

弧長自動変更アルゴリズム

AN AUTOMATIC ARC LENGTH CONTROL ALGORITHM

タウィープ・シャイソムボブ・ボラサック・カノクヌクンシャイ** 西野 文雄 ***

By Taweep CHAISOMPHOB, Worsak KANOK-NUKULCHAI and Fumio NISHINO

An automatic arc length control algorithm for tracing smooth equilibrium paths of nonlinear discretized structures is developed utilizing curvature of paths in $n + 1$ dimensional space with components of n degrees of freedom for displacements and a loading intensity. A few algorithms were reported in literature, but the present algorithm is superior to them in obtaining more results at parts where the path bends significantly and less results at other parts, thus requiring less computing time for the same accuracy in tracing nonlinear response. This superiority is demonstrated through two examples on truss structures, a very simple two bar truss with two degrees of freedom and a space truss simulating a domed shell with 21 degrees of freedom.

1. まえがき

非線形応答をする構造物の支配方程式は、変位、あるいは位置ベクトルの成分の自由度が n の系に離散化すると、 n 個の非線形連立方程式で表される。荷重強度を決めず変化する未知量として扱うと、この n 個の連立方程式の未知数の数は n 個の変位、あるいは位置ベクトルの成分に、荷重強度を加えた $n + 1$ 個となる¹⁾。非線形応答する構造物の支配方程式の解は、この $n + 1$ 個の未知量を成分とする $n + 1$ 次元空間での曲線となる。この解曲線を数値的に解くには、いわゆる弧長法¹⁾⁻⁶⁾を用い、ニュートン・ラフソンによる逐次近似法と組み合わせるのが最も有効な方法と考えてよい。このとき、解曲線の必要な部分を、一定の精度を保ちながら、少ない計算量で求めるには、逐次近似解の初期値の選択が重要であり、このため弧長の選択に考慮を払う必要がある¹⁾。自動的に弧長を選択するための手法がすでにいくつか提案されている²⁾⁻⁴⁾。これらの提案では、一つの解を求めるのに要した逐次近似回数をもとに、次の解を求めるための弧長を決めており、解曲線上の点を求めるのに必要な逐次近似回数を、ほぼ一定に保つことを基本目標としている²⁾。この基本目標そのものは一つの考え方として十分受け入れられるものであろうが、手法そのものには理論的な基礎がなく、直感的に導かれている³⁾。

* 工博 (株)大林組土木本部設計部 (101 千代田区神田司町2-3)

** Ph. D. アジア工科大学助教授 構造工学部門 (タイ国バンコック市 10501 GPO Box 2754)

*** Ph. D. 東京大学教授 工学部土木工学科 (113 東京都文京区本郷7-3-1)

本報告では、支配方程式を解の求まっている点でテラー展開し、展開した項のなかで、解曲線上の次の点を逐次近似法で求めるのに最も大きな影響を与える曲率をもとにして弧長を自動的に決め、解曲線を連続的に求めるアルゴリズムを示す。本アルゴリズムの有効性を示すために、2本の棒からなる平面トラス、およびブスフェリカル・ドームを想定した立体トラスを例として選び、数値計算を行なった。文献3)の伊藤、野上の提案による手法、および文献4)のRammの手法を同じ立体トラスに用い、本提案による手法で求めた結果と比較、検討し、本報告の手法がよりすぐれていることを示す。

2. 支配方程式

問題を簡単にするため、直交デカルト座標を採用するものとする。一般的な保存系で静的な荷重の作用を受け、非線形応答する構造物の離散化した系での支配方程式は

$$\int_0^t f_i(f) dt = k_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (1)$$

と表わされる¹⁾。ここに f は外力の履歴と同時に強度を表わす変数、 f_i は f の関数として与えられる载荷パターンを表わすベクトルの i 番目の成分、 $x = \langle x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \rangle^T$ は変位、あるいは変位後の位置ベクトル、 k_i は外力とつり合う内力ベクトルの i 番目の成分、 n は変位、あるいは位置ベクトルの成分の数を示す。

一般性を大きくそこなうことなく問題を簡単にするため、式(1)の左辺で表わされる外力が部分的に f の線形関係で表わされる場合のみを取り扱うものとする。外力がこの条件を満たさないときには、 f を十分に小さな領域に分割し、その分割区間で線形近似するものとする。この外力条件のもとでは、 f の関数である外力パターンベクトルの成分 f_i は各線形領域内で定数となる。さらに f が荷重強度を表わすよう f_i の次元、および値を選ぶものとする。

荷重強度 f を未知量として扱うと、式(1)は $n+1$ 個の未知数を含むことになり、解を求めるためには式(1)の他にもう一つの式が必要となる。この付加的な式として、弧長法では既知の点 p から次に求める点までのつり合い曲線の弧長 Δs が満たすべき条件式

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 (x_i - x_i^p)^2 + (\alpha_f)^2 (f - f^p)^2 - (\Delta s)^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

を用いる。ここに α_i と α_f は x_i と f の次元を s の次元と同じにするための任意の値の定係数、 x_i^p 、 f^p は点 p での解を示す。点 p からの弧長 Δs が与えられ、非線形式(1)、(2)をニュートン・ラフソン法に代表される適当な逐次近似法を用い、収束し、規定した範囲の精度におさまった解が求まったとき、この解を空間曲線上の点 p の次の解とする。

3. 弧長を自動的に決めるアルゴリズム

式(1)の解はすでに述べたように x_i 、 f を成分とする $n+1$ 次元のユークリッド空間での曲線で表わされる。荷重強度 f が 0 の初期状態での位置から測ったこの空間曲線の長さを s で表わす。長さが $s + \Delta s$ で表わされる点の位置ベクトル $p(s + \Delta s)$ を s で表わされる点でテラー展開すると

$$\begin{aligned}
p(s+\Delta s) = & p(s) + e_1(s)\Delta s + \kappa(s)e_2(s)(\Delta s)^2/2 \\
& + [-\{\kappa(s)\}^2 e_1(s) + e_2(s)d\kappa(s)/ds + \kappa(s)\tau(s)e_3(s)](\Delta s)^3/3! \\
& + \{(\Delta s)\text{の4次以上の高次項}\} \dots\dots\dots (3)
\end{aligned}$$

と表わされる⁷⁾。ここに e_1, e_2, e_3 はそれぞれ単位接線、主法線、従法線ベクトル、 κ は曲率、 τ はねじれ率である。式(3)の右辺第2項は s での点から $s+\Delta s$ での点への直線近似を表わすことから、この空間曲線の直線からのずれを最も大きく表わす量は右辺第3項であることがわかる。式(3)の右辺第3項で表わされているベクトルの絶対値と第2項の絶対値の比を考えると、この比は空間曲線が直線からずれる量を表わす第一の近似値となる。空間曲線を少ない計算量で精度良く求めるためには、直線に近い所では弧長を大きく選び、直線からずれる所ではずれ量が大きい程弧長を小さく選ぶのが良い。このため、この近似値をもとに弧長を選ぶのは一つの自然な選択であると考えてよいであろう。 e_1, e_2 はそれぞれ単位ベクトルであり、 Δs として常に正の量を考えるものとする、式(3)の右辺第3項で表わされるベクトルの絶対値と第2項のベクトルの絶対値の商は空間曲線の曲率 $\kappa(s)$ は定義から常に正となることを考慮すると⁷⁾

$$\frac{\kappa(s)\Delta s^2/2}{\Delta s} = \frac{\kappa(s)\Delta s}{2} \dots\dots\dots (4)$$

と表わされる。弧長を決める一つの方法として、式(4)で表わされる量を一定に保つことを提案する。任意の正の定数を $C/2$ で表わすと、弧長はこの定数の C を用いて、

$$\Delta s = \frac{C}{\kappa(s)} \dots\dots\dots (5)$$

と決まる。定数 C の値として適当な値を選んだうえ式(5)から決まる弧長を用いると、空間曲線が直線から大きくずれる部分では弧長は短く、直線に近い部分では長くなり、先に述べた弧長選択の条件を基本的に満たす。式(5)から弧長を選ぶものとする、空間曲線が直線に近づくにつれて、弧長が無限に大きくなる。このため、直線に近い部分より先で再び直線からずれる部分があると、この部分を追うことができない恐れがある。これを避けるために、式(5)から決まる弧長の最大値を制限する必要がある。荷重強度が小さい初期状態では一般に構造物は線形応答に近い応答をし、非線形性が少ないことから、弧長の最大値を、初期状態で応答曲線を求めるときに指定する最初の段階での弧長値に制限するのが、一つの自然な制限方法であろう。最初の段階で指定する弧長を Δs^0 と表わすと、 Δs^0 は経験等にもとづく判断によって適当な値を選ぶことになろうが、初期形状で構造解析し、内力状態を決め、この結果を用い最初の特異点を線形予測し、その特異点の値の数分の1から10分の1程度に決めるのも一つの方法であろう。式(5)から決まる弧長がこの Δs^0 を越えるときには、この値に制限するものとする。すなわち

$$\Delta s \leq \Delta s^0 \dots\dots\dots (6)$$

一方、逐次近似解法では、解に要求する精度を指定し、収束計算を打ち切ることになる。収束判定条件に比べて、式(5)から決まる Δs の最小値を十分に大きくしておく必要があり、 Δs の最小値の設定も必要となる。式(2)の α_i, α_r を用いて全ての解の次元を s と同じにしたうえで個々の解を無次元化して精度を指定し、 Δs を同じ長さで無次元化したとき、 Δs の最小値をこの指定した個々の解の精度の和より数桁大きい値に選ぶのが、 Δs の最小値を決める一つの方法であろう。

$n+1$ 次元空間での点 s での曲率 $\kappa(s)$ は

$$\kappa(s) = \left[\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 \left\{ \frac{d^2 x_i(s)}{ds^2} \right\} + (\alpha_r)^2 \left\{ \frac{d^2 f}{ds^2} \right\} \right]^{1/2} \quad \dots \dots \dots (7)$$

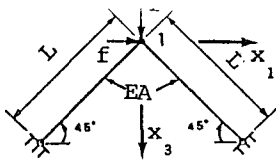
と表わされる⁷⁾。式(1)の解曲線は式(5)、(6)で決まる弧長間隔で決まる点でのみ求められるので、式(7)の $d^2 x_i(s)/ds^2$ および $d^2 f/ds^2$ は何らかの関数近似を用いて評価することになる。

4. 数値計算例

式(7)の曲率を離散化点での値を用いて数値的に求めるには、適当な関数近似を用いる必要がある。以下に示す数値計算例では近似関数として、有理多項式を用いるニュートン⁸⁾の方法を採用することとし、多項式の次数として数種類のものを選んで、効率も合わせて調べた。数値計算をした結果、3次以上の高次の多項式を選んでも数値計算量の増加に対して、収束回数の顕著な低下はみられなかった。このため、ここに示す数値計算例では全て3次の多項式を用いている。

任意の値に選んで良い α_i の値としては単位値を選び、 $\alpha_i x_i$ が無次元量となる次元を選んだ。 α_r の値としては初期状態で $\alpha_r |f - f^0| \doteq \max(\alpha_i |x_i - x_i^0|)$ となるように選び、 $\alpha_r f$ が無次元となる次元を選んだ¹⁾。

ニュートン・ラフソン法を用いるとき、初期値の設定が収束速度に大きく影響する。ここでは、各変数に対して独立にニュートンの補間多項式を外挿して用いた¹⁾。扱った例題では全て1次式による外挿を用いたが特に問題を生じることにはなかった。一般的には式(7)の計算と同じ理由で3次の多項式を用いて外挿するの



(a) Two bar plane truss

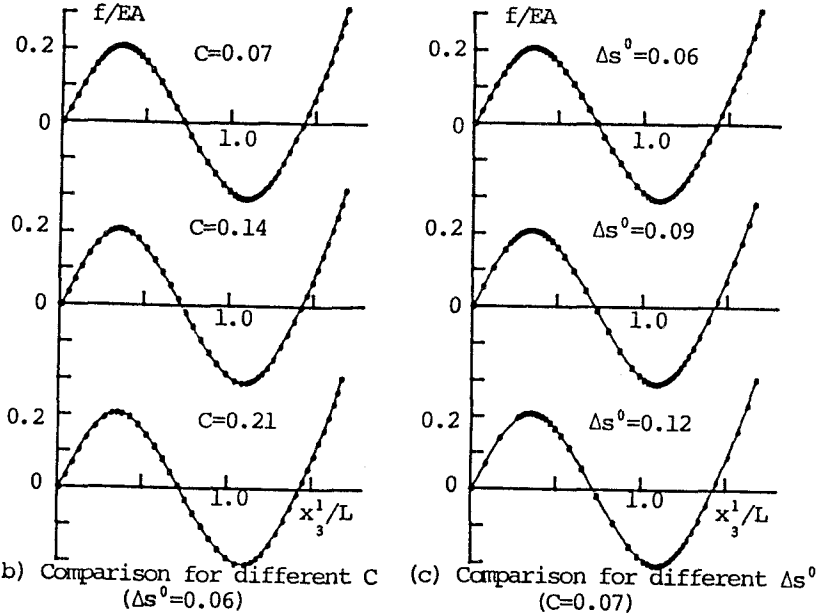


Fig. 1 Results of Two Bar Plane Truss

が最も良いという結果を得ている。

文献 9) に示されている幾何学的非線形性を含んだ厳密な剛性方程式を用い、2本の棒からなる2自由度の平面トラス、および21自由度を持つドーム形の立体トラスの2つを例題として選び、それぞれの構造物の分岐経路を含まない基本応答曲線を求めた。

(1) 2本の棒からなる平面トラス

図1 (a) に示す簡単な2自由度の平面トラスに鉛直荷重のみが作用する場合について、本報告で提案している弧長を自動的に制御するアルゴリズムを用いたとき、弧長の初期値、すなわち最大値 Δs^0 と式(5)の定数 C の選択がおよぼす影響を調べた。図1 (b) は初期値 Δs^0 を一定値 0.06 に保ったまま、 C の値を 0.07、0.14、0.21 と変化させたときの結果を示す。図中、黒丸は数値解の求めた点を示す。収束条件は3つの無次元量の全てに対して 10^{-5} を用いた。当然のことながら、 C の値が大きい程、曲線の曲率値が同じとき弧長が長くなっているため、つり合い曲線の一定区間での解の数は少なくなっている。図1 (c) は反対に C の値を一定値 0.07 に保ったまま、初期値 Δs^0 を 0.06、0.09、0.12 と変化させたときの結果を示す。 C を変化させたときと同じく、 Δs^0 を大きく選んだとき、つり合い曲線の比較的長い区間を考えれば、求められた解の数は少なくなっているが、式(5)から明らかなように、曲率の大きい非線形性の強い部分では Δs^0 の値にかかわらず弧長は同じ値になっている。式(5)は曲率が一定値を越えると、弧長は初期値 Δs^0 とは無関係となることを示しているが、現実には式(5)と式(6)で弧長の決まる境界付近、すなわち曲率が大きくなり始める部分では式(5)から決まった弧長で最初の点が求まるため、 Δs^0 が大きいとき、曲率が大きいにもかかわらず、つり合い曲線上の点の一部が求まらない状況が見られる。この図1 (b)、(c) から明らかなように、 Δs^0 と C の値は試行によって決める必要がある。

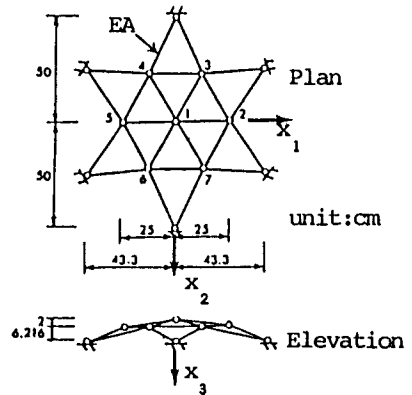


Fig. 2 Reticulated Space Truss

(2) ドーム形トラス

図2に示すドーム形トラスの6つの対称点に値の等しい鉛直荷重が作用し、中央点に半分の値の鉛直荷重が作用する場合の主つり合い経路を、本報告で提案する弧長の自動決定アルゴリズムを用いて求める。このドーム形トラスの主つり合い経路は比較的複雑な形の曲線となる⁵⁾。

図3 (a) は C の値として 0.133、 Δs^0 の値として 1.879 を選んだときに、式(5)、(6)を用いて弧長を決め、数値解を求めた結果を示す。収束条件は無次元量である $n+1$ 個の全ての未知量に対して 10^{-5} を用いた。伊藤、野上³⁾ および Ramm⁴⁾ はそれぞれ

$$\Delta s = \frac{\alpha + N_s N_c}{\alpha + N_c^2} \Delta s^* \quad , \quad \Delta s = \left(\frac{N_s}{N_c} \right)^{1/2} \Delta s^* \quad \dots \dots \dots (8a, b)$$

を用いて弧長を決めることを提案している。ここに、 N_s は収束解を得るための目標とする逐次近似回数、 N_c は一つ前の点を弧長 Δs^* 用いて求めたときに収束解を求めるのに要した逐次近似回数、 α は弧長の長さの変化を制御するためのパラメーター³⁾である。

図3 (b)、(c) は、それぞれ、 N_s および α の値として3を選び、最初のステップの初期値 Δs^* として、図3 (a) の計算の Δs^0 に用いたと同じ 1.879 を採用し、式(8a)および式(8b)を用い

で計算した結果を示す。計算にあたって、図3(a)と同じ収束条件を用いた。

図3は Δs° 、C、 N_s 、 α の値としていくつかの組み合わせを選んで計算した結果のうち、本報告の提案と式(8a)、(8b)による提案の差がより明確になるよう、弧長の差が大きく異なる場合の結果を示している。他の数値の組み合わせの場合、3つの手法による差は図3に見られる程顕著ではないが、図3にみられる差異と同じ傾向は全ての場合に見られる。

図3の(a)、(b)、(c)を比較すると本報告のアルゴリズムによる(a)の解では、曲線の曲率が大きく、非線形性の強いA、B部近辺で、短い弧長でつり合い曲線上の点が数多く求まっているのに対し、(b)、(c)では弧長間隔と曲線の非線形性の強さとの間に良い相関がみられない。図3(a)では直線に近いC、C'の近傍では弧長が比較的長く選ばれているのに対し、(b)、(c)では弧長が短かく選ばれている。対称的な部分であるDとD'でも(a)では同じ弧長が選ばれているのに対し、(b)、(c)では異なった弧長が選ばれている。図(3)は2次元の図であり、 $n+1$ 次元空間の曲線を表わす図としては必ずしも適当でないが、ここでの比較は $n+1$ 次元空間ではより顕著であり、本報告の提案は、式(8)で表わされる他の提案より優れているといえる。

表1はA、B部近辺での解を求めるのに要した逐次近似の回数とその平均値、標準偏差をまとめたものである。比較した3つの手法のどれについても収束解を求めるのに要した逐次近似回数の平均値は変わらないものの、本報告の提案の方法の標準偏差は他の2つの方法に比べて、はるかに小さい。同一精度の解を一定数の逐次近似回数で求めるという規準で比べても、本報告の提案が優れていることが理解されよう。表3の最後の列に示したのは図3の解を求めるのに要した逐次近似回数の総数であり、本提案の手法は他の方法に比べて $1/3 \sim 1/4$ と少ない。

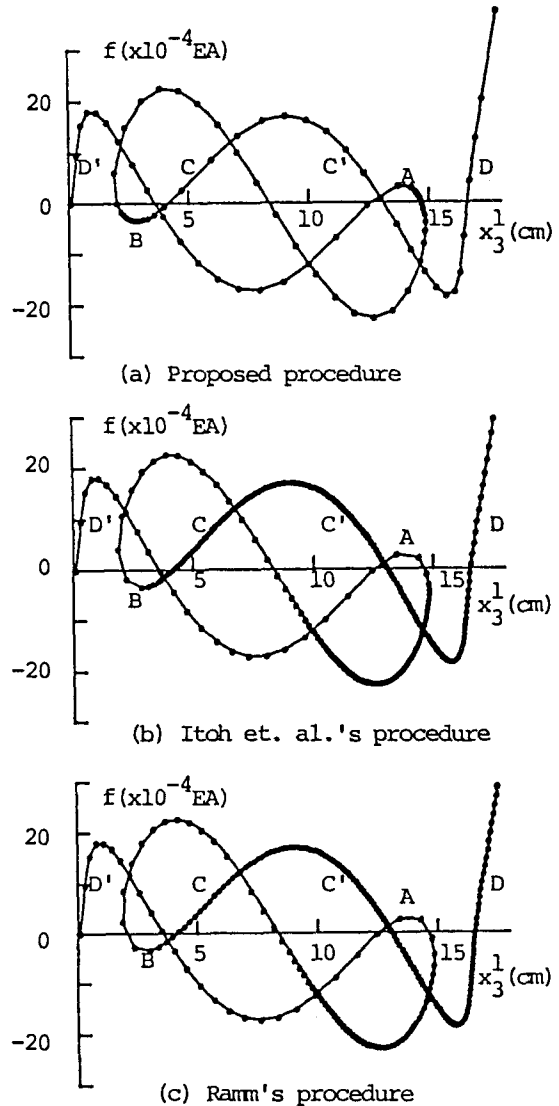


Fig. 3 Comparison of Results of Main Equilibrium Path

Table 1. Comparison of Number of Iterations to Obtain Results at Parts A and B in Fig. 3.

Criteria	Number of Iterations								Total Number of Iterations to Compute Entire Curve
	Maximum		Minimum		Average		Standard Deviation		
	A	B	A	B	A	B	A	B	
Proposed procedure	5	5	4	4	4.15	4.14	0.36	0.35	252
Itoh's	6	7	3	3	4.00	3.91	1.05	1.24	942
Ramm's	6	7	3	3	4.43	4.57	0.90	1.29	690

5. あとがき

弧長制御を用いて、非線形応答する構造物の滑らかなつり合い曲線を連続して求めるための自動アルゴリズムを、解曲線のテーラー展開に表われる項を用いて決めることを提案した。文献で報告されている方法と本提案のアルゴリズムを、比較的複雑な非線形応答をするドーム形立体トラスの解を求めるのに用い、その結果を比較した。

本提案の方法は他の2つの手法に比べて、

- 1) つり合い曲線が直線から離れる点で弧長が短くなり、その離れ方が大きくなる程、弧長がより短くなる、
 - 2) つり合い曲線が直線から離れる非線形性の強い部分で、収束解を求めるに必要な逐次近似の繰り返し数のばらつきが少ない、
 - 3) 一定の長さのつり合い曲線を同程度の精度で求めようとするとき、曲率の小さい所で弧長が長くなるため、解を求める点の数が少なくてすみ、ひいては総計算量が少なくてすみ、
- といった特徴があり、優れている。

参考文献

- 1) 西野文雄：土木工学大系 6 連続体の力学 II 構造，彰国社，1984年。
- 2) Crisfield, M.A. : Solution Procedures for Non-Linear Structural Analysis, Recent Advances in Non-Linear Comp. Mechs. (Eds. Hinton E., et.al.), Pineridge Press, 1982.
- 3) Itoh, F. and Nogami, K. : On the Tracing Calculation of the Equilibrium Path for Imperfect Systems, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 3, No. 1, April 1986.
- 4) Ramm, E. : The Riks/Wempner Approach - An Extension of the Displacement Control Method in Nonlinear Analysis, Recent Advances in Non-Linear Comp. Mechs. (Eds. Hinton E., et.al.),

Pineridge Press, 1982.

- 5) Nishino, F., Ikeda, K., Sakurai, T. and Hasegawa, A. : A Total Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Trusses, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 1, No. 1, April 1984.
- 6) Chaisomphob, T., Nishino, F., Hasegawa, A. and Abdel-Shafy, A.G.A. : An Elastic Finite Displacement Analysis of Inplane Beams with and without Shear Deformation, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol. 3, No. 1, April 1986.
- 7) 小林昭七：曲線と曲面の微分幾何、裳華房、1977年.
- 8) Hildebrand, F.B. : Numerical Analysis, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1974.
- 9) Hartono, W., Nishino, F., Fujiwara, O. and Karasudhi, P. : On Tracing Bifurcation Equilibrium Paths of Geometrically Nonlinear Structures, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.4, No.1, April 1987.

(1987年10月16日)