

**式で表現されていない破壊基準に対する
全確率分布安全性指標**
FULL-DISTRIBUTION SAFETY INDEX FOR FAILURE FUNCTION WITHOUT CLOSED ALGEBRAIC FORM

長 尚* 大 矢 秀 人**
By Takashi CHOU and Hideto OOYA

It can be often seen that reliability has to be analysed for the case , such as a slope failure problem treated by the trial and error method , in which the failure function is not available as a closed algebraic form and is only evaluated numerically for the fixed random variables.

Wu and Wirsching have suggested a numerical procedure to calculate the safety index using second degree polynomial for problems in which closed form expression of the failure function does not exist.

The purpose of this study is twofold : to propose a more simpler procedure modified using first degree polynomial ; and to demonstrate the capability of the proposed method by some examples which contain extremely nonlinear failure functions and nonnormal correlated variables.

1. まえがき

破壊基準が関数式で表現されている場合には、関数が非線形で、確率変数の確率分布が非正規分布でしかも変数間に相関があっても、非常に効率良く全確率分布安全性指標を求めることができる。¹⁾ところで破壊基準を関数式で表現できなくて、数値的にしか評価できない場合については、Y.-T. Wu等が金属疲労の安全性解析に対して、2次の近似多項式表現による計算法を提案している。²⁾本文ではこの方法を簡略化して1次近似式表現による計算法を示し、具体的に斜面のすべりの問題等に適用してその有効性を検討する。

2. 1次近似式表現による全確率分布安全性指標の計算法

以下斜面のすべりの問題を例にとりて、1次近似式による破壊基準関数の表現方法について説明する。

いまある斜面のすべりに対する安全率をFとすると、破壊基準関数は形式的に、

$$g(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - 1 \quad \dots \dots \dots (1)$$

のように書くことができる。ここに $\mathbf{x}$ は安全率Fに影響を与える、荷重・強度等の確率変数で、

$$\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \quad \dots \dots \dots (2)$$

とする。ところで、安全率Fを例えばBishop法で求めようとする、次式による繰り返し演算が必要となっ

* 工博 信州大学教授 工学部土木工学科 (〒380 長野市若里 500番地)

** 鉄建建設(株)土木構造研究室 (〒101 東京都千代田区三崎町 2-5-3)

てくる。

$$F = \min \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{c_i l_i \cos \alpha_i + (w_i - u_i l_i \cos \alpha_i) \tan \Phi_i}{\sum_{j=1}^m w_j \sin \alpha_j \cos \alpha_i + (1/F) \tan \Phi_i \sin \alpha_i} \right\} \right] \quad (3)$$

ここに、 m : 分割数、 l_i : i ブロックの底辺の長さ、 u_i : i ブロックの底辺における間隙水圧、 α_i : i ブロックの底辺の傾斜角、 w_i : i ブロックの土の重さと積載荷重、 c_i : i ブロックの土の粘着力、 Φ_i : i ブロックの土の内部摩擦角である。

したがって、 $g(x)$ を隔な形の関数式で表現することができない。そこでこれがある点 x^0 で式 (4) のような 1 次式で表現できるものと仮定する。

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha^T (x - x^0) \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここに α_0 , α は常数で、次に述べるような最小 2 乗正規方程式を解いて決定する。

いま x^0 の近傍の L 個の点で $g(x)$ の値が数値的に評価できるものとする、その値と式 (4) の計算値との差 e は次のようになる。

$$e = (e_1 \dots e_L)^T = g - V\alpha^* \quad \dots \dots \dots (5)$$

ここに V , g は次のようである。

$$V = \begin{bmatrix} 1 & (x_1^1 - x_1^0) & \dots & (x_n^1 - x_n^0) \\ 1 & (x_1^2 - x_1^0) & \dots & (x_n^2 - x_n^0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & (x_1^L - x_1^0) & \dots & (x_n^L - x_n^0) \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$g = \begin{bmatrix} g(x^1) \\ g(x^2) \\ \vdots \\ g(x^L) \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (7)$$

また、 x^k は x^0 の近傍点で、

$$\alpha^* = (\alpha_0 \ \alpha)^T = (\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n)^T \quad \dots \dots \dots (8)$$

である。

さてこの差の 2 乗の総和は次のように表される。

$$e^T e = (g - V\alpha^*)^T (g - V\alpha^*) = g^T g - 2\alpha^{*T} V^T g + \alpha^{*T} V^T V \alpha^* \quad \dots \dots \dots (9)$$

この式 (9) を α^* で偏微分すると次式を得る。

$$\partial (e^T e) / \partial \alpha^* = -2 V^T g + 2 V^T V \alpha^* \quad \dots \dots \dots (10)$$

ここで差 e の 2 乗の総和を最小にするための条件、

$$\partial (e^T e) / \partial \alpha^* = 0 \quad \dots \dots \dots (11)$$

を用いると次式が得られ、これが最小 2 乗正規方程式²⁾である。

$$V^T V \alpha^* = V^T g \quad \dots \dots \dots (12)$$

ところでデータの数 L は、 α^* の数の $n+1$ 以上あれば良いが、一般に破壊基準関数は統計的な処理は不

要であるから、 $L = n + 1$ で十分である。

さてここで、

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}^k = (x_1^0, \dots, x_k^0 + \Delta x_k, \dots, x_n^0)^T \quad \dots \dots \dots (13)$$

とすると、式(6)の $\mathbf{V}$ は次のようになる。

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & \Delta x_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \Delta x_n \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (14)$$

したがって式(12)の最小2乗正規方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} n+1 & \Delta x_1 & \Delta x_2 & \cdot & \Delta x_n \\ & \Delta x_1^2 & 0 & \cdot & 0 \\ & & \Delta x_2^2 & \cdot & 0 \\ \text{sym.} & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \Delta x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n+1} g(\mathbf{x}^j) \\ \Delta x_1 g(\mathbf{x}^2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta x_n g(\mathbf{x}^{n+1}) \end{bmatrix} \quad \dots \dots (15)$$

この式(15)を解くと次のような解が得られる。

$$\alpha_0 = g(\mathbf{x}^1), \quad \alpha_j = \frac{1}{\Delta x_j} \{g(\mathbf{x}^{j+1}) - g(\mathbf{x}^1)\} \quad (j = 1, \dots, n) \quad \dots (16)$$

$\mathbf{x}^0$ の近傍の $(n + 1)$ 点について、何らかの方法で $g(\mathbf{x})$ が数値的に評価できれば、この式(16)により、式(4)の一次式が決定できる。例えば、斜面のすべりの問題では、式(3)を適用して繰り返し演算により $F(\mathbf{x}^k)$ ($k=0, 1, \dots, n$) を $(n + 1)$ 個計算し、式(1)により $g(\mathbf{x})$ の値を求めて、式(16)により α^* を決定する。

さて本法では全確率分布安全性指標を求める繰り返し演算¹⁾の各段階の近似値 $\mathbf{x}^0$ について毎回 α^* を決定して、一次式の形での破壊基準関数として、全確率分布安全性指標を求めるものとする。なお $\Delta \mathbf{x}$ としては、0.01 程度の十分小さな値を選択し、この値を変えても結果が同一であることを確かめることとする。

ところで、Wu 等²⁾の提案した方法は、式(4)に相当する式を2次の多項式とし、かつデータの発生点は $\mathbf{x}^0$ の近傍ではなく、設計点を包含する別な点を選定している。そしてそれに対する安全性指標を求め、この設計点について改めて2次の多項式で表現して安全性指標を求め、これが収束するまで繰り返している。両方法の比較を図-1に示す。

3. 本法の適用性に関する検討

本法の適用性をみるために、関数式で表現されている幾つかの例について、A) 関数式を直接用いた場合の全確率分布安全性指標 (β_F)、B) 本法を用いた場合の全確率分布安全性指標 (β_F^E)、C) モンテカルロ法によった場合(ただし(3)、(4)は除く)の安全性指標 (β_M) を求めた結果を表-1に示す。これら(1)~(6)の例における破壊基準関数 ($g(\mathbf{x})$)、平均値 ($\bar{\mathbf{x}}$)、変動係数 ($\mathbf{V}$)、確率分布 ($\mathbf{D}$)、相関係数

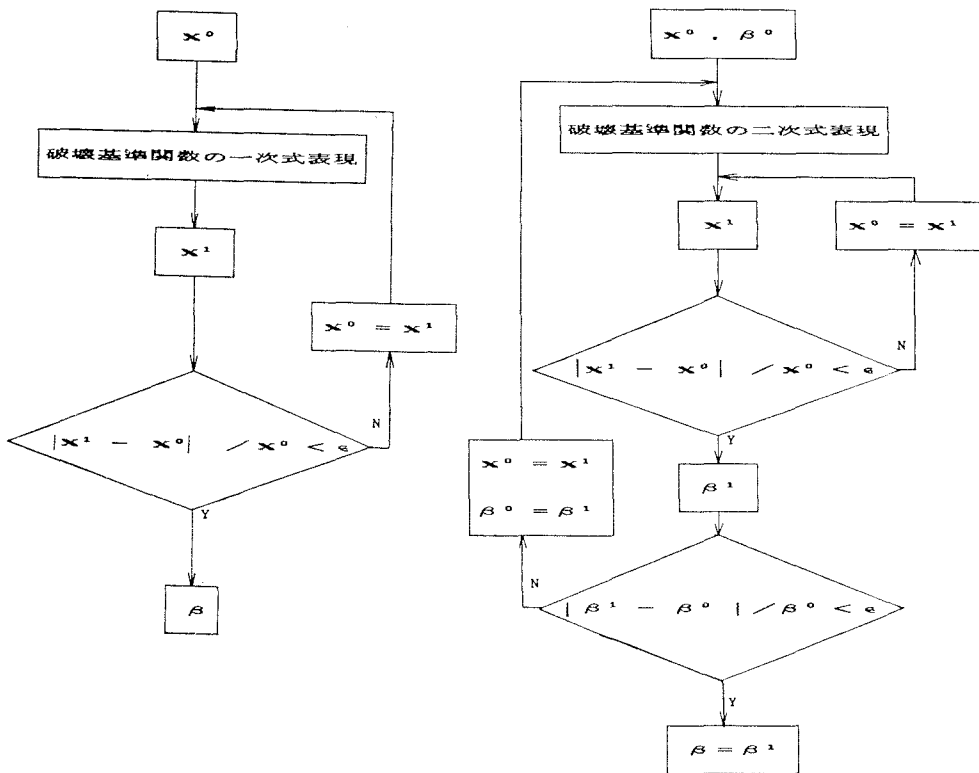


図-1 計算法の比較 (a) 本法

(b) Wu等の方法

(ρ_{ij}) は次のようである。

(1) $g(\mathbf{x}) = x_1 - x_2$, $\bar{\mathbf{x}} = (1.2 \ 1.0)^T$
 $\mathbf{V} = (0.2 \ 0.2)^T$, $\mathbf{D} = (\text{LN EXI})^T$, $\rho_{12} = 0$ (17)

(2) $\rho_{12} = 0.5$ 以外は前例と同じ。

(3)³⁾ $g(\mathbf{x}) = x_1(1-x_2) - x_3(1-x_4) / x_5$, $\bar{\mathbf{x}} = (3.0 \ 0.5 \ 1.0 \ 0.5 \ 1.5)^T$,
 $\mathbf{V} = (0.2 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2)^T$, $\mathbf{D} = (\text{LN EXI B W LN})^T$, $\rho_{ij} = 0 (i \neq j)$ (18)

(4)³⁾ $\rho_{12} = 0.5$ 以外は前例と同じ。

(5)³⁾ $g(\mathbf{x}) = \{2x_1 / (4x_2 + x_3)\} \{1 - x_9 / (x_1 x_5)\} x_4 x_5 x_6 - (x_7 + x_8) x_{10}$, $\bar{\mathbf{x}} = (63.5 \ 24.0 \ 14.1 \ 525 \ 2800 \ 1.0 \ 250000 \ 500000 \ 50000 \ 1.0)^T$, $\mathbf{V} = (0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.10 \ 0.05 \ 0.20 \ 0.10 \ 0.30 \ 0.15 \ 0.20)^T$, $\mathbf{D} = (\text{N N N N N W N N LN N N})^T$, $\rho_{ij} = 0 (i \neq j)$ (19)

(6)³⁾ $\rho_{12} = 0.4$, $\rho_{13} = 0.2$, $\rho_{14} = 0.3$, $\rho_{24} = 0.8$, $\rho_{78} = \rho_{79} = 0.9$, $\rho_{89} = 0.8$ 以外前例と同じ。

なお確率分布の記号の意味は、N:正規分布, LN:対数正規分布, EXI:極値I型最大値分布, W:ワイブル分布 [下限値=平均値-2×(標準偏差)], B:ベータ分布 [下限値=平均値-2×(標準偏差), 上限値=平均値+3×(標準偏差)]である。また(1)~(4)は実際の構造問題には無関係に作ったものであり, (5), (6)は軸力と曲げを受ける鋼製H型断面の破壊の例³⁾である。ただし単位は省略してある。

表-1 にみられるように, かなり非線形性の強い例でも, 本法と破壊基準関数を直接用いた方法との計算

表-1 安全性指標の比較

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
β_F	0.63	0.53	3.67	4.21	1.39	1.25
β_F^E	0.63	0.53	3.67	4.21	1.39	1.25
β_M	0.66	0.54			1.37	1.23

結果は完全に一致した。さらにモンテカルロ法による結果とも良い一致をみせ、本法の使用性が確認されたと言えよう。なお相関のある非正規乱数は先に筆者が提案した方法¹⁾により発生させた。

さて本法とWu等の提案になる方法とを比較したところ、著者の試みた例題はいずれもWu等の方法の方が計算時間を多く必要とした。その程度は1.6倍から3.4倍であった。この主な理由は本法が全確率分布安全性指標を求める繰返し演算の都度1次式表現を変更して近似度を高めているため、収束が早くなるところにある。一方Wu等の方法が2次の多項式表現であってもこれを一旦固定しているために、一回の繰返し演算による設計点への接近が少なく、全体として収束が遅くなりデータ点の発生回数が結果的に多くなる。しかも2次の多項式表現としているために一回に発生させるデータ点の数が、本法の $(n+1)$ 個に対し、 $\{(2n+1) \sim (n+2)(n+1)/2\}$ 個で、非常に多くなる。その上 α^* を決定する連立方程式の元数も同様に多くなる。さらにWu等の方法では彼等の論文で指摘しているように、データ点の選定にある種の技術的判断を要するが、本法では前述したように機械的に $\Delta x = 0.01$ 程度とすれば良い利点もある。

4. 斜面のすべりの問題への適用例

図-2に示す斜面についての計算例を示す。従来この種の問題は文献(4)にみられるように幾つかの仮定を設けて、関数式で表現された破壊基準により安全性指標が求められていた。しかし本法を適用すれば、次のように求めることができる。

ここで確率変数は、積載等分布荷重 q 、土の粘着力 c 、土の内部摩擦角 Φ 、土の単位体積重量 γ 、地下水位 g_w (図-2において、地下水位の平均値の座標 y_w から10m上を基準座標 y_w^0 とし、地下水位座標を、 $y_w = y_w^0 + g_w$ と表現した)の計5個とした。平均値

及び変動係数を表-2に示す。確率分布はA(すべて正規分布)、B(すべて対数正規分布)の2ケースとした。

計算結果は、 β (A)=1.30、 β (B)=1.33であった。比較のためにモンテカルロ法で安全性指標を求めると、それぞれ

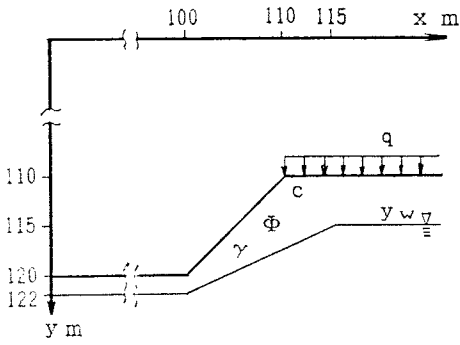


図-2 解析するすべり斜面

表-2 平均値・変動係数

確率変数	平均値	変動係数
q	7.0tf/m	0.3
c	4.0tf/m ²	0.2
Φ	15°	0.2
γ	2.0tf/m ³	0.15
g_w	10.0 m	0.24

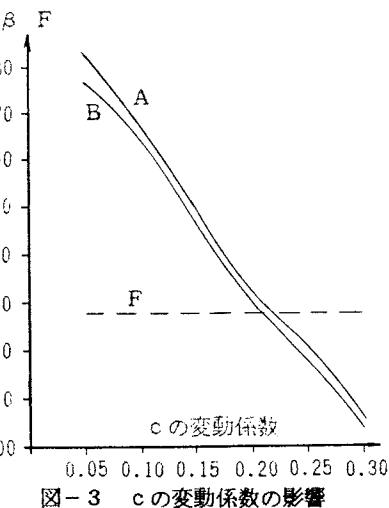


図-3 cの変動係数の影響

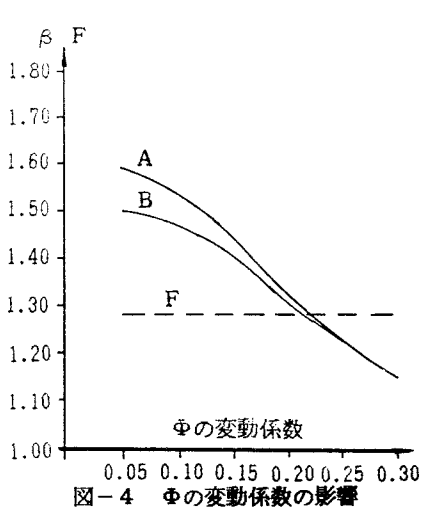


図-4 Φの変動係数の影響

1.32, 1.37であった。また計算時間はモンテカルロ法の約 120 分の1であった。このことより本法の有効性が確認された。次に個々の確率変数の変動係数の変化がどのように安全性指標に影響するかを、図-3, 4に示す。これらの図には、個々の確率変数の平均値を用いた、確定論的な安全率が破線で示されている。当然のことであるが、確定論的には一定の安全率であっても、確率論的には変動係数の値によって安全度は変化する。もちろん確定論的に扱う場合でも、変動性の高いものは安全側の値を用いることにより、変動性に対する配慮はなされる筈であるから、これらの図に表れる程両者に違いはないであろう。しかしより合理的に扱うためには、やはりこのような確率論的手法が優れていることを、これらの図は示していると言えよう。

最後に、斜面のすべりの解析法の一つである、ここで用いた Bishop法自身も不確実性を有する。そこで、これを考慮して式(1)に変えて、

$$g(x) = E \cdot F(x) - 1 \quad \dots \dots \dots (20)$$

とし、Eを平均値 1.0、変動係数 $V_E = 0.05 \sim 0.30$ の正規確率変数として計算した結果を図-5に示す。当然Eの変動係数の上昇に従って安全性はかなり低下する。どの程度の変動係数を考えるべきかについてを判断する材料は持たないが、いずれにしても解析法のもつ不確実性が安全性に大きく影響することを、この図は示している。

5. まとめ

以上を要約すると次のようである。

- (1) 破壊基準を関数式で表現できなくて、数値的にしか評価できない場合の全確率分布安全性指標の計算法を示した。
- (2) 本法の特徴は、Wu等の提案になる方法より、簡単で、一般に計算効率が良く、特別な技術的判断も必要でないところにある。
- (3) かなり非線形性の強い例においても、本法と破壊基準関数を直接用いた方法との計算結果は完全に一致した。さらにモンテカルロ法による結果とも良い一致をみせ、本法の使用性が確認された。
- (4) 斜面のすべりの問題のような、繰り返し演算によって数値的にしか評価できない、かなり複雑な問題への適用例を示し、本法の有効性を確認した。
- (5) 斜面のすべりの問題での、確率論的な評価の必要性について指摘し、算定式のもつ不確実性の安全性への影響について示した。

参考文献

- 1) 長尚：相関がある場合の全確率分布安全性指標，構造工学論文集，Vol.32A，PP.485～494，1986。
- 2) Wu Y.-T. et al. : Advanced Reliability Method for Fatigue Analysis, Proc. of ASCE, J. of EM, Vol.110, No.4, pp.536～553, 1984.
- 3) 長尚：確率変数間の相関が安全性に及ぼす影響，構造工学論文集，Vol.33A，1987。
- 4) 星谷勝，石井清：構造物の信頼性設計法，鹿島出版会，pp.119，1986。

(1986年10月17日受付)

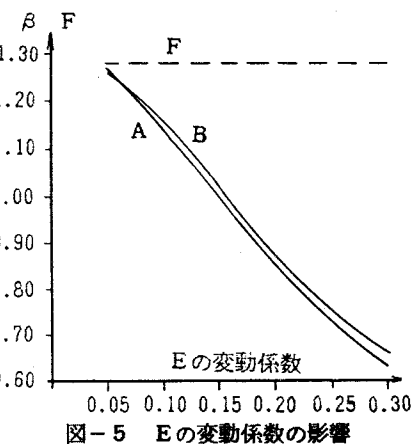


図-5 Eの変動係数の影響