

多層円柱の固有応力

INHERENT STRESS OF MULTI-LAYER CYLINDER

川上 洵*, 徳田 弘**, 加賀谷 誠***, 高橋 功****

By Makoto KAWAKAMI, Hiroshi TOKUDA, Makoto KAGAYA, Isao TAKAHASHI

Multi-layer solid and hollow cylinders are constituted of the different materials and the cylinders do not behave like homogeneous ones. It is very important to study thermal stress and shrinkage stress of the multi-layer cylinder to use as structural members. Inherent stress of the multi-layer cylinder was analytically investigated by the view point of theory of elasticity. On the basis of the obtained results, thermal stress of the partially Polymer-Impregnated Concrete was evaluated from the view point of mechanical safety, and chemical prestress of reinforced concrete pipe using expansive concrete to increase the cracking strength of the pipes were discussed.

1. まえがき

近年、ポリマーコンクリート、ガラス繊維そして炭素繊維等の比較的新しい材料と伝統的建設主材料であるセメントコンクリートとを複合化させた材料や合成構造が開発され、多く用いられるようになってきた。この複合材料および合成構造は、異種材料を適切に組み合わせることにより力学的な性質の向上、耐久性や耐食性の改善を計り、総合的にみて単一の材料を用いるよりさらに経済的な設計となることを目的としたものである。

セメントコンクリート円柱の外壁や管の内壁を、ポリマーコンクリートやプラスチック等で被覆した部材や鋼管コンクリート複合部材などは合成構造であり、多層円柱としてモデル化できる。この多層円柱としての構造が季節はじめ温度の変化を受けるとき、各材料の熱膨張係数等の物性値が異なるために熱応力が生じ、更にコンクリートの硬化収縮、乾燥収縮による収縮応力などの固有応力が生じる。この固有応力は、外的荷重による応力¹⁾と重ね合わせて評価されるので、外圧荷重に対し安全と判断された複合管においても、熱応力や収縮応力によりクラックや剝離が生じ、管の破損や破壊の原因となることがある。したがって、固有応力を考慮にいれる事は、設計上非常に重要である。これら多層円柱の固有応力は、有限要素法や境界要素法な

※	工博	秋田大学助教授	鉱山学部土木工学科	(〒 010 秋田市手形学園町 1-1)
※※	工博	秋田大学教授	鉱山学部土木工学科	(〒 010 秋田市手形学園町 1-1)
※※※	工修	秋田大学助手	鉱山学部土木工学科	(〒 010 秋田市手形学園町 1-1)
※※※※		秋田大学大学院	鉱山学部土木工学科	(〒 010 秋田市手形学園町 1-1)

ど数値解析によっても得られるが、最も重要な層境界における応力が必ずしも正確に得られない。

本研究は、最初に中実及び中空多層円柱の固有応力を2次元弾性論における軸対称問題として解析を行った。この応力解析は多層円柱を構成している材料の物性値及び円柱の内・外径と層と層の境界までの径を入力値とするため、容易に計算することができる。次に、解析を検証及び検討する目的で層と層の付着が完全である部分ポリマー含浸コンクリート円柱の一定温度上昇に対する熱応力の定量的な評価を行った。さらに、この固有応力を有効に利用し、ヒューム管のひびわれ強度を増加させる膨張コンクリートを用いた鉄筋コンクリート管のケミカルプレストスの分布及びひびわれ強度を検討するための解析をも行ったものである。

2. 応力解析²⁾

2. 1. つりあい式

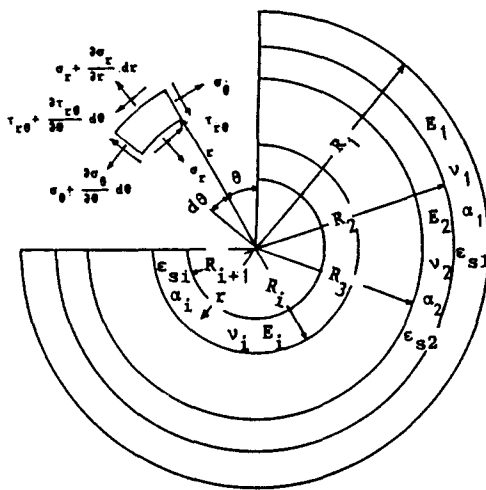
各層の物性値が異なる多層円柱において、任意層内の微小要素に作用する応力を図-1に示す。円柱の直径に比べその長さが大きい場合では、平面ひずみ状態と考えられる。また、温度変化や収縮が θ に無関係のとき軸対称問題となり $\tau_{r\theta} = 0$ である。ここで、つりあい式は次式で表される。

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

2. 2. 応力-ひずみ関係式

平面ひずみ状態に対する応力-ひずみ関係式は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ (1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta \} \\ &\quad - \frac{E}{1-2\nu} (\alpha T - \varepsilon_s) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ (1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r \} \\ &\quad - \frac{E}{1-2\nu} (\alpha T - \varepsilon_s) \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r) \} \\ &\quad - \frac{E}{1-2\nu} (\alpha T - \varepsilon_s) \end{aligned} \right\} \quad \text{(2)}$$



ここで、 α ：熱膨張係数， T ：温度差， ε_s ：収縮ひずみ

図-1 多層円柱の微小要素

2. 3. ひずみと変位の関係式

半径方向の変位を u とするとき、ひずみと変位の関係式は式 (3)のとおりである。

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \text{----- (3)}$$

2. 4. 微分方程式および解

式(3)を式(2)へ代入すると、応力と変位の式は式 (4)で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right\} - \frac{E}{1-2\nu} (\alpha T - \varepsilon_s) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right\} - \frac{E}{1-2\nu} (\alpha T - \varepsilon_s) \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) \right\} - \frac{E}{1-2\nu} (\alpha T - \varepsilon_s) \end{aligned} \right\} (4)$$

式(4)を式(1)に代入することにより、変位に関する微分方程式(5)を得る。

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left(\alpha \frac{dT}{dr} - \frac{d\varepsilon_s}{dr} \right) \quad \text{-----} (5)$$

式(5)より変位が得られ、そして変位より応力、ひずみが求められる。図-1に示すような各層境界の半径が $R_1, R_2, \dots, R_{i+1}$ の同心円からなる i 層中空円柱を考える。任意の k 層において積分範囲は $R_{k+1} \leq r \leq R_k$ であり、 k 層内で T および ε_s が一定のとき、 $u, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k} \frac{\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}}{r} \left(\frac{r^2 - R_{k+1}^2}{2} \right) + C_{1k} r + \frac{C_{2k}}{r} - \frac{\nu_k C_3 r}{E_k} \\ \sigma_r &= \frac{E_k}{1+\nu_k} \left\{ - \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k} \frac{\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}}{r^2} \left(\frac{r^2 - R_{k+1}^2}{2} \right) + \frac{C_{1k}}{1-2\nu_k} - \frac{C_{2k}}{r^2} \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{E_k}{1+\nu_k} \left\{ - \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k} (\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}) + \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k} \frac{\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}}{r^2} \left(\frac{r^2 - R_{k+1}^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{1k}}{1-2\nu_k} + \frac{C_{2k}}{r^2} \right\} \\ \sigma_z &= - \frac{E_k}{1-\nu_k} (\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}) + \frac{2\nu_k E_k C_{1k}}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)} + C_3 \\ \varepsilon_r &= \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k} (\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}) - \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k} \frac{\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}}{r^2} \left(\frac{r^2 - R_{k+1}^2}{2} \right) + C_{1k} - \frac{C_{2k}}{r^2} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k} \frac{\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}}{r^2} \left(\frac{r^2 - R_{k+1}^2}{2} \right) + C_{1k} + \frac{C_{2k}}{r^2} \end{aligned} \right\} (6)$$

ここで、 C_3 は $\varepsilon_z = 0$ を保つための拘束応力であり、端面が自由端の場合は、 σ_z の合力が0となるように一定圧縮応力を加える。 i 層中空円柱の場合、全軸方向合力は次式となる。

$$\int_{R_{i+1}}^{R_i} \sigma_z 2\pi r dr = \sum_{k=1}^i \left\{ - \frac{E_k}{1-\nu_k} (\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}) + \frac{2\nu_k E_k C_{1k}}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)} + C_3 \right\} \pi (R_k^2 - R_{k+1}^2)$$

よって、全軸方向力をゼロにする C_3 の値は次式で与えられる。

$$C_3 = \frac{1}{(R_1^2 - R_{i+1}^2)} \sum_{k=1}^i \left\{ \frac{E_k}{1 - \nu_k} (\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}) - \frac{2 \nu_k E_k C_{1k}}{(1 + \nu_k)(1 - 2 \nu_k)} \right\} (R_k^2 - R_{k+1}^2)$$

以上より、式(6)の u 、 σ_z は式(7)となる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1 + \nu_k}{1 - \nu_k} \frac{\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}}{r} \left(\frac{r^2 - R_{k+1}^2}{2} \right) + C_{1k} r + \frac{C_{2k}}{r} - \frac{\nu_k r}{E_k} \frac{1}{(R_1^2 - R_{i+1}^2)} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^i \left\{ \frac{E_k}{1 - \nu_k} (\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}) - \frac{2 \nu_k E_k C_{1k}}{(1 + \nu_k)(1 - 2 \nu_k)} \right\} (R_k^2 - R_{k+1}^2) \\ \sigma_z &= - \frac{E_k}{1 - \nu_k} (\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}) + \frac{2 \nu_k E_k C_{1k}}{(1 + \nu_k)(1 - 2 \nu_k)} + \frac{1}{(R_1^2 - R_{i+1}^2)} \sum_{k=1}^i \left\{ \frac{E_k}{1 - \nu_k} \right. \\ &\quad \times \left. (\alpha_k T_k - \varepsilon_{sk}) - \frac{2 \nu_k E_k C_{1k}}{(1 + \nu_k)(1 - 2 \nu_k)} \right\} (R_k^2 - R_{k+1}^2) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

一方、中実円柱の場合、 $R_{i+1} = 0$ として同様に解ける。

2. 5. 境界条件

i 層中実円柱の変位および応力に関する境界条件は、次のとおりである。

- (I) $r = R_1$: $\sigma_r = 0$
- (II) $r = R_k$: $u_{k-1} = u_k$, $\sigma_{rk-1} = \sigma_{rk}$
- (III) $r = 0$: $u = 0$

積分定数 C_1, C_2 は、上の境界条件から得られる連立方程式を解くことにより得られる。

一方、 n 層中空円柱の場合には、境界条件の(I)および(II)は上記中実円柱の場合と同じである。そして、(III)の条件にかえて

- (III) $r = R_{i+1}$: $\sigma_r = 0$

とする。

2. 6. 応用

応力解析によって得られた結果は、異種材料を同心円状に組み合わせた中実および中空円柱の固有応力の算定に適用される。

例えば、鋼管にコンクリートをライニングした管、円形断面の鉄筋コンクリート柱をポリマーコンクリートで被覆する場合はじめ、FRPとコンクリート、SFRCとコンクリートそしてGRCとコンクリートより構成される管などの構造も本解析のような固有応力を評価しておく必要がある。

以下では具体例として、部分ポリマー含浸コンクリートの温度応力を上記解析に従い求めた。さらに、固有応力を積極的に利用した膨張コンクリートを用いた鉄筋コンクリート管を対象としてケミカルプレストレスに関する解析を行った。

3. 部分ポリマー含浸コンクリート円柱

部分ポリマー含浸コンクリート円柱は、基材コンクリート円柱の半径方向にモノマーを含浸し、加熱重合を行うため、断面は同心円状になり、また含浸部と未含浸部との境界の付着が完全と考えてもよい。このことから、解析の条件に一致するので、 $\phi 100 \times 200 \text{mm}$ の基材コンクリート円柱に 1cm, 2cm, 3cm を目標に含浸を行った供試体について解析し、固有応力を求めた。この部分ポリマー含浸コンクリート供試体の物性値はすでに発表したとおりである¹⁾。

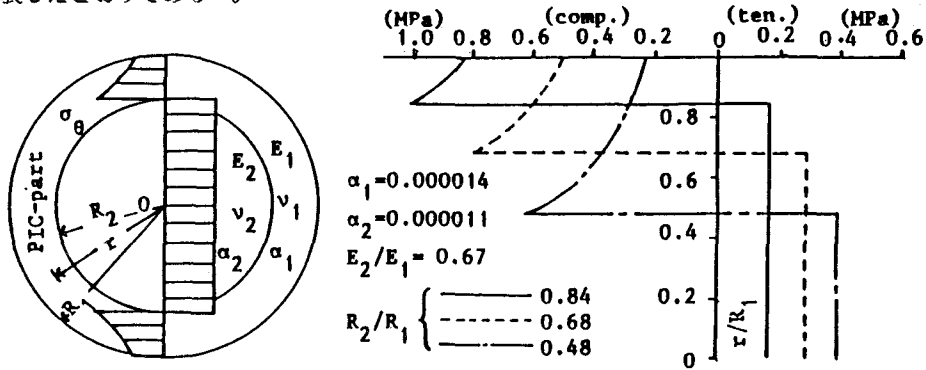


図-2 部分ポリマー含浸コンクリートの熱応力

基材コンクリートおよびポリマー含浸コンクリートの熱膨張係数が、それぞれ $11.3 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$, $14.4 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$ のとき、 10°C の温度上昇に対する円周方向の応力は、図-2 で示される。応力分布は、熱膨張係数の大きいポリマー含浸コンクリートに圧縮応力が生じ、熱膨張係数の小さい基材コンクリートに引張応力が生じる。また、外層のポリマー含浸コンクリートの圧縮応力が層境界で最大を示し、内層の基材コンクリートの引張応力は、円の中心から層境界まで一定の値を示す。これらの理由は両層間の付着が完全であり、互いの層が拘束し合うためである。次に、内層、外層の層厚が変化した場合の応力分布は、内層あるいは外層のどちらかが厚くなるにしたがいその層に生じる応力は減少し、薄くなった層に生じる応力が増加する。これは、外力が作用していない状態では、圧縮力と引張力はつり合うため、薄くなった層の応力分担が増し、厚くなった層の応力分担が減少することで説明される。

以上より、部分ポリマー含浸コンクリートは熱膨張係数の違いから温度変化により、層と層の境界に最大応力が生じることがわかる。しかし、コンクリートのポリマー含浸率は3~8%であり³⁾ セメントコンクリートとの熱膨張係数の差は小さく、 10°C の温度上昇でも生じる熱応力は1cm含浸でさえ約1.0MPaである。これに対しポリマー含浸コンクリートの圧縮強度及び引張強度は4倍程度の上昇が期待されるので¹⁾ 固有応力を考慮に入れても、部分ポリマー含浸コンクリートは非常に力学的に優れた複合材料である事がわかる。

4. 膨張コンクリート管のケミカルプレストレス

固有応力を有効的に利用した膨張コンクリート管のケミカルプレストレスは、コンクリートの膨張ひずみならせん鉄筋で拘束することにより管内部に生じる圧縮応力である。従来、ケミカルプレストレスは拘束鉄筋の膨張ひずみと鉄筋の弾性係数および鉄筋比から式 (8) のように求めている⁴⁾。

$$\sigma_{cp} = p \varepsilon_s E_s \quad \text{-----} \quad (8)$$

σ_{cp} : ケミカルプレストレス, p : 鉄筋比 (A_s/A_c)

ε_s : 拘束鉄筋の膨張ひずみ, E_s : 鉄筋の弾性係数

一方、管の外圧試験時に加える荷重において、最初にひびわれが生じるのは管低部内壁である。この部分における円周方向の $\sigma_{\theta\theta}$ は、管に曲率があるため一定ではない。そこで、2次元弾性論を用いて、より厳密な

$\sigma_{\theta\theta}$ を明らかにし、ひびわれ強度との関係を検討した。

解析で示した収縮ひずみ ε_s をコンクリートの膨張ひずみ ε_r と考える。このコンクリートの膨張ひずみは、鉄筋の拘束膨張ひずみ ε_s と鉄筋比および弾性係数比から力の平衡より式(9)のように示される。

$$\varepsilon_f = (1 + np) \varepsilon_s \quad \text{-----} \quad (9)$$

ε_f : 膨張ひずみ, n : 弾性係数比 (E_s/E_c)

膨張コンクリートの膨張ひずみ ε_r は拘束程度により変化するので鉄筋比を変化させたときの拘束膨張ひずみをJIS A 6202のA法に従い測定した。その結果を図-3に示す。図中のE, Cはそれぞれ単位膨張材量, 単位セメント量である。式(9)と図-3より各鉄筋比に対する膨張ひずみが求められ式(6)よりケミカルプレストレスが得られる。

図-4(a)に示すような $\phi 1000\text{mm}$ 管の $\sigma_{\theta\theta}$ を求めるにあたり、鉄筋は、らせん鉄筋のピッチおよび鉄筋径より十分密に配筋されていると考え、解析においては管の鉄筋比と等しい薄い銅板層に置き換えるモデル化を行った。得られた $\sigma_{\theta\theta}$ を図-4(b)に示す。 $\sigma_{\theta\theta}$ の分布は、管構造の場合、コンクリートが外側方向へ膨張するのを鉄筋が拘束することとなり管内壁で最大を示し、内壁から外壁へと徐々に減少する。

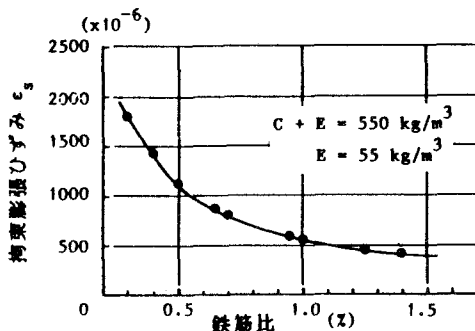
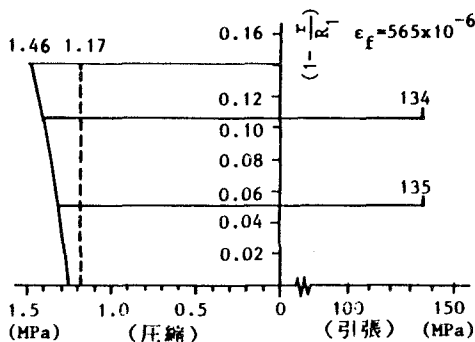
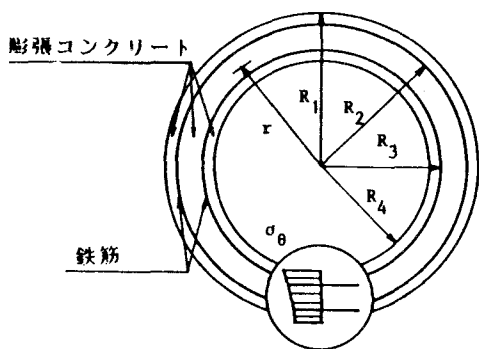


図-3 鉄筋比と拘束膨張ひずみ



$E_c=39\text{GPa}$, $E_s=206\text{GPa}$, $p(\text{内側})=p'(\text{外側})=0.5\%$

$R_1=582\text{mm}$, $R_2=552\text{mm}$, $R_3=520\text{mm}$, $R_4=500\text{mm}$

図-4 $\phi 1000\text{mm}$ 管の(a)寸法と(b)ケミカルプレストレスの分布

一方、従来の直線はりに対する理論によれば破線のように一定となり、管内壁において2次元弾性論による $\sigma_{\theta\theta}$ より25%程度小さく見積ることになりひびわれ強度を若干過小評価することになる。また、鉄筋の外側のコンクリートの $\sigma_{\theta\theta}$ は明確な応力分布が示されておらず、拘束がないため自由膨張し管の外壁で $\sigma_{\theta\theta}$ がゼロとなるような2次放物線になるとも考えられていた⁴⁾。しかし、本解析の結果によると鉄筋と膨張コン

クリートとの付着が完全である限り、鉄筋の外側の膨張コンクリートにも σ_{op} が導入され、管外壁において σ_{op} が十分に存在する。よって、管外壁に引張応力が生じる場合に対して抵抗することができるものと考えられる。

表－1 各径の管に対する曲率の影響

	$p \varepsilon_s E_s$	$\phi 600$	$\phi 800$	$\phi 1000$	$\phi 1200$	$\phi 1500$
管内面の σ_{op}	11.9	15.7	15.0	14.9	14.2	13.8
曲率の影響	——	1.32	1.26	1.25	1.20	1.16

次に、円環の効果が曲率によりどの様に変化するかを調べるため、鉄筋比 1%のときの $\phi 600 \sim \phi 1500\text{mm}$ に対する管内壁の σ_{op} を求め、 $p \varepsilon_s E_s$ で割った値を曲率の影響として表－1に示す。管径が小さくなるに従い曲率の影響が大きくなり $p \varepsilon_s E_s$ から得られる値との差が大きくなる。これより、鉄筋比が等しくても管径の違いにより曲率の影響があるため σ_{op} は変化し、更にひびわれ強度を増加させる。

以上より、膨張コンクリートを用いてひびわれ強度を増加させる方法は、十分に有効的な方法であり、大きなひびわれ強度の増加が期待できる。

5. 結論

多層円柱の固有応力に関する解析を行った。得られた結論は次に示すとおりである。

1. 2次元弾性問題として固有応力の解を示した。この解析は異種材料を同心円状に組み合わせた中実及び中空円柱の固有応力の算定に利用できる。
2. 得られた解析結果より、部分ポリマー含浸コンクリートの熱応力の分布を明らかにした。コンクリートのポリマー含浸率は高々3～8%であり、ポリマー含浸コンクリートとセメントコンクリートの熱膨張係数の差は小さい。そのため温度変化によって生じる応力も小さくなる。
3. 固有応力を有効に利用した膨張コンクリートを用いた鉄筋コンクリート管のケミカルプレストレスを解析した。ケミカルプレストレスの分布は管内壁から外壁へと徐々に減少する。そして、鉄筋コンクリート管の外圧試験時に加わる荷重により生じる管内壁の最大引張応力を打ち消すように生じ、ひびわれ強度を増加させる。さらに、ケミカルプレストレスに与える管の曲率の影響を考慮すると、さらに管のひびわれ強度が増加が期待できることを示した。

参考文献

- 1) 川上 洵他, 「外圧荷重を受ける多層円柱の応力に関する研究」, 構造工学論文集 vol. 33A, pp.207～216, 1987年.
- 2) Timoshenko S.P. and Goodier J.N. "Theory of elasticity," McGRAW-HILL, Third edition, pp. 443～445.
- 3) Czarnecki, L., "The Status of Polymer Concrete," ACI Concrete international, Vol.7, July, 1985, pp.47-53.
- 4) 飯田 秀雄他, 「ケミカルプレストレスを導入する鉄筋コンクリート管の拘束条件に関する研究」, コンクリートライブラリー第39号, pp.61～67, 1974年.

(1987年10月16日受付)