pp.165~176, 1986—3.

14) 末武義崇・平嶋政治・依田照彦 : Herrmannの混合法を用いた I 形断面曲線桁の曲げ耐荷力解析, 構造工学論文集, Vol.33A, pp.73~82, 1987—3.

15) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. : Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1951.

16) 末武義崇・平嶋政治・依田照彦 : 残留応力の影響を考慮した I 形断面曲線桁の弾塑性有限変位解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, J S S C, Vol.11, pp.333~338, 1987—7.

(1987年10月16日受付)