

構造連立非線形方程式の誤差に関する一考察

A CONSIDERATION ON NUMERICAL ERRORS IN SOLVING
STRUCTURAL SIMULTANEOUS NONLINEAR EQUATIONS

渡辺英一* 勇秀憲** 野呂敏行***

By Eiichi WATANABE*, Hidenori ISAMI** and Toshiyuki NOMURA***

Presented in this paper is a comparative study on the numerical errors and computational time in nonlinear analyses of typical structural problems. The relationships among the numerical error norms, the applied load and the displacements are observed for distinct instability phenomena of typical structural models.

Proposed herein is a procedure to control effectively the numerical error norms within a certain allowable range on the basis of the self-correcting perturbation method using variable incremental arc length.

Keywords: Geometrically Nonlinear Analysis; Error Norm;
Self-Correcting Perturbation Method.

1. はじめに

構造物の線形解析は微小変位・線形弾性体の仮定のもとに成り立っていて、通常構造力学という学問分野で古くから取り扱われてきた。しかし、構造物の釣り合い、崩壊挙動や終局状態を解明するためにはこのような仮定の上にさらに大変形・弾塑性の問題、すなわち幾何学的ならびに材料的非線形問題としての把握が必要となる。

構造物の挙動を明らかにするためにはそれらに作用する荷重と変位の関係を追跡することがまず要求される。このためには基本式を立てて解を求めるのであるが、この基本式は通常、微分方程式、積分方程式、あるいは代数方程式の形で与えられる。しかし、何れにせよ最終的には何らかの離散化を行うのが普通であり、結局基本的には非線形連立代数方程式を解くことに問題が帰着される[1-8]。ここで、非線形釣り合い径路の追跡とともに、釣り合いの誤差の大きさ(残差ノルム)の挙動を視覚的に追跡した研究はほとんど見あたらない。

本研究は、いくつかの非線形連立方程式の解法を、誤差・計算時間等の観点より比較検討し、非線形静的構造問題における非線形連立方程式の解法の選択に関する指針を得ること、そして究極的には構造非線形問題に対してひとつの汎用的プログラムを作成することを目的としている。解法としては Newton-Raphson法、増分法、摂動法そして自己修正摂動法(SPM:Self-Correcting Perturbation Method)等について、特にSP

* Ph. D. & 工博	京都大学教授	工学部土木工学科	(〒606 京都市左京区吉田本町)
** 工博	高知高専助教授	土木工学科	(〒783 高知県南国市物部乙200番1)
*** 工修	東京都建設局		(〒170 東京都豊島区池袋1-510)

Mを中心にして残差 λ を視覚的に追跡しその特性を調べた[9-19]。本研究では構造解析においてもっとも条件の厳しいと考えられる非線形性と不安定性を有する解析モデルを対象にし、自由度を適宜変化させて数値解析誤差の伝ばん特性を調べた。そして各モデルの残差 λ の挙動より各不安定現象に特有の誤差傾向を調べ、残差 λ をある範囲内におさめる増分制御法を提案した[20, 21]。なお釣り合い式はすべてLagrange表示である。

2. 数値計算法

2.1 幾何学的非線形問題の解法の分類

非線形構造解析をマトリクス法により行う場合、通常未知変位についての自由度数の非線形連立一次方程式を解くことになる。この方程式中の変位に関する線形項以外の項は通常補正項として取り扱われ、幾何剛性マトリクス、初期応力マトリクス、初期変位マトリクス等として場合に応じて適宜考慮される。数値計算法としては非線形計画法、例えば最急勾配法、共役傾斜法、その他の最小化手法等もあるがここでは誤差の評価に関して線形化手法を分類してみる[9, 10]。

いま、誤差ベクトルを $\{f\}$ とする。これは力学的には不釣り合い力を意味する。いま、系の線形剛性マトリクス $[K]$ 、未知変位ベクトル $\{q\}$ 、節点外力ベクトル $\{p\}$ 、等価な初期力ベクトル $\{Q^I\}$ 、等価な非線形力ベクトル $\{Q^{NL}\}$ を用いて、 $\{f\}$ は次のように書ける：

$$\{f\} = \{p\} - [K] \{q\} + \{Q^I\} + \{Q^{NL}\} \quad (1)$$

本来 $\{f\}$ は厳密に零ベクトル $\{0\}$ となるべきであるが数値計算上では通常そうはならない。そこでこの $\{f\}$ の評価に関して数値計算法は以下の5つに分類できよう。

- (i) $\{f\} = \{0\}$: 逐次近似法、Newton-Raphson、修正Newton-Raphson法等、
- (ii) $\dot{\{f\}} = \{0\}$: 増分法、摂動法等("・":あるパラメータに関する微分)、
- (iii) $\{f\} + Z \{f\} = \{0\}$: 一次の自己修正法等(Z:低減係数)、
- (iv) $\ddot{\{f\}} + C \dot{\{f\}} + Z \{f\} = \{0\}$: 二次の自己修正法等(C, Z:低減係数)、
- (v) $\Delta \{f\} + Z \eta \{f_0\} = \{0\}$: 自己修正型摂動法等(Δ :増分量, η :摂動パラメータ, f_0 :現ステップの誤差ベクトル)。

そこで以上の手法を用いて非線形問題を解けばどの程度の効果があるかを調べた。対象は図-1に示される4種類の一自由度モデルにとった[22]: Model-1(飛移・屈服モデル)、Model-2(安定対称座屈モデル)、Model-3(不安定対称座屈モデル)およびModel-4(非対称座屈モデル)。手法は上記(i)のNewton-Raphson法によるものを厳密解として、(ii)の増分法と摂動法、(iii)の自己修正法、そして(v)の自己修正摂動法を用いて比較した。図-2は増分法、図-3は摂動法、図-4は自己修正増分法、そして図-5は自己修正摂動法による解析結果である[23]。図中、 Δq は変位増分の大きさ、記号 $\surd$ は数値計算の出発点である(次節以降も同様)。実践の釣り合い経路は、Newton-Raphson法の解である。

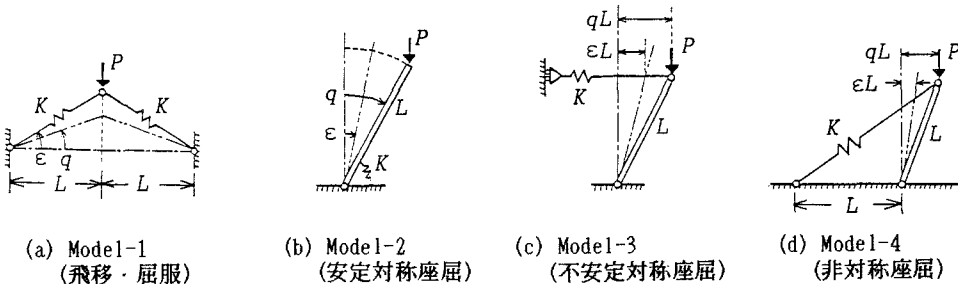


図-1 一自由度系の解析モデル

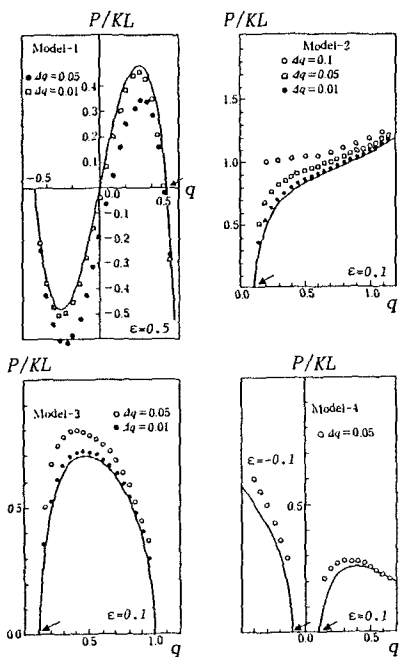


図-2 増分法による一自由度モデルの釣り合い経路

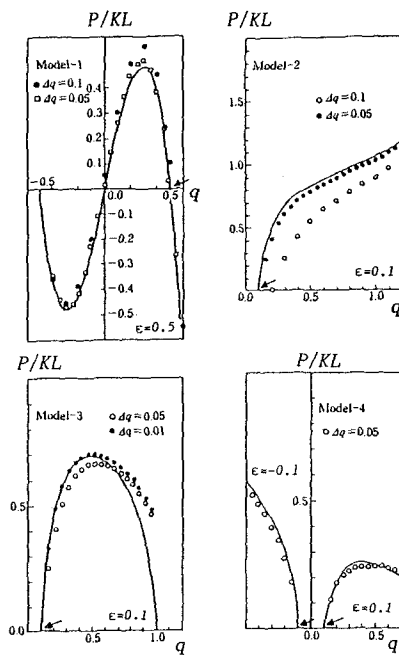


図-3 摂動法による一自由度モデルの釣り合い経路

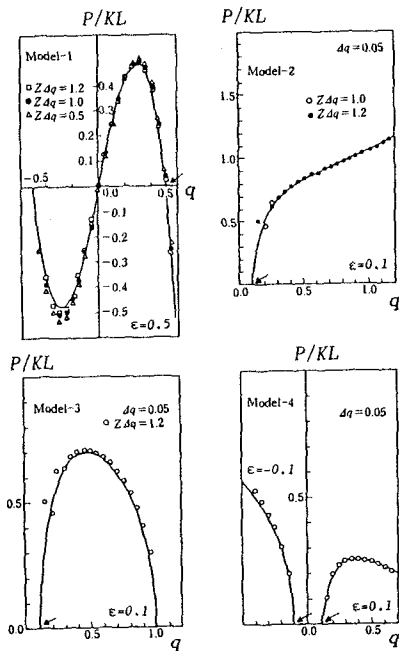


図-4 自己修正型増分法による一自由度モデルの釣り合い経路

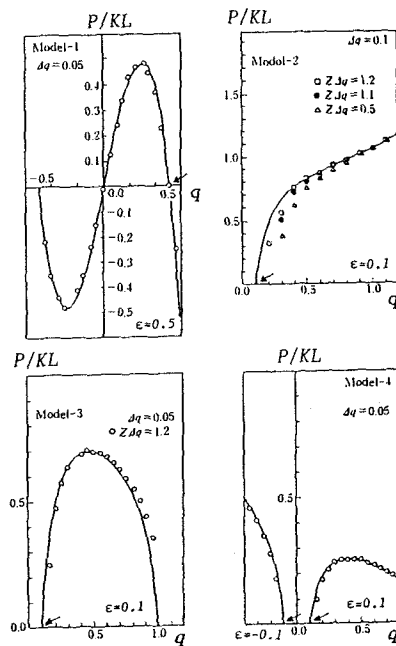


図-5 自己修正型摂動法による一自由度モデルの釣り合い経路

その結果、以下のことが言える：

①増分法や摂動法では非線形釣り合い径路全体特に荷重極値の極限点を正確に評価できないが、それらの自己修正型ではこの傾向はかなり改善される

②安定対称座屈のような極限点を持たない非線形構造問題では増分法や摂動法などを用いても離散化分割数さえ十分に大きくとれば厳密解に近い解が得られるが、不安定対称座屈や非対称座屈等に関与した極限点を持つ高度の非線形問題では誤差の修正の必要性は大きく、自己修正型の解法がより有利となる。

Model 1の飛移・屈服現象は、初期変位を有する不完全系の構造モデル(Model-3やModel-4)で極限点として一般に観察される。したがって以下の考察では、Model-1の誤差特性について言及しない。

2.2 自己修正摂動法 (SPM)

未知変位を $x_j (j=1, \dots, n)$ 、単一の荷重パラメータを λ とすれば、釣り合い式は誤差ベクトル $\{f\}$ の成分より次のように書ける：

$$f_i(x_j, \lambda) = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, n; n \text{ は自由度}) \quad (2)$$

ここに、釣り合い式は荷重パラメータ λ の線形関数で、未知変位 x_j の3次項まで含む。

SPMは前節2.1で示したように摂動パラメータ z を考え、いまこれを別のパラメータ Δt の増分である Δt にとれば基礎式は次式で表せる [9-11]：

$$\Delta f_i(x_j) + Z \Delta t f_i(x_j) = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

SPMは従来の摂動法のほかに修正項 $Z \Delta t f_i(x_j)$ が付加されていることが特徴である。このとき誤差ベクトル $\{f\}$ つまり残差ノルム $\|f\|$ が指数関数 $\exp(-Zt)$ に従って減少することが理論的に期待される (図-6) [24]。ただし、本論文では、式(3)の Δf_i は Δt の2次の摂動展開項までしか考慮していないので、残差ノルムは完全には零まで減少することはない。

いま、残差ノルム $\|f\|$ と無次元化残差ノルム $\|f^N\|$ を次式で定義する：

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k)^2} \quad \text{および} \quad \|f^N\| = \|f\| / G_{\max} \quad (4)$$

ここに、 $G_{\max} = \max(G_0, G_1, G_2, G_3)$ 、 $G_m = \sqrt{\sum_{k=1}^n (f_k^m)^2}$ ($m=0, 1, 2, 3$)

また、 f_k^m は k 番目の釣り合い式中の変位 x_j の m 次項 ($m=0, 1, 2, 3$) である。 $G_{\max}$ は釣り合い式中の f_k^m の数値オーダーを調整するために導入される。たとえば、釣り合い式中で数値の大きなオーダーの項から同じように大きなオーダーの項を差し引くとき一般に大きなオーダーの数値誤差を生じるため、規準化が必要となるからである。

ここでは、構造系の釣り合い径路を追跡するとき、次のような手法を用いた：圧縮荷重が零 ($\lambda=0$) の無載荷状態から出発し、摂動パラメータ z を荷重増分 $\Delta \lambda$ にとる「荷重増分制御」に基づき、変位増分 $\Delta x_j (j=1, \dots, n)$ を求める。そして系の非線形が高くなるにつれて釣り合い径路の勾配 (荷重増分/変位増分) の低下が顕著になる。この勾配がある程度に低下すると「変位増分制御」へ移行する。この制御方式は、摂動パラメータ z をある規定された1つの変位増分 Δx_α にとり、残りの変位増分 $\Delta x_j (j=1, \dots, n; j \neq \alpha)$ と荷重増分 $\Delta \lambda$ を求めるものである。また、このとき摂動パラメータ z として弧長 Δs をとる制御方式も適宜使用する。こうした制御方式の変更により、釣り合い径路中の極限点を含む一般の非線形解析が可能となる。この増分制御方式

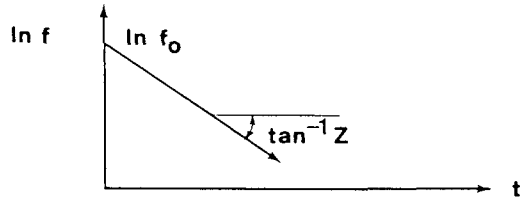


図-6 自己修正型摂動法における指数関数的な誤差減少

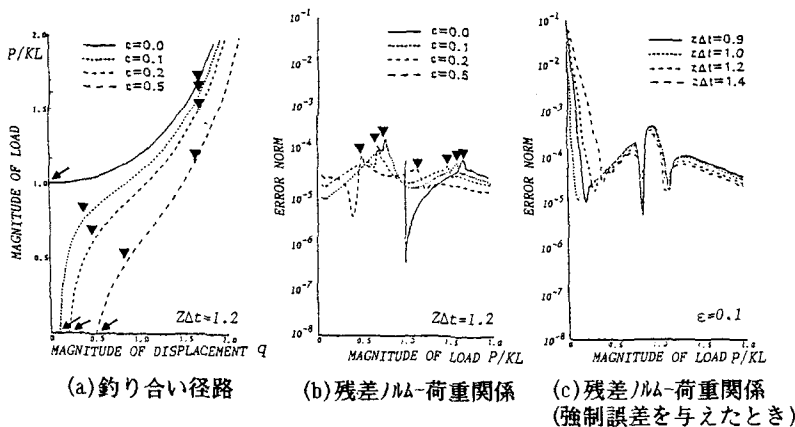


図-7 解析誤差特性(安定対称座屈、一自由度、SPM)

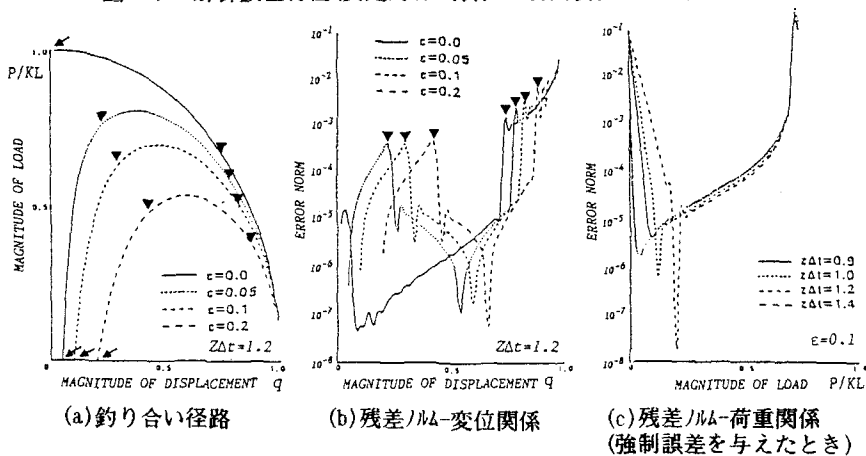


図-8 解析誤差特性(不安定対称座屈、一自由度、SPM)

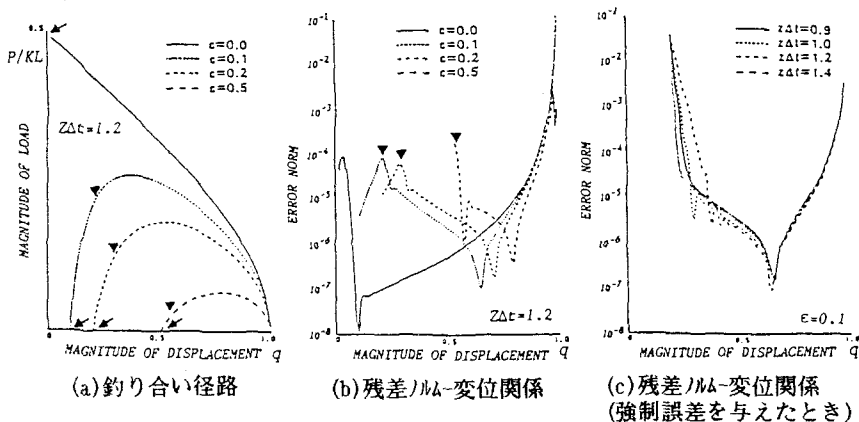


図-9 解析誤差特性(非対称座屈、一自由度、SPM)

の変更した位置は、以下の図中では記号▼で示す。ただし、初期変位を持たない $\varepsilon = 0$ (完全系)では「変位増分制御」方式から解析を始めた。なお、以下では構造モデルに作用する圧縮荷重はその最小の座屈荷重で無次元化し、対応する変位成分は柱のスパン長しで無次元化している。

3. SPMによる一自由度系の解析誤差特性

3.1 安定対称座屈モデル(Model-2)

図-7 (a)は図-1 (b)のモデルに対して初期回転角 ε を有する剛体棒の回転角(変位)と圧縮荷重の関係つまり釣り合い径路を示す。 ε は0(完全系)から0.5まで変動させている。この場合 $\|f\| = \|f_1\|$ である。

図-7 (b)はこのモデルの解析の際の残差 μ と圧縮荷重の関係を各 ε の値に対してプロットしたものである。ただし、 $Z \Delta t = 1.2$ としている。図-7 (a)の釣り合い径路の曲率の大きいところつまり非線形性の著しいところでは残差 μ が増大する。釣り合い径路のある程度の勾配低下が認められれば制御の方式を荷重制御より変位制御に変更した。その際確かに残差 μ は急激に減少しこの制御方式の変更は効果的であるといえる。そしてその後徐々にではあるが残差 μ は増大して、ある上限値に収束する傾向に見える。

図-7 (c)は $\varepsilon = 0.1$ のモデルについて当初に大きな残差を意図的に与え、残差 μ が圧縮荷重の大きさに対しどのように減少するかを調べたものであり、 $Z \Delta t$ の値を0.9から1.4まで変化させてプロットしたものである。これより次のようなことがわかる。ある残差 μ の限界($\approx 10^{-5}$)までは指数関数的に減少するがそれ以下にはならず、逆に増加の傾向を見せる。このように理論どおりに残差 μ が減少しないのは摂動解が2次で打ち切っているのが主な原因であり、この場合増分幅を必要に応じて適宜小さくするか、3次以上の摂動解を求めるなどの対策が必要である。なお、 $Z \Delta t = 1$ のとき残差 μ は急激に減少する。

3.2 不安定対称座屈モデル(Model-3)

図-8 (a)は図-1 (c)のモデルの釣り合い径路を示す。初期変位 ε を0(完全系)から0.2まで変動させている。ここに、残差 μ $\|f\| = \|f_1\|$ である。

図-8 (b)はこのモデルの解析の際の残差 μ と変位の関係を各 ε の値に対してプロットしたものである。ただし、 $Z \Delta t = 1.2$ としている。この場合にも増分制御方式を変更し残差 μ の増大を抑えているが、荷重あるいは変位の増大と共に残差 μ も増大する傾向にあり、誤差管理が必要となる。

図-8 (c)は $\varepsilon = 0.1$ のモデルについて当初に大きな残差を意図的に与え、残差 μ が圧縮荷重の大きさに対しどのように減少するかを調べたものであり、 $Z \Delta t$ の値を0.9から1.4まで変えてプロットしたものである。前節の安定対称座屈モデルと同様の誤差特性が見られる。なお、 $Z \Delta t = 1$ にとれば残差 μ を急激に減少するが、長期的・大域的には $Z \Delta t = 1.2$ の方が望ましいことがわかる。

3.3 非対称座屈モデル(Model-4)

図-9 (a)は図-1 (c)のモデルの釣り合い径路を示す。初期変位 ε を0(完全系)から0.5まで変動させている。ここに、残差 μ $\|f\| = \|f_1\|$ である。

図-9 (b)はこのモデルの解析の際の残差 μ と変位の関係を各 ε の値に対してプロットしたものである。ただし、 $Z \Delta t = 1.2$ としている。不安定対称座屈モデルと同様に残差 μ は増大する傾向にあり誤差管理が必要となる。

図-9 (c)は $\varepsilon = 0.1$ のモデルについて当初に大きな残差を意図的に与え、この残差が変位成分の大きさに対しどのように減少するかを調べたものであり、 $Z \Delta t$ の値を0.9から1.4まで変えてプロットしたものである。非線形域でも前節の2つのモデルと同様の誤差特性が見られる。

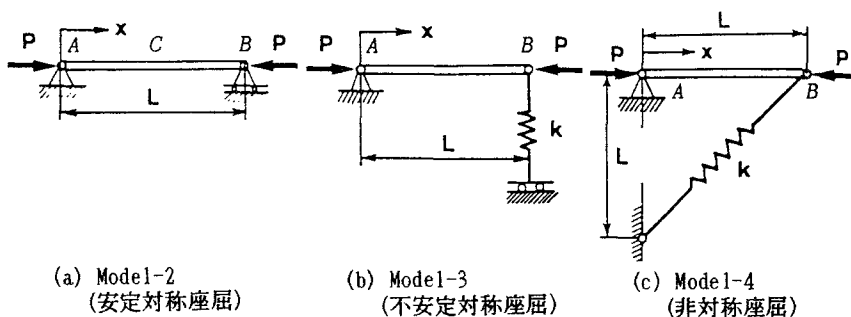


図-10 多自由度系の解析モデル

4. SPMによる多自由度系の解析誤差特性

4.1 安定対称座屈モデル(Model-2)

解析は有限要素法(1次元のはり要素)を用いて柱部分を両端ピン弾性はり柱として離散化して行った(図-10)。図-1(b)の柱部分を32分割したので、全自由度は65であった。図-11(a)は圧縮荷重 P/P_{cr} (P_{cr} は最低次の座屈荷重)と柱中央スパンの最大変位 q_c (柱中央のたわみ/スパン長 L)の関係、つまり釣り合い径路である。ここで、柱の初期たわみとしては座屈波形と同じものを採用しその大きさはスパン長 L の $1/1000$ とした。

図-11(b)は横軸に解析の増分弧長の弧に沿う長さ Δs をとり、縦軸には残差 $\|f\|$ と無次元化残差 $\|f^N\|$ をとっている。図-11(a)の釣り合い径路の非線形性の著しいところでは残差 $\|f\|$ が増大する。一自由度系の場合と同様に増分制御方式の変更により、多自由度系の場合にも残差 $\|f\|$ を効果的に減少させることができる。そしてその後徐々にではあるが残差 $\|f\|$ は増大して、ある上限値に収束する傾向にある。図-11(c)は圧縮荷重と残差 $\|f\|$ の関係を示す。また図-11(d)は中央スパンの最大変位と残差 $\|f\|$ の関係を示す。これらより、ある程度のたわみの大きさになれば残差 $\|f\|$ は収束する傾向を示す。このモデルでは、それほど厳密な誤差管理を行うことなく十分な精度で安定な釣り合い径路が求められる。

4.2 不安定対称座屈モデル(Model-3)

図-12は図-1(c)の柱部分を離散化した場合の前節4.1と同様の結果を示す。ここに、 q_B =(右端B点のたわみ/スパン長)である(図-10)。このモデルでは安定対称座屈と比べてたわみの増大と共に残差 $\|f\|$ も増大する傾向を示し誤差管理が重要となる。このことは前節3.2の一自由度系の場合も同様であった。

4.3 非対称座屈モデル(Model-4)

図-13は図-1(d)の柱部分を離散化した場合の結果を示す。不安定対称座屈モデルと同様に残差 $\|f\|$ は増大する傾向にあり誤差管理が必要となる。

4.4 誤差の減少特性

図-7(c)、8(c)、9(c)は、意図的な強制誤差に対する一自由度系の残差 $\|f\|$ の減少特性を示したものである。図-14は多自由度系のModel-4に対し同様の特性を調べたものである。ただし $Z\Delta t=1.2$ にとっている。この図によれば残差 $\|f\|$ は 10^{-2} から 10^{-8} のオーダーに至るまでの指数関数的に減少していることがわかる。図-15はまったく同じ関係を $Z\Delta t=1$ として行ったものである。確かに後者の方が残差 $\|f\|$ の減少速度が早い、全般的に $Z\Delta t=1.2$ の場合に比べて残差 $\|f\|$ の大きさが比較的大きい。よって、多自由度系の場合も、 $Z\Delta t=1$ とすれば残差 $\|f\|$ を急激に減少させることができるが、長期的・大域的には $Z\Delta t=1.2$ の方が望ましいことがわかる。

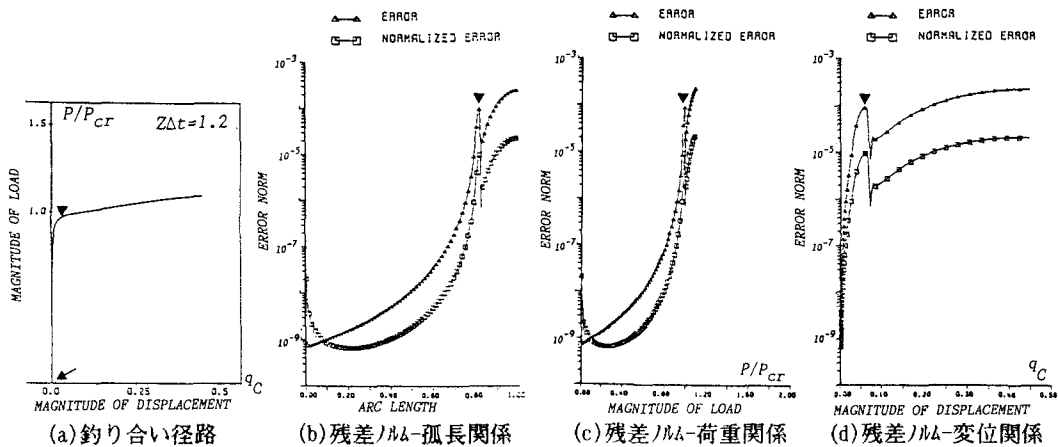


図-1 1 解析誤差特性(安定対称座屈、自由度=65、S P M) $Z \Delta t = 1.2$

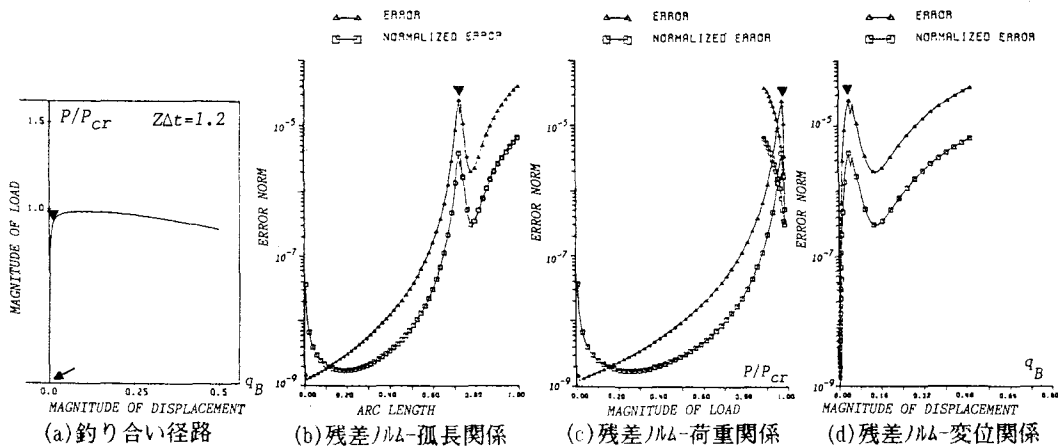


図-1 2 解析誤差特性(不安定対称座屈、自由度=65、S P M) $Z \Delta t = 1.2$

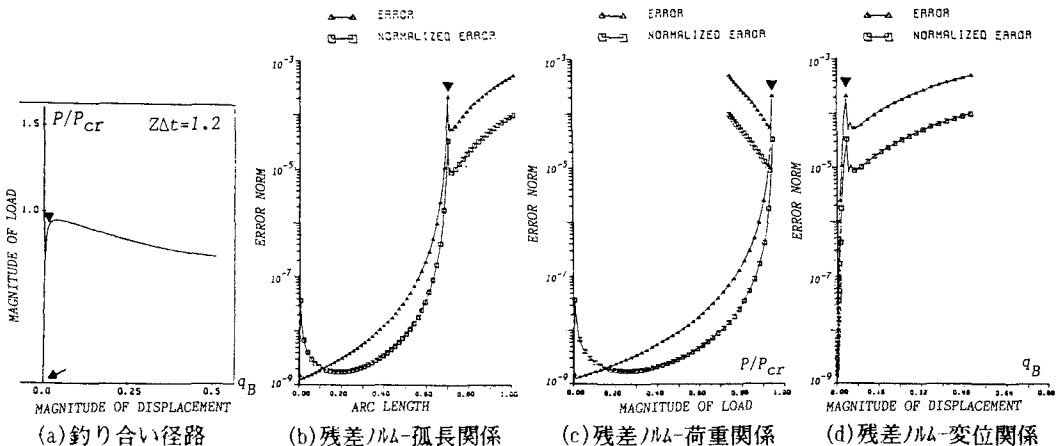


図-1 3 解析誤差特性(非対称座屈、自由度=65、S P M) $Z \Delta t = 1.2$

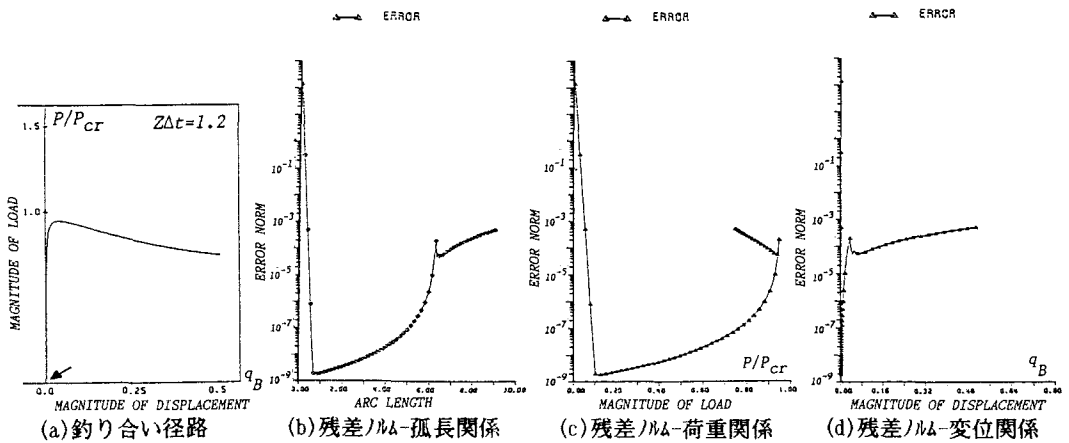


図-14 解析誤差特性(非対称座屈、自由度=65、SPM)
(強制誤差を与えたとき) $Z\Delta t=1.2$

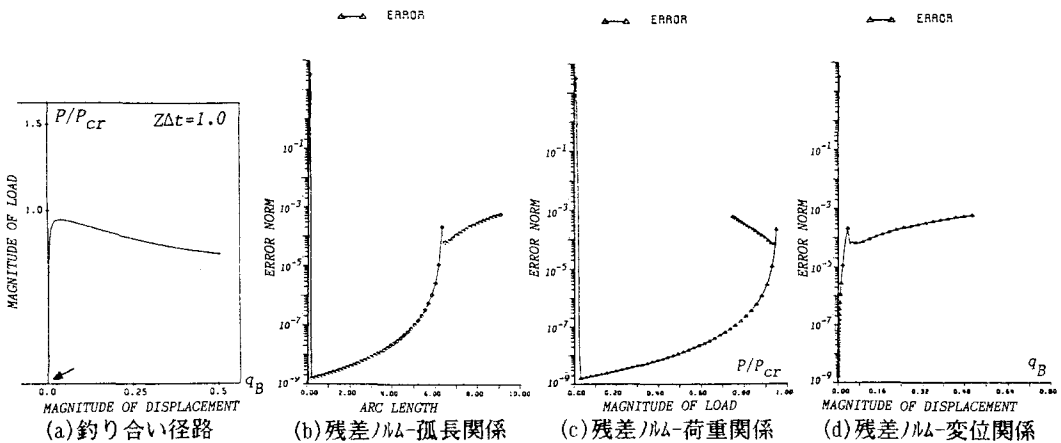


図-15 解析誤差特性(非対称座屈、自由度=65、SPM)
(強制誤差を与えたとき) $Z\Delta t=1.0$

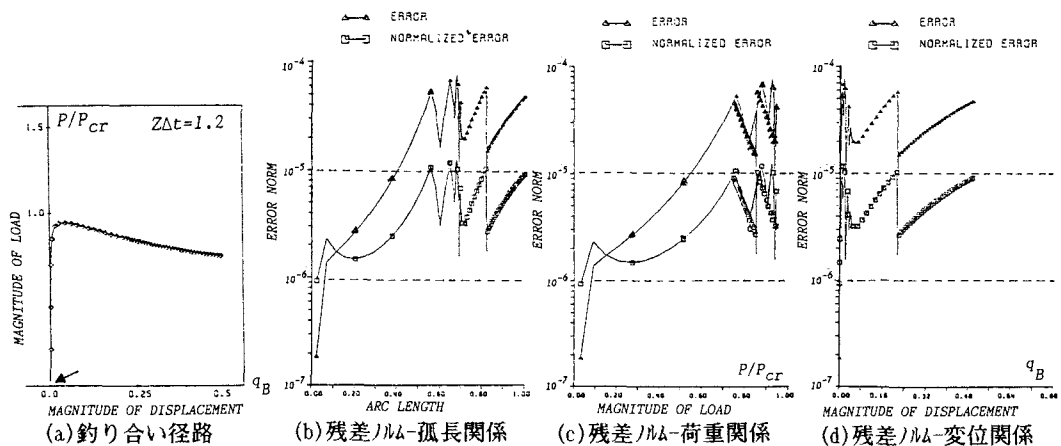


図-16 解析誤差特性(非対称座屈、自由度=65、SPM)
(弧長制御法) $Z\Delta t=1.2$

5. 残差ノルム制御法

ここでは以上の数値計算結果に基づき、残差ノルム $\|f\|$ あるいは無次元化残差ノルム $\|f^N\|$ を制御する方法を考える。このノルムがある程度以上大きければ精度上の問題があり、逆に余りにも小さく制御しようとすれば計算時間が膨大となり不経済となる。そこで、本研究では、残差ノルムをある一定の帯幅内に押え込む方法を考えて。まず、ある適当な増分弧長 Δs をとり解析を進める。このとき摂動パラメータを適宜弧長 Δs にとる。非線形性が高くなれば残差ノルムは通常増大していく。そのため残差ノルムがある規定された上限値に達すれば次の計算ステップより増分弧長を減少させてやる。そうすれば残差ノルムは激減する。しかしながら非線形性が高いとこの残差ノルムは再び増加する傾向にある。そこでまた残差ノルムがある規定された上限値に達すれば増分弧長を減少させてやる。こうした弧長減少のプロセスを繰り返すことにより、残差ノルムをある範囲内におさめることが可能になる。図-16は例として多自由度系のModel-4に対する残差ノルム制御の計算結果である。前述の図-13に対応している。残差ノルムとして無次元化残差ノルムをとり、これが 10^{-5} から 10^{-6} の範囲におさまるように増分弧長を制御した結果である。残差ノルムの激変が見られるが、ほぼ所定の精度内で釣り合い径路が求められる。本残差ノルム制御法の有用性が示された。

図-17と表-1はModel-4に対して、本SPM法とBrent法(京都大学大型計算機センター)の演算時間を比較したものである。自由度の増加と共に、SPM法の方がはるかに効率的になってくる。図-16に示すようにBrent法では1ステップの計算時間は自由度の3.11乗、一方SPM法では自由度の1.26乗に比例している。本法の有効性は明白である。ただし、Brent法は一般の非線形連立方程式のためのサブルーチンであり、必ずしも誤差特性の効率化を優先しているものではない。

6. あとがき

本研究は、非線形連立方程式の解法を残差ノルム、計算時間などの観点により比較検討し、非線形釣り合い径路と残差ノルムの挙動を数値的・視覚的に追跡することにより、静的非線形問題における連立方程式解法の選択に関する一つの指針を得た。主体となる解法は、広義のヒューズ法の一つである自己修正摂動法であり、3次の非線形連立方程式を効率的に解くための様々なポイントを研究した。また、多自由度系の非線形誤差挙動は、座屈モードに基づく「モード変換」により結局一自由度系のそれへと置換できることは、明らかである。

最後に本研究を行うにあたり、筑波大学電子情報工学系池辺八州彦教授には有益な示唆を頂いた。付して感謝する。

CPU Time = A × (D.O.F.)^B
BRENT: A = 0.19, B = 3.11
SPM: A = 0.75, B = 1.26

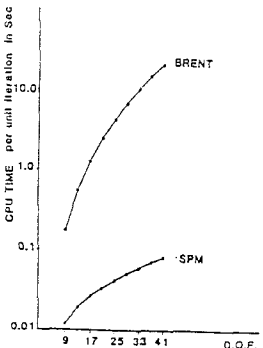


図-17 演算時間と自由度数 (SPM法とBrent法の比較)

表-1 SPM法とBrent法の比較

No. of Elements	D.O.F.	BRENT			SPM
		Iteration M	CPU Time per Step (msec)	CPU/M (msec)	
4	9	2	360	180	12
6	13	2	1110	555	19
8	17	2	2580	1290	27
10	21	2	4950	2475	33
12	25	2	8450	4225	42
14	29	2	13450	6725	51
16	33	2	20320	10160	61
18	37	2	29260	14630	71
20	41	2	40100	20050	82

7. 参考文献

- 1) O.C.Zienkiewicz, Non-linear material problems. Chapter 18, The Finite Element Method, 3rd Edition, 1977.
- 2) J.M.Ortega and W.C.Rheinboldt, Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press, 1970.
- 3) G.Dahlquist and A.Bjorck, Nonlinear equations. Chapter 6, Numerical Methods, Prentice-Hall, Inc., 1974.
- 4) P.G.Bergan and T.H.Soreide, A comparative study of different numerical solution techniques as applied to a nonlinear structural problem. Computer Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 2, 185-201, 1973.
- 5) G.Powell and J.Simmons, Improved iteration strategy for nonlinear structures. Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 17, 1455-1467, 1981.
- 6) P.G.Bergan, G.Horrigmoe, B.Krakeland and T.H.Soreide, Solution techniques for non-linear finite element problems. Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 12, 1677-1696, 1978.
- 7) P.G.Bergan, Solution algorithms for nonlinear structural problems. Computers & Structures, Vol. 12, 497-509, 1980.
- 8) A.K.Noor and J.M.Peters, Reduced basis techniques for nonlinear analysis of structures. AIAA J., Vol. 18, 455-462, 1980.
- 9) W.E.Haisler, J.A.Stricklin and F.J.Stebbins, Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural analysis. AIAA J., Vol. 10, 264-272, 1972.
- 10) J.A.Stricklin, W.E.Haisler and W.A.von Riesenmann, Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically nonlinear structural analysis. AIAA J., Vol. 11, 292-299, 1973.
- 11) W.E.Haisler and J.A.Stricklin, Displacement incrementation in non-linear structural analysis by the self-correcting method. Int. J. Num. Methods Eng., Vol. 11, 3-10, 1977.
- 12) E.Riks, An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. Int. J. Solids Structures, Vol. 15, 529-551, 1979.
- 13) M.A.Crisfield, A faster modified Newton-Raphson iteration. Computer Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 20, 267-278, 1979.
- 14) M.A.Crisfield, Accelerating and damping the modified Newton-Raphson method. Computers & Structures, Vol. 18, 395-407, 1984.
- 15) 岩田耕司・山田嘉昭, 有限要素法による構造物の非線形安定解析. 日本機械学会論文集(第1部), 第42巻, 第354号, 444-451, 1976.
- 16) W.C.Rheinboldt, Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems. Computers & Structures, Vol. 13, 103-113, 1981.
- 17) L.T.Watson and C.Y.Wang, A homotopy method applied to elastica problems. Int. J. Solids Structures, Vol. 17, 29-37, 1981.
- 18) 野邑敏行, 構造解析における非線形連立方程式の効率的解法に関する基礎的考察. 京都大学卒業論文, 1983.
- 19) S.Miyamoto and Y.Ikebe, Application of homotopy method to two point boundary value problems of first order differential equations. Technical Report, Institute of Information Sciences and Electronics, University of Tsukuba, ISE-TR-83-38, 1983.
- 20) 野邑敏行・丹羽義次・渡辺英一・勇秀憲, 構造問題における非線形連立方程式の誤差に関する基礎的考察. 土木学会年次学術講演会講演概要集, I-1, 1983.
- 21) 勇秀憲, マイコンによる構造非線形問題の数値解法に関する基礎的考察. 高知工業高等専門学校学術紀要, 第25号, 115-124, 1986.
- 22) J.M.T.Thompson and G.W.Hunt, A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, 1973.
- 23) 小松定夫編, 鋼構造物の補剛設計, 第2章(基礎理論), 72-86, 森北出版, 1982.
- 24) E.Watanabe, A Study on the Catastrophe and Static Load-Carrying Capacity of Structures. 京都大学学位論文, 1986.

(1987年10月16日受付)