

子午面内での回転を考慮した非軸対称荷重下の軸対称ジョイント要素

An axisymmetric joint element with rotation in a meridional plane under non axisymmetric loading

近田康夫*、田中恵一**、小堀為雄***

By Yasuo CHIKATA*, Keiichi TANAKA** and Tameo KOBORI***

In this paper, an advanced axisymmetric joint element model was presented. The new model can describe the rotation mode in a meridional plane, additionally to the debonding and two slip deformation modes of the original model which has been presented by two of the authors. The new model was incorporated into the semi-analytical finite element program, and some test case analyses were performed in order to check its constitutive relations, and to compare with the original model. The results suggested that the new model could not only describe additional mode but also show the solution convergence faster than the case with the original model, thus the presented model is one of the usefull advanced models.

1. まえがき

非軸対称荷重を受ける軸対称体の有限要素解析は、土木工学の分野では、杭―地盤系や柱―スラブ系などを対象とした場合にしばしば見られる。その場合、たとえば、杭と地盤の間に不連続面を想定してより現実に近いモデル化を行おうとすれば、ジョイント要素と呼ばれる接合要素を用いるのが一般的である。非軸対称荷重下の軸対称体の有限要素解析には、その形状特性を考慮して、フーリエ(Fourier)級数の直交性を利用した半解析的手法¹⁾が採用されることが多い。この手法を採用することにより、有限要素分割は円筒座標系における一子午面内での2次元分割のみでよく、記憶容量の節約と計算時間の短縮が計れる。一方、ジョイント要素は、Goodman らが提案したもの²⁾を母体として個々の問題に適した拡張モデルが提案されているが³⁾、上述の半解析的手法に適用可能な軸対称ジョイント要素はほとんど見当たらない。筆者らは、すでに、一つのモデルを提案しているが、ジョイント要素の挙動を表現する変形モードが最小限(法線方向の剝離と接線方向及び円周方向の滑動)であることから要素分割をかなり細かくしなければ、自然な挙動を表現できなかった⁴⁾。

本報告では、先に筆者らが提案した半解析的有限要素解析手法に適用可能な軸対称ジョイント要素を拡張して、子午面内における回転をさらに考慮することにより、より実際に近い不連続面の挙動を表現できる一

* 工修 金沢大学 助手 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野2-40-20)

** 金沢大学大学院生 工学研究科建設工学専攻 (同上)

*** 工博 金沢大学 教授 工学部土木建設工学科 (同上)

モデルを提案し、回転を考慮しないモデルを用いた場合の結果と比較を行い、その特性を検証するものである。

2. 要素剛性マトリックスの導出

ここでは、Goodman らによるジョイント要素の要素剛性マトリックスの導出過程⁵⁾に沿った形で子午面内での回転を考慮した軸対称ジョイント要素を導出する。

いま、円筒座標系 (ξ, η, θ) において、荷重および変位が $\theta = 0$ 子午面に関して対称であるとする、座標軸に対応した変位 (u, v, w) は次式のように有限フーリエ級数で表せる。

$$u = \sum_{m=0}^N u_m \cdot \cos m\theta, \quad v = \sum_{m=0}^N v_m \cdot \cos m\theta, \quad w = \sum_{m=0}^N w_m \cdot \sin m\theta \quad (1)$$

Fig.1 に示すような局部座標系において、ジョイント要素を構成する二つの回転面1-2 及び3-4 の相対的な位置関係から、要素中央における歪みの第 m 次調和成分を次式で定義する。なお、子午面内の回転角 ω の定義は二つの回転面の子午面内における回転角の差として与える。

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_m &= \begin{Bmatrix} \delta\xi \\ \delta\eta \\ \omega \\ \delta\theta \end{Bmatrix}_m \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} [C]_m \cdot \{u\}_m \\ &= [B]_m [C]_m \{u\}_m \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、

$$[C]_m = \text{diag} [c \ c \ s \ c \ c \ s \ c \ c \ s \ c \ c \ s], \quad c = \cos m\theta, \quad s = \sin m\theta \quad (3)$$

$$\{u\}_m = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \cdots \ u_4 \ v_4 \ w_4\}^T \quad (4)$$

ここに、 $\{\varepsilon\}_m$ はジョイント要素中心における歪ベクトルであり、 $[B]_m$ は接点変位-歪マトリックス、 $[C]_m$ は $\cos m\theta$, $\sin m\theta$ を成分とするマトリックス、そして $\{u\}_m$ は接点変位振幅ベクトルである。また、 $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\theta$, ω はそれぞれ、要素中心における歪と回転角であり、 u_i, v_i, w_i ($i=1\sim 4$) はそれぞれ接点 i の ξ, η, θ 方向の変位振幅、 L は子午面内におけるジョイント要素の長さである。

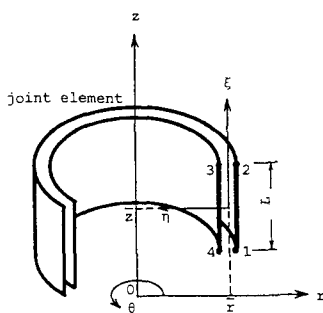


Fig.1 Axisymmetric joint element

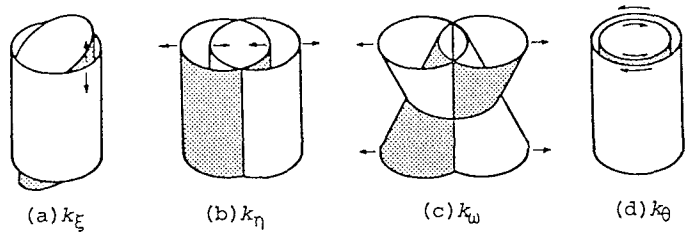


Fig.2 Deformation modes of axisymmetric joint model for Fourier order $m=1$

さらに、要素中心における応力成分は次式のようなである。

$$\{\sigma\}_m = \{\tau_{\xi} \ \sigma_{\eta} \ M \ \tau_{\theta}\}_m = [K] \{\varepsilon\}_m \quad (5)$$

ここに、 $[K]$ は、単位長さ当たりのジョイント剛性（接合剛性）であり、次式で与える。

$$[K] = \text{diag} [k_{\xi} \quad k_{\eta} \quad k_{\omega} \quad k_{\theta}], \quad k_{\omega} = L^2 \cdot k_{\eta} / 4 \quad (6)$$

上式で、注意すべき点は、 k_{ω} の定義が文献5)とは異なることである。すなわち、文献5)における定義式は $k_{\omega} = L^3 \cdot k_{\eta} / 4$ となっている。式(6)のように k_{ω} を定義することは、モーメントを、要素面全体に一樣に分布する分布モーメントとして定義することになる。この結果、文献5)のように、応力-節点力関係を新たに定義して要素剛性マトリックスを求めるのではなく、一般的な有限要素法の定式化に従って、

$$[K]_m = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} ([B]_m [C]_m)^T [K] [B]_n [C]_n \cdot r d\xi d\theta \quad (7)$$

なるマトリックス演算の表記が可能となる。式(7)の計算は、フーリエ級数の直交性から、 $m = n$ の場合のみ0以外の値をとるので、平衡方程式は調和成分ごとに分離される。第 m 次調和成分に関する式(6)の計算結果は次式のようになる。

$$[K]_m = C_m \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] & -[K_2] & -[K_1] \\ & [K_1] & -[K_1] & -[K_2] \\ \text{Sym.} & & [K_1] & [K_2] \\ & & & [K_1] \end{bmatrix} \quad (8)$$

ただし、

$$[K_1] = \text{diag} [k_{\xi} \quad 2k_{\eta} \quad k_{\theta}], \quad [K_2] = \text{diag} [k_{\xi} \quad 0 \quad k_{\theta}] \quad (9)$$

$$C_m = \pi \bar{r} L / 2 \quad (m=0), \quad C_m = \pi \bar{r} L / 4 \quad (m>0), \quad \bar{r} = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) / 4 \quad (10)$$

式(8)より、回転を考慮しない場合と同様に、1次以上の調和成分における要素剛性マトリックスはすべて等しくなる。ちなみに、回転を考慮しない場合の要素剛性マトリックスでは、

$$[K_1] = [K_2] = \text{diag} [k_{\xi} \quad k_{\eta} \quad k_{\theta}] \quad (11)$$

である。

第1次調和成分に対応した、ジョイント要素の変形モードを図示すれば、Fig.2 のようである。Fig.2(b)は剝離モード、(a)、(d)は滑動モード、そして(c)が回転モードである。

解析手順は以下のように要約できる。

- (1) 0次から M 次までの分離された $M+1$ 組の平衡方程式を解き、 θ の値を固定して、得られた解を式(1)と同様にしてフーリエ合成することにより、一つの子午面における変位、応力などの増分を求めることができる。異なる θ の値に対しても同様にして、円周方向に $M+1$ の断面に関して求め、前段階での値に加える。こうして3次元解が得られる。
- (2) 応力を求めた各断面毎にジョイント要素の剝離、滑動の判定を行い、解放すべき応力に対応した節点力を求める。この結果、不平衡節点力の円周方向分布が得られる。剝離、滑動の判定には、Mohr-Coulomb型の構成条件を与えるのが一般的であるが、要素の法線方向に初期引っ張り強度をもたせるような構成関係を与えることも可能である。
- (3) 不平衡節点力の円周方向分布をフーリエ分解し、0次から M 次までの有限フーリエ級数で表す。
- (4) いくつかの θ 断面(子午面)において収束判定を行う(一般には、応力などを算出した $M+1$ の断面で収束判定を行う)。ここでは、収束判定に次式を用いている。

$$\Psi^r / \Psi_f < \varepsilon \quad (12)$$

ただし、 Ψ^r は r 回目までの繰返し計算後の節点力ベクトルの2乗ノルム、 Ψ_f は作用力ベクトルの2乗ノルムであり、 ε は収束判定値である。

(5) 収束条件が満足されるまで(1)~(4)のステップを繰り返す。

要素は、半解析的手法を用いる場合、円周方向に一定な物性値をもつことが要求されるので、一般のジョイント要素を用いた場合のように、剝離が生じた後に接合剛性を0とすることはできず、初期剛性を用いた応力分配法(Stress transfer method)を採用することになる。

3. 解析例

1) ジョイント要素の挙動の確認

ジョイント要素に与える構成関係は、Mohr-Coulomb型のno-tension特性を与える。与えた構成関係を満足した挙動をするかどうかを、Fig.3 に示す単純な解析モデルに対して、それぞれの変位方向に強制変位を徐々に与え、Fig.4 の応力-歪み関係を得たく 強制変位解析であるので、モデルには依存しないでFig.4 が求まる)。すなわち、外側のソリッド要素に η 方向の強制変位を徐々に与えてゆけば、Fig.4 (a)が得られる。同様に、 ξ 方向、 θ 方向に関するFig.4(b)が得られる。これらは、与えた構成関係を満足している。

残差応力の解放には、応力伝達法を用いているので、応力-歪み関係は必ず満足されることから、問題は残差応力が解放された状態に達するまでに必要とされる繰返し計算の回数がどの程度であるか、ということにある。Fig.4 を得る際には、強制変位を与えたため、いずれも 3~5 回の繰返し計算で解は収束した。しかし、一般的には、ジョイントの変形にFig.2 の4つのモードが混在することに加えて、ジョイント剛性、メッシュ分割、荷重の載荷方法などに依存して解の収束状況は変化するので、対象とするモデルごとのケース・バイ・ケースと考えるべきであろう。

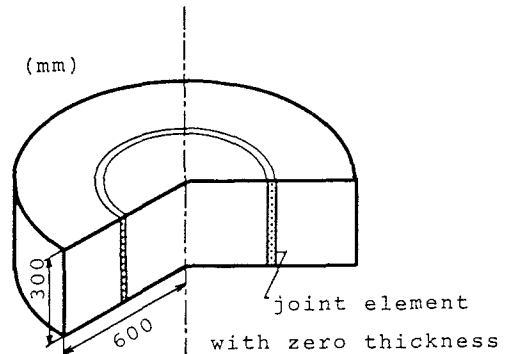
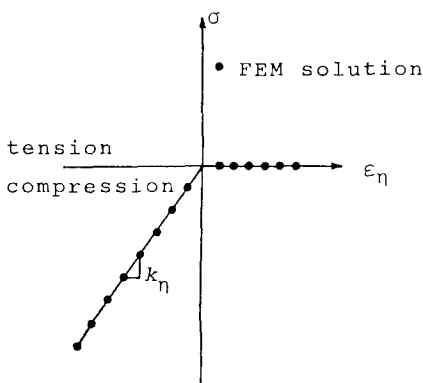
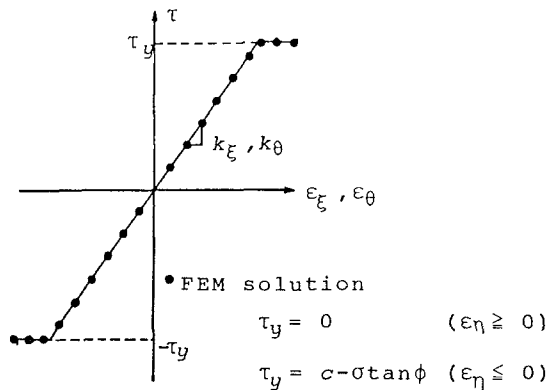


Fig.3 Model for analysis of the joint characteristics (constitutive relations)



(a) Normal direction



(b) Tangential and circumferential direction

Fig.4 Constitutive relations of the joint element

2) 柱—スラブ系の解析

実際の解析例として、Fig.5 に示すような柱—スラブ系において、スラブに、半径方向には一様分布、円周方向には余弦分布をする鉛直荷重が加えられている場合を考える。

$\theta=0, \pi$ の二つの子午面に関して、 σ_r , τ_{rz} の分布をFig.6 に示す。Fig.6 には、比較のために、ジョイント要素を用いない場合（線形解）、回転を考慮しないジョイント要素を用いた場合、そしてここで提案している回転を考慮したジョイント要素を用いた場合の結果をそれぞれ示してある。また、ジョイント要素の剝離、滑動状態も合わせて示している。応力は、いずれも、柱およびスラブのソリッド要素のジョイント要素に近いガウス積分点における値を示している。 σ_r , τ_{rz} いずれの図をみても、回転を考慮したモデル（図中の(a)）の方がスラブ下面近傍における応力の集中する様子がよく表現されている。この解析では、滑動に対する抵抗はあまり大きくないようにジョイント剛性を与えているので、(b) の回転を考慮しない場合のように、スラブ下面

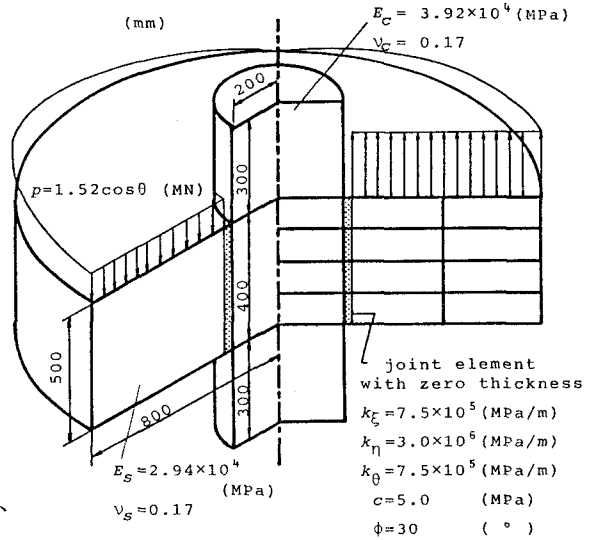


Fig.5 Column-slab model for test analysis

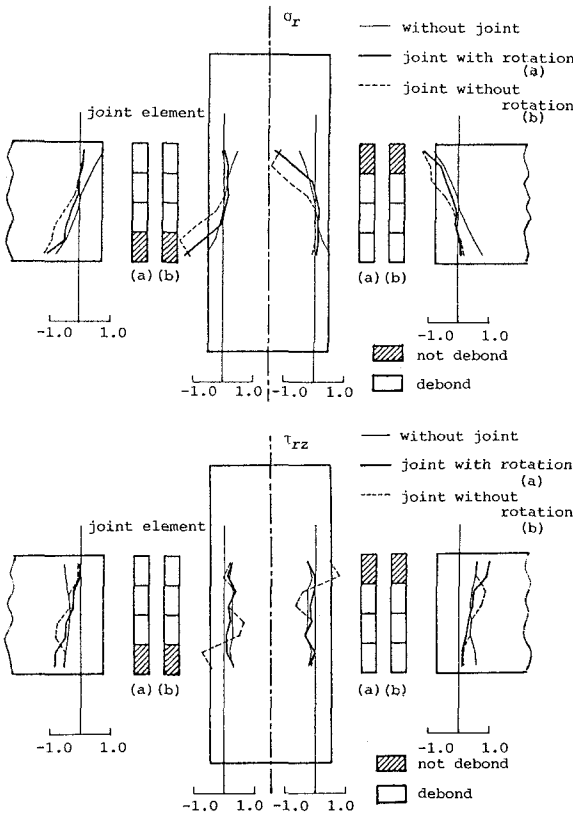


Fig.6 Stress profiles in column or slab and joint states

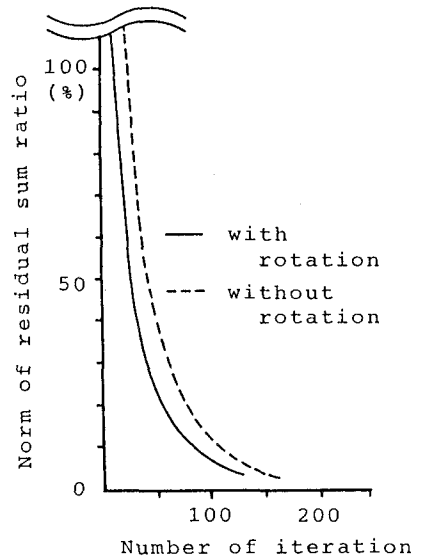


Fig.7 Convergence path

で巻き込みが生じているような分布は不自然であり、スラブ下面近傍のジョイント剛性の不足を示している。このように、剝離、滑動の発生状況が同じであるにもかかわらず、回転を考慮したモデルとしないモデルをそれぞれ用いた結果がかなり異なっているのは、要素の分割の細かさやジョイント剛性の大きさなどに依存しているだけでなく（数種類の要素分割を行って確認している）、子午面内における回転の考慮の有無によるジョイント要素の挙動の相違によるものと考えられる。

Fig.7 には、Fig.5 のモデルにおいて、回転を考慮した場合としない場合における、解の収束過程の一例を示してある。すなわち、最初の応力解放では、大きなノルム比（式(12)の値が100%以上の場合もある）となり、繰り返し計算が進むにつれてノルム比が減少してゆく様子が示されている。等しいジョイント剛性を与えた場合、この解析例のモデルでは、明らかに回転を考慮した場合の方がより速く収束がえられる。一般的に、収束の状況は、モデルによって異なるべきであるが、回転を考慮した場合の方がより速く収束する傾向は変わらないことが他の2, 3のモデルに対して行った計算結果からも推察できる。

4. 結論

従来の軸対称ジョイント要素に子午面内での回転モードを加えたモデルを提案し、回転を考慮しないモデルを用いた場合との数値計算結果を比較し、その特性をある程度明らかにすることができた。

数値計算結果の範囲においてはであるが、ここで提案しているジョイント要素は、単に自由度が一つ増すことにより、より現実に近い物理的挙動が表現できるだけでなく、解の収束に関して従来のモデルよりもすぐれていることが示されたといえよう。なお、解の収束に関する、文献6)の考察はここで提案しているジョイント要素にもそのまま適用できるものであることを付記する。

ジョイント要素の定式化としては、ここで示したものの他に、互いに向かい合う節点对毎に相対変位による剝離、滑動を検討するもの、要素内の幾つかの点（たとえば、ガウス積分点）において、応力等を評価するもの等が考えられ、より実用性の高いモデルへの発展のために、それらに関しても現在検討中である。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C.; The Finite Element Method, McGraw-Hill, London, 1977.
- 2) Goodman, R.E., Taylor, R.L. and Brekke, T.L.; A model for mechanics of joint rock, Proc. of ASCE, Vol.94, SM3, pp.637-659, 1968.
- 3) Herze, R.E. Barbour, T.G.; New models for rock joints and interfaces, Proc. of ASCE, Vol.108, GT5, pp.757-776, 1982.
- 4) Kobori, T. and Chikata, Y.; An axisymmetric joint element under non-axisymmetric loadings in semi-analytical finite element method, Proc. of JSCE, No.368(1-5), pp.57-64, 1986.
- 5) Goodman, R.E. (赤井, 川本, 大西 共訳); 不連続性岩盤の地質工学, pp.236-284, 森北出版, 1978
- 6) 小堀為雄、近田康夫; 非軸対称荷重下の軸対称JOINT 要素に関する若干の考察、構造工学論文集 Vol.32A pp.335-342, 1986.

(1987年10月16日受付)