

不規則分布荷重を受ける板の 有限要素法による解析

ANALYSIS OF PLATES WITH STOCHASTIC DISTRIBUTED LOAD BY FINITE ELEMENT METHOD

岡林隆敏・山手弘之

By Takatoshi OKABAYASHI and Hiroyuki YAMATE

This paper presents a finite element analysis procedure for evaluating the second-order statistics of the response of plates subjected to spatially distributed stochastic loads (random fields), such as vehicular loads acting on concrete slabs of highway bridges and floor live loads induced by the occupancy of the building. The covariance matrix of the response is directly obtained from the covariance equation derived from the finite element analysis. The proposed method permits efficient evaluation of the variance and covariance of the response. Numerical examples are shown for simply supported rectangular plates and rectangular plates with built-in edges, subjected to a white noise random field and a random field with exponentially decaying correlation, respectively.

1. はじめに

実在の構造物に作用する荷重は、時間的にまた空間的に変動するために、荷重を確率論的にモデル化して構造物の応答の確率特性を解析する手法の研究が進められてきた。近年、信頼性理論に基づく合理的な設計法が検討されるようになり、このような視点から荷重の実態調査がなされ、確率論に基づく荷重モデルが提案されている。これらには、道路橋の活荷重である交通流や車両の様々な特性⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾、建築構造物の床荷重や雪荷重⁽⁴⁾がある。さらに、これらの荷重モデルによる解析の手法が提案されている。このような荷重の中で、空間的に連続した1次元あるいは2次元的に分布する荷重としてモデル化されるものがある。

著者らは、このような空間的に不規則に分布した荷重を受ける構造物の変形と断面力の変動を解析する手法として、確率伝達マトリックス法と有限要素法による解法を提案した。本論文は、有限要素法による解法を不規則分布荷重を受ける板の解析に適用したものである。不規則分布荷重を受ける板の確率論的解析ではこれまで荷重の自己相関関数とグリーン関数の積を解析的に積分する手法⁽⁵⁾⁽⁶⁾が用いられてきた。しかし、この手法では、系のグリーン関数あるいは荷重の自己相関関数の関数形が複雑な場合、解析は極めて煩雑になる。

そこで、本論文では、有限要素法を基礎にした、不規則分布荷重を受ける板の変形と断面力を解析する手法を示した。本解法では、不規則分布荷重を節点力で代表させ、各節点力の共分散行列が得られるならば、共分散方程式により各節点の応答の共分散が求められる。従って、荷重の自己相関関数が複雑な場合、あるいは、自己相関関数が実測データで与えられた場合でも、本解法では解析が可能である。また、有限要素法

* 工博 長崎大学助手 工学部土木工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)

** 工修 日木工営株式会社

(〒102 東京都千代田区麹町 5-4)

を基礎にしているために、任意の境界条件に柔軟に対応でき、かつ汎用性のある解析が可能である。数値計算例として、白色雑音場あるいは指数関数形の相関を有する不規則分布荷重が作用する場合、固定板および単純支持板の解析を行うことにより、本解法の有効性を確認すると共に、荷重の空間的相関が応答に及ぼす影響について検討したものである。

2. 有限要素法による板の曲げ解析の概要

ここでは、有限要素法の概要を示すと共に、以後の解析に必要な行列を定義する。平板を長方形要素に分割し、その1つを取り出したものを図-1に示した。長方形要素の各節点は i, j, k および l である。 i 節点の変位ベクトルを

$$u_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ -(\partial w / \partial y)_i \\ (\partial w / \partial x)_i \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

で表す。ここに、 w_i はたわみ、 θ_{xi} 、 θ_{yi} はそれぞれ x 軸と y 軸回りの回転角である。さらに i, j, k, l 点の変位をまとめて

$$u = [u_i^T \ u_j^T \ u_k^T \ u_l^T]^T \dots\dots\dots(2)$$

で定義する。

長方形要素の形状関数については、種々のものが提案されているが、ここでは一般的に用いられている次式を用いる。

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \dots\dots\dots(3)$$

i, j, k, l 点における $w(x, y)$ より

$$u = C\alpha \dots\dots\dots(4)$$

となる。ここに、 C は節点座標より決まる (12×12) の行列であり、 α は、12個の未定係数よりなるベクトルである。

板の各点における曲率とねじれ率は、次のように表される。

$$\chi = \begin{bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} = Q\alpha \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 Q は節点座標より決まる (3×12) の行列である。等方性板の場合、曲げモーメントとねじりモーメントは、次のようになる。

$$M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = D\chi, \quad D = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ である。なお、 E は弾性係数、 h は板厚、 ν はポアソン比である。曲げモーメントとねじりモーメントは、次式で表される。

$$M = Bu, \quad B = DQC^{-1} \dots\dots\dots(7)$$

図-2に示したように、 i 節点に作用する荷重を

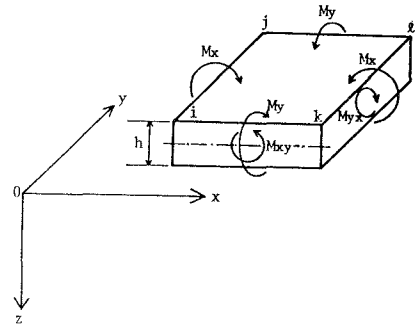


図-1 長方形要素

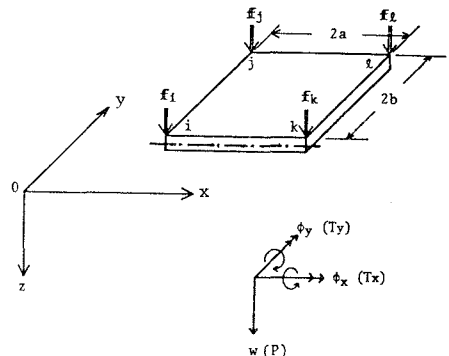


図-2 力とそれに対応する変位

$$f_i = [\dot{P}_i \ T_{xi} \ T_{yi}] \dots\dots\dots (8)$$

で表して、i, j, k, l 点の荷重をまとめて

$$f = [f_i^T \ f_j^T \ f_k^T \ f_l^T]^T \dots\dots\dots (9)$$

で 定義する。このとき、要素の変位と荷重の関係は

$$f = ku \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。ただし、 k は要素剛性マトリックスであり、次式で与えられる。

$$k = (C^{-1})^T \iint (Q^T D Q) dx dy C^{-1} \dots\dots\dots (11)$$

さらに、板全体の n 個の節点の変位ベクトル X と荷重ベクトル F を、次式で定義すると

$$\left. \begin{aligned} X &= [u_1^T \dots\dots\dots u_n^T]^T \\ F &= [f_1^T \dots\dots\dots f_n^T]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

板全体の節点方程式

$$KX = F \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。ここに、 K は全体剛性行列である。

次に、(13)式を任意の境界条件の下で解くために、節点変位が未知の成分に添字を A、境界条件として既知の成分に添字を B として(13)式を、次のように分割する。

$$\left[\begin{array}{cc} K_A & K_{BA} \\ K_{AB} & K_B \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} X_A \\ X_B \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} F_A \\ F_B \end{array} \right] \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 F_A は与えられている荷重であり、 F_B はいわゆる支点反力を表す。通常、 $X_B = 0$ であるので、未知の節点変位と支点反力は、次のようになる。

$$X_A = K_A^{-1} F_A, \quad F_B = K_{BA} X_A \dots\dots\dots (15)$$

3. 応答の確率特性

各節点に作用する荷重を正規確率変数と考えると、線形系である板の応答すなわち、変位と断面力は正規確率変数となる。従って、応答の確率密度関数は、応答の平均値と分散および共分散より構成することができる。ここで、全節点の変位と断面力で構成されるベクトルを

$$S = \{S_1^T \dots\dots\dots S_n^T\}^T, \quad S_b = \{u_k^T \ M_k^T\}^T \dots\dots\dots (16)$$

で表すと、 S の確率密度関数は、

$$p(S) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |Gs|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(S - \mu_s)^T Gs^{-1} (S - \mu_s)\right) \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる。ここに、 μ_s と Gs は S の平均値と共分散行列であり、次式で定義される。

$$\mu_s = E[S], \quad Gs = E[\tilde{S}\tilde{S}^T] \dots\dots\dots (18)$$

なお、 $E[\]$ は平均の操作を表す演算子であり、 $\sim$ の記号は $\tilde{S} = S - E[S]$ を表す。

a) 応答の平均値

平均値応答は、(13)式の両辺に平均の操作を施した

$$KE[X] = E[F] \dots\dots\dots (19)$$

により得られる。

b) 応答の分散及び共分散

未知節点変位の分散・共分散は、(15)式より構成される共分散方程式

$$K_A E[\tilde{X}_A \tilde{X}_A^T] K_A^T = E[\tilde{F}_A \tilde{F}_A^T] \dots\dots\dots (20)$$

を解くことにより得られる。さらに、支点反力の分散・共分散は

$$E[\tilde{F}_B \tilde{F}_B^T] = K_{BA} E[\tilde{X}_A \tilde{X}_A^T] K_{BA}^T \dots\dots\dots (21)$$

により求められる。i 点の変位の分散 $E[\tilde{u}_i \tilde{u}_i^T]$ および i 点と j 点の共分散 $E[\tilde{u}_i \tilde{u}_j^T]$ は(20)式より得られる。また、i 点と j 点の変位と断面力の共分散および断面力と断面力の共分散は

$$\left. \begin{aligned} E[\tilde{X}_i \tilde{M}_j^T] &= E[\tilde{X}_i \tilde{X}_j^T] B_j^T \\ E[\tilde{M}_i \tilde{M}_j^T] &= B_i E[\tilde{X}_i \tilde{X}_j^T] B_j^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

となる。

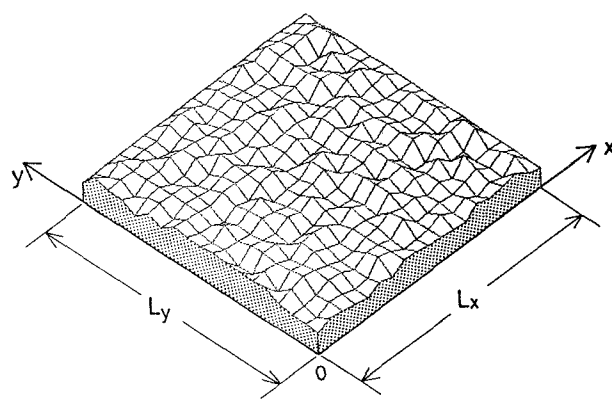
応答の平均値は、これまでの確定論による有限要素法で処理できるので、の本論文では、平均値回りの変動のみに着目する。

4. 荷重のモデル化

この論文では、荷重として図-3に示されるような2次元の確率場で表現される、不規則分布荷重を考える。有限要素法による解析のために、分布荷重を各節点に作用する集中荷重で評価する。集中荷重を等価節点力で評価すると厳密な解が得られるが、節点荷重の共分散が複雑になるので、本論文では、図-4のように、i 節点 (x_a, y_a) を中心として Δx と Δy とで囲まれた分布荷重を、i 点の節点荷重として、

$$P_i = \int_{x_a - \Delta x/2}^{x_a + \Delta x/2} \int_{y_a - \Delta y/2}^{y_a + \Delta y/2} q(x, y) dy dx \dots\dots\dots (23)$$

図-3 不規則分布荷重を受ける板



で代表させる。ここに、 $q(x, y)$ は不規則分布荷重である。すると、i 節点と j 節点の荷重の共分散は、

$$E[P_i P_j] = \int_{x_a - \Delta x/2}^{x_a + \Delta x/2} \int_{x_b - \Delta x/2}^{x_b + \Delta x/2} \int_{y_a - \Delta y/2}^{y_a + \Delta y/2} \int_{y_b - \Delta y/2}^{y_b + \Delta y/2} E[q(x_1, y_1) \cdot q(x_2, y_2)] dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \dots\dots\dots (24)$$

で与えられる。従って、不規則分布荷重の自己相関関数が既知であれば、節点荷重の共分散は計算できる。2次元確率場の詳細な検討は文献(13)でなされている。建築構造物の床荷重の自己相関関数として、

$$R(x_1, x_2, y_1, y_2) = \exp(-c(|x_1 - x_2|^{r_1} + |y_1 - y_2|^{r_2})^n) \dots\dots\dots (25)$$

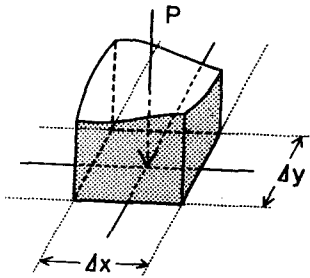


図-4 分布荷重のモデル化

の他にいくつか提案されている。

本論文では、不規則分布荷重として x 方向と y 方向が独立

$$q(x, y) = q_x(x) \cdot q_y(y) \dots\dots\dots (26)$$

として、次の2つの場合について考える。

a) 不規則分布荷重が白色雑音場の場合

平均値0、強度 σ_x 、 σ_y を有する確率場の自己相関関数は、

$$E[q_x(x_1)q_x(x_2)] = \sigma_x^2 \delta(x_1 - x_2), E[q_y(y_1)q_y(y_2)] = \sigma_y^2 \delta(y_1 - y_2) \dots\dots\dots (27)$$

で表される。このとき、節点力の分散・共分散は

$$E[P_i^2] = \sigma_x^2 \sigma_y^2 \Delta x \Delta y, E[P_i P_j] = 0 \dots\dots\dots (28)$$

となる。ただし、節点が境界上にある場合、あるいは隅角部にある場合は、この式に1/2 あるいは1/4 をかけたものになる。

b) 不規則分布荷重が相関を有する場合

不規則分布荷重の自己相関関数として

$$\left. \begin{aligned} E[q_x(x_1)q_x(x_2)] &= \sigma_x^2 \exp(-\beta_x |x_1 - x_2|) \\ E[q_y(y_1)q_y(y_2)] &= \sigma_y^2 \exp(-\beta_y |y_1 - y_2|) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

で与えられる場合を考える。この式は、(25)式において $r_1 = 1$, $r_2 = 1$ に対応している。(24)式の積分は、 x と y に分離して実行できる。従って、(24)式は

$$E[P_i P_j] = I_x \cdot I_y \dots\dots\dots (30)$$

のように表される。 I_x と I_y は同じ形式の式になるので、節点の条件に合わせて適宜乗じて、荷重の共分散を決定する。計算結果の表記を簡略化するために、節点が $x = 0$ の境界上 (y 軸上) になる場合には添字を0、 $x = L_x$ の境界上にある場合には添字 n をつけて表示する。

i) $x_a = x_c$ の場合

$$I_x = \frac{2\sigma_x^2}{\beta_x} \left\{ s \Delta x - \frac{1}{\beta_x} (1 - e^{-\beta_x s \Delta x}) \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ただし、($a \neq 0$, n) の場合 $s = 1$, ($a = 0$ または n) の場合 $s = 0.5$ である。

ii) $x_a \neq x_c$ の場合

$$\left. \begin{aligned} I_x &= A \cdot e^{-\beta_x x_a - x_b} & (a \neq 0, n \text{ かつ } b \neq 0, n, \quad s = r = 1) \\ &= A \cdot e^{-\beta_x (x_a - \Delta x/2)} & (a \neq 0, n \text{ かつ } b = 0, \quad s = 0.5, r = 1) \\ &= A \cdot e^{-\beta_x (L_x - x_a)} & (a \neq 0, n \text{ かつ } b = n, \quad s = 1, s = 0.5) \\ &= A \cdot e^{-\beta_x (x_b - \Delta x/2)} & (a = 0 \text{ かつ } b \neq 0, n, \quad s = 0.5, r = 1) \\ &= A \cdot e^{-\beta_x (L_x - x_b)} & (a = n \text{ かつ } b \neq 0, n, \quad s = 1, r = 0.5) \\ &= A \cdot e^{-\beta_x L_x} & (a = 0, n \text{ かつ } b = 0, n \quad s = r = 0.5) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ただし

$$A = \sigma_x^2 (e^{\beta_x s \Delta x} - 1) (1 - e^{-\beta_x r \Delta x}) / \beta_x^2$$

である。

5. 数値計算と考察

数値計算に用いる板は、等方性で等質な材料からなる辺長比 $L_x / L_y = 1$ の正方形板とする。板の解析モデルは、各辺10分割した100要素、121節点の正方形要素とした。この板のポアソン比は $\nu = 0.3$ 、板剛

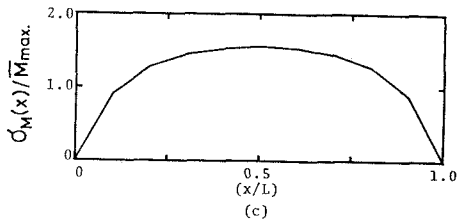
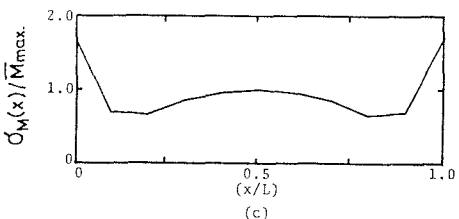
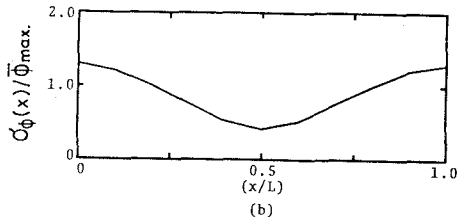
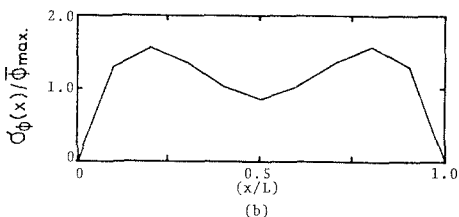
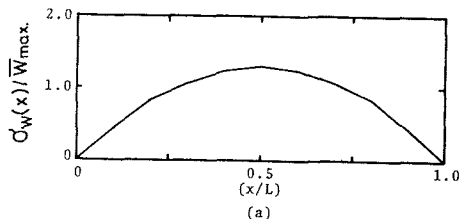
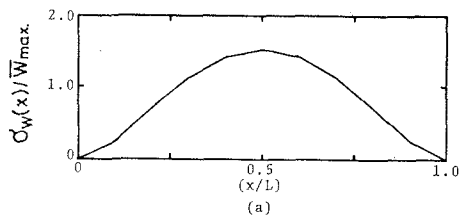


図-5 固定板の応答の標準偏差

図-6 単純支持板の応答の標準偏差

(白色雑音場の場合)

(白色雑音場の場合)

度は1.0としている。解析した板の境界条件は全周辺固定の場合（以下固定板）と全辺単純支持の場合（以下単純支持板）である。板に作用する荷重は、3. で述べたように、白色雑音場および指数関数形の相関を有する不規則分布荷重である。数値解析では、不規則分布荷重の強度を $\sigma_x = \sigma_y = 1$ とする。また、解析結果を規準化するための等分布荷重の荷重強度も $q = 1$ とする。

a) 不規則分布荷重が白色雑音場である場合

白色雑音場は、不規則分布荷重の中で、空間的変動の激しい荷重の極限である。図-5は固定板の結果を示したものである。解析結果は、 $y = L_y / 2$ に平行な x 線中央線うえのたわみ w 、たわみ角 ϕ および曲げモーメント M_x の各応答に着目する。図の(a)(b)(c) は、等分布荷重による平均値応答の絶対最大値で規準化したたわみ、たわみ角および曲げモーメントの標準偏差を示したものである。たわみとたわみ角は、境界上では確率1で0となる。等分布荷重の場合、たわみ角は $x/L = 0.5$ において、また曲げモーメントは $x/L = 0.25$ と 0.75 の近傍で0となる。しかし、不規則分布荷重が作用した場合、応答の標本関数の0となる点は変動するので、このような極小値を示すことになる。図-6は単純支持板の結果を示したものである。たわみとたわみ角は、境界上で確率1で0となる。たわみと曲げモーメントの応答の標準偏差は、等分布荷重による応答の形状とほぼ相似である。

b) 不規則分布荷重が相関を有する場合

荷重の空間的な相関を規定するパラメータを $K_x (= \beta x / 2\pi)$ および $K_y (= \beta y / 2\pi)$ で表す。ここでは x 方向と y 方向の相関が等しい場合、すなわち $K_x = K_y = K$ について考える。図-7は、 $K = 0.01$ 、 0.5 および 1.0 としたときの固定板の解析結果を示したものである。 K の値は0に漸近するにつれて荷重の変動は

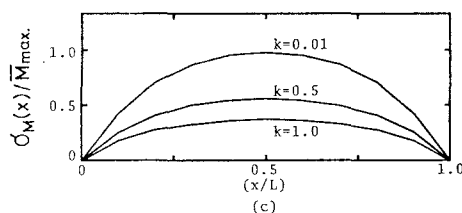
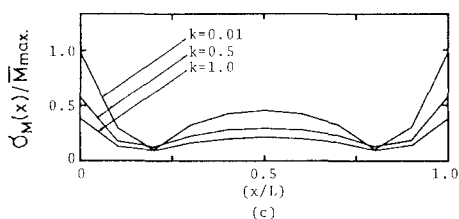
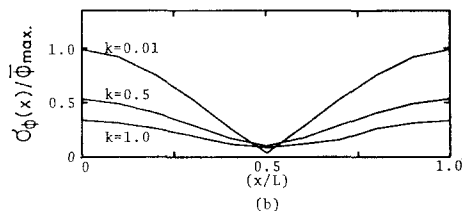
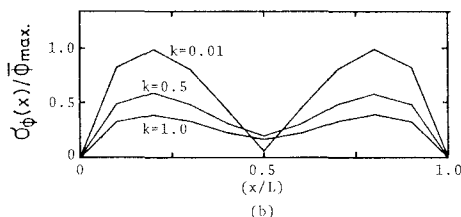
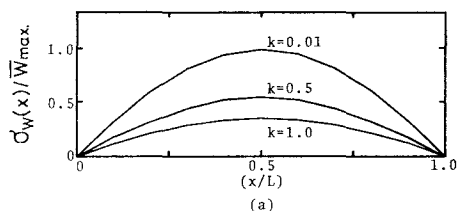
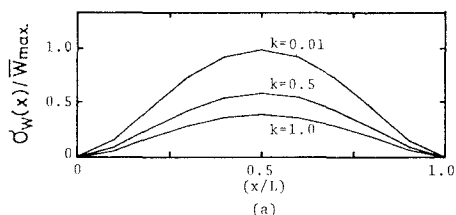


図-7 固定板の応答の標準偏差

図-8 単純支持板の応答の標準偏差

(指数型の相関を有する荷重の場合)

(指数型の相関を有する荷重の場合)

ゆるやかになり、その極限では等分布荷重の荷重強度が確率変数の場合に対応する。従って、それぞれの応答の形状は等分布荷重が作用した場合の応答の絶対値となり、さらに最大値は1となる。逆にKを大きくすると、荷重の変動は激しくなり、 $K \rightarrow \infty$ の極限では白色雑音になる。本論文の解析では、不規則分布荷重として、Kの値にかかわらずパワーを一定としているので、Kを大きくしてパワースペクトルの帯域が広がると、板の変形に寄与する低い波数のパワースペクトル密度のレベルが低下するので、応答のレベルは減少することになる。(29)式において、 σ_x と σ_y の代わりに $2\beta_x\sigma_x$ 、 $2\beta_y\sigma_y$ とすると、図-5の白色雑音の結果に一致する。荷重の空間的な変動の程度による応答の変化を見ると、Kの変化に対して、たわみ応答の形状は変化しない。しかし、曲げモーメント応答は荷重の空間的な変動が激しくなると、中央部の変動が相対的に大きくなることがわかる。

図-8は、単純支持板の解析結果を示したものである。この場合は、Kの値の変化によって、たわみと曲げモーメント応答の形状に変化は見られない。

空間的に不規則に分布する荷重を実測することにより、不規則分布荷重は(25)式のような自己相関関数を有する確率場でモデル化できる。本解法によれば、(24)式を用いて各節点に作用する節点力の共分散行列を構成することができれば、境界条件にかかわらず板の応答を解析することができる。

6. おわりに

著者らは、静的で空間的に不規則に分布する荷重を受ける構造物の変形と断面力の変動を解析する手法と

して、すでに有限要素法による解法を提案している。本論文では、この解法を不規則分布荷重を受ける板の解析に適用し、固定板と単純支持板に白色雑音場あるいは指数関数形の相関を有する荷重が作用した場合の数値解析より、板の解析において本解法が有効であることを確認した。さらに、解析結果より、荷重の空間的相関が応答に及ぼす影響について検討を加えた。得られた結果を要約すると、以下のようになる。

(1) 不規則分布荷重を節点に作用する集中荷重で代表させ、各節点荷重の共分散行列を得ることができれば、本解法により変形と断面力の変動を解析することができる。本解法では、複雑な関数形をした自己相関関数あるいは、実測の統計的処理の結果得られた自己相関関数の場合についても、解析が可能である。

(2) 解析の基本は有限要素法であるので、様々な境界条件に対して柔軟に対応できる。本解法では境界条件の異なる系に対して、汎用性のある解析が可能である。

(3) 数値解析例として、白色雑音場および指数関数形の相関のある荷重が作用する固定板と単純支持板の、変形と断面力の応答の標準偏差を求めた。数値解析結果より、空間的な相関が強い場合は等分布荷重の荷重強度が確率変数の場合の応答に、また空間的な相関が弱い場合は、白色雑音場の応答に近づくことが確認できた。

本論文では、解析の有効性を確認するために、荷重の相関および構造系が比較的単純な場合の解析を行った。本解法によれば、より複雑な問題として、直交異方性板、板厚の変化がある板等の解析が可能である。今後の課題として、共分散方程式の未知数は行列で定義されているので、効率の良い数値解析の手法の開発が必要である。

最後に、本研究の一部は昭和61年度文部省科学研究費、総合研究(A)(代表藤野陽三)の援助を受けて行ったものである。計算機は長崎大学情報処理センター FACOM M180 AD/II を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) Y.K.リ(森ほか4名共訳):構造動力学の確率論的方法,培風館,1981年.
- 2) V.V.和-和(小林ほか4共訳):構造設計の確率論的方法と信頼性問題,培風館,1982年
- 3) Madsen,H.O.,S.Krenk and N.C.Lind:Methods of Structural Safety,Prentice-Hall,Inc.,1986
- 4) 阪神高速道路公団:阪神高速道路における活荷重実態調査と荷重評価のための解析,阪神道路公団設計荷重(HDL)委員会報告書,1984年,3月
- 5) Corotis,R.B. and V.A.Jaria:Stochastic Nature of Building Live Loads,ASCE,Vol.105,No.ST.3, pp.493-510,March,1979.
- 6) Kanda, J and K.Kinoshita:A Probabilistic Model for Live Load Extreme in Office Buildings, 14th International Conference on Structural Safety and Reliability,pp. II-287~II-296,1985.
- 7) Ghiocel,D.and D.Lungu:Wind, Snow and Temperature Effects on Structures Based on Probability, Abacus Press,1975.
- 8) 高岡宣善・白木渡・松保重之:不規則関数論に基づく道路橋の空間領域での信頼性解析,土木学会論文集第334号,pp.79-88,1983年6月.
- 9) 篠塚正宣・松村駿一・久松雅邦:道路橋における活荷重の確率論的一算定法,土木学会論文集,第344号 / I-1,pp.367-376,1984年4月.
- 10) 藤野陽三・高田一彦:自動車列のフローを考慮した活荷重の確率論的解析,構造工学論文集,Vol.31A, pp.301-311,1985年4月.
- 11) Peir,J-C and C.A.Cornell:Spatial and Temporal Variability of Live Loads,ASCE,Vol.99.No.ST.5, pp.903-922,May,1973.

- 12) 白木渡・松保重之・高岡宣善：シミュレーション手法による道路橋床板の信頼性解析，構造工学論文集 Vol.32A, pp.571-581, 1986 年 3 月.
- 13) Vanmarcke, E.: Random Fields, MIT Press, 1983.
- 14) 岡林隆敏：確率伝達マトリックス法による不規則分布荷重を受けるはりの解析，第 9 回構造工学における数値解析シンポジウム論文集，pp.79-84, 1985 年 7 月.
- 15) 岡林隆敏・山崎秀実・山手弘之：確率有限要素法による不規則分布荷重を受けるはりの解析，構造工学論文集, Vol.32A, pp.509-516, 1986 年 3 月.
- 16) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.

(1986 年 10 月 17 日)