

動的領域における構造物の感度解析

Dynamic Sensitivity Analysis for Structural Systems

菊田 征勇* 松井 邦人** 新延 泰生***

By Yukio KIKUTA, Kunihito MATSUI and Yasuo NIINOBE

Methods of dynamic sensitivity analysis have been developed for structural optimization algorithm in dynamic range. They usually require the derivatives of natural frequencies and natural modes with respect to design variables. Although some studies have been made on this regard, the differentiation of natural modes are still quite complicated and cumbersome. It is also painstaking to develop such softwares for the sensitivity analysis.

This study presents a method to obtain the sensitivities of structural responses by using the algorithm for dynamic analysis without the computation of those derivatives. It is also examined the choice of variables affects an accuracy on the sensitivity analysis.

1. 序論

構造物の設計は、しばしば技術者の経験や直感に基づき、試行錯誤のプロセスを経てなされている。近年最適設計に関する研究の著しい進歩とともに、この試行錯誤のプロセスを、理論的・合理的に行える感度解析手法が開発されてきている。しかしその大半が静的荷重の感度解析に関するものである。Arora 等(1)は、静的感度解析手法を、a) 設計空間法、b) 状態空間法、c) 仮想空間法、に分類し、それらの優劣を最適設計の立場から論議し、状態空間法が一般的に効率的であるとしている。

近年構造設計において、動的解析による照査が要求されることが多くなってきている。その結果、動的応答が設計条件を満たさないとき、設計案の修正が必要となる。このような設計変更には、動的感度解析手法が有用である。この感度解析手法は、動的領域における最適設計の研究において種々の考え方が提案されているが、未だその方法については確立していない。

一般に動的領域で構造物の最適設計を行うと、大型コンピュータを用いても計算時間が膨大となり、容易なことではない。耐震設計では、地震波が非再現性であることもあり、応答スペクトルを用いた最適設計が行われている。これは一質点系の応答スペクトルを用い、絶対値和法あるいは2乗和平方根法を用いて多質点系の最大応答を推定し、感度解析はこの応答を設計変数で偏微分している。一般に、設計を行うには最大

* 工修 国士舘大学教授 工学部土木工学科 (〒154 東京都世田谷区世田谷4-28-1)

** Ph. D. 東京電機大学教授 理工学部建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

*** 工博 東洋大学助教授 工学部土木工学科 (〒350 埼玉県川越市鯨井中野台2100)

応答が求めれば良いのであるが、絶対値和法では過大な応答を得るし、また2乗和平方根を用いて推定される最大応答も、しばしば不正確となるという指摘がある(2)(3)。従ってこれ等から感度係数を求めることはまったく無意味である。

山川等(4)、(5)は動的領域における最適設計の研究で、モーダル解析法および逐次積分法を用いた2通りの感度解析手法を示している。モーダル解析法に基づく感度解析手法では、固有値および固有ベクトルを求める方法だけでなく、それらの設計変数による偏微分が必要になっている。また逐次積分法では、加速度、速度および変位の設計変数による偏微分が必要となる。Feng 等(6)および松井等(7)の研究では、運動方程式の随伴形を用いて感度解析を行っている。この方法では運動方程式を解き終えてから、次に感度解析に必要な計算を行わなければならない。

部分的な設計変更が構造物の動的挙動におよぼす影響に関する研究としては、Fox 等の論文(8)を始めとして、数多くの論文がある(9)―(12)。これらの論文で共通している点は、固有値および固有ベクトルの設計変数による偏微分を必要としていることである。

本研究では、時刻歴解析を行うことを前提に、出来るだけ簡単で効率的な感度解析手法を開発するのが目的である。運動方程式を解いてから感度解析を行うのではなく、両者を平行して解く方法を示す。動的解析のソフトウェアで感度解析を行えるのが大きな特徴である。

2. 動的解析

動的外力を受ける線形多自由度系の運動方程式は、一般にマトリックス表示を用いて次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{b}) \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{b}) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}(\mathbf{b}) \mathbf{z} &= \mathbf{Q}(\mathbf{b}, t) \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0, \quad \dot{\mathbf{z}}(0) = \dot{\mathbf{z}}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$\mathbf{M}(\mathbf{b})$ 、 $\mathbf{C}(\mathbf{b})$ および $\mathbf{K}(\mathbf{b})$ はそれぞれ $N_z \times N_z$ の質量マトリックス、減衰マトリックスおよび剛性マトリックスである。 $\mathbf{b}$ は $N_b \times 1$ のベクトルであり、構造物の断面形状等のパラメータで設計変数と呼ばれている。しかし本研究では次章で述べるように、感度解析の精度向上のための変数変換も含む広義の変数と言うことで、解析変数と呼ぶことにする。 $\mathbf{z}$ 、 $\dot{\mathbf{z}}$ 、 $\ddot{\mathbf{z}}$ はそれぞれ $N_z \times 1$ の変位ベクトル、速度ベクトルおよび加速度ベクトルである。 $\mathbf{C}(\mathbf{b})$ が $\mathbf{M}(\mathbf{b})$ と $\mathbf{K}(\mathbf{b})$ の一次結合で表せるとき、式(1)の解は

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{Y}_i p_i(t) \quad (2)$$

で与えられる。 $\mathbf{Y}_i$ は i 次の振動モードの基準関数、 $p_i(t)$ は基準座標であり、 N_p は考慮した振動モードの個数である。式(2)より、速度ベクトルおよび加速度ベクトルはそれぞれ

$$\dot{\mathbf{z}} = \sum_{i=1}^{N_p} \dot{\mathbf{Y}}_i p_i(t) \quad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{z}} = \sum_{i=1}^{N_p} \ddot{\mathbf{Y}}_i p_i(t) \quad (4)$$

と書くことができる。基準関数の直交性から次のような関係がある。

$$\mathbf{Y}_i^T \mathbf{M} \mathbf{Y}_i = m_i, \quad \mathbf{Y}_i^T \mathbf{K} \mathbf{Y}_i = \omega_i^2 m_i, \quad \mathbf{Y}_i^T \mathbf{C} \mathbf{Y}_i = 2 h_i \omega_i m_i \quad (5)$$

2つの相異なるモード $\mathbf{Y}_i$ および $\mathbf{Y}_j$ ($i \neq j$) を含む積はすべて 0 である。また ω_i 、 h_i および m_i はそれぞれ i 次の基準振動の固有円振動数、減衰定数および換算質量である。基準関数および基準座標を利用することにより、式(1)は次に示す N_p 個の独立した微分方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p}_i + 2 h_i \omega_i \dot{p}_i + \omega_i^2 p_i &= \frac{1}{m_i} q_i(b, t) \\ p_i(0) &= p_{i0}, \quad \dot{p}_i(0) = \dot{p}_{i0} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} q_i(b, t) &= \mathbf{Y}_i^T \mathbf{Q}(b, t) \\ p_{i0} &= \mathbf{Y}_i^T \mathbf{z}_0 / \mathbf{Y}_i^T \mathbf{Y}_i \\ \dot{p}_{i0} &= \mathbf{Y}_i^T \dot{\mathbf{z}}_0 / \mathbf{Y}_i^T \mathbf{Y}_i \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である。式(6)を解くと次式のようになる。

$$\begin{aligned} p_i(t) &= e^{-h_i \omega_i t} \left\{ p_{i0} \cos \omega_{D_i} t + \frac{\dot{p}_{i0} + h_i \omega_i p_{i0}}{\omega_{D_i}} \sin \omega_{D_i} t \right\} \\ &+ \frac{1}{m_i \omega_{D_i}} \int_0^t q_i(b, \tau) e^{-h_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{D_i} (t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

ただし

$$\omega_{D_i} = \omega_i \sqrt{1 - h_i^2} \quad (9)$$

である。式(8)を微分すると

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= e^{-h_i \omega_i t} \left\{ \dot{p}_{i0} \cos \omega_{D_i} t - \frac{(h_i \dot{p}_{i0} + \omega_i p_{i0})}{\sqrt{1 - h_i^2}} \sin \omega_{D_i} t \right\} \\ &+ \frac{1}{m_i} \int_0^t q_i(b, \tau) e^{-h_i \omega_i (t-\tau)} \cos \omega_{D_i} (t-\tau) d\tau \\ &- \frac{h_i}{m_i \sqrt{1 - h_i^2}} \int_0^t q_i(b, \tau) e^{-h_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{D_i} (t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

となる。式(8)および(10)を式(6)に代入し、 $\ddot{p}_i$ について解くと

$$\begin{aligned} \ddot{p}_i(t) &= \frac{1}{m_i} q_i(b, t) - \omega_i (2 h_i \dot{p}_{i0} + \omega_i p_{i0}) e^{-h_i \omega_i t} \cos \omega_{D_i} t \\ &+ \frac{\omega_i}{\sqrt{1 - h_i^2}} \{ -(1 - 2 h_i^2) \dot{p}_{i0} + h_i \omega_i p_{i0} \} e^{-h_i \omega_i t} \sin \omega_{D_i} t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2 h_i \omega_i}{m_i} \int_0^t q_i (l_b, \tau) e^{-h_i \omega_i (t-\tau)} \cos \omega_{D_i} (t-\tau) d\tau \\
& - \frac{(1-2 h_i^2) \omega_i}{m_i \sqrt{1-h_i^2}} \int_0^t q_i (l_b, \tau) e^{-h_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{D_i} (t-\tau) d\tau \quad (11)
\end{aligned}$$

となる。式(8)、(10)および(11)を式(2)-(4)に代入することにより、 $\mathbf{z}$ 、 $\dot{\mathbf{z}}$ および $\ddot{\mathbf{z}}$ が計算できる。

3. 動的感度解析

3. 1 感度解析の定式化

変位や部材力は一般に、 l_b と $\mathbf{z}$ の関数 $\phi_j (l_b, \mathbf{z})$ 、($j=1, 2, \dots, N_\phi$) で表すことが出来る。 l_b および $\mathbf{z}$ がそれぞれ δl_b および $\delta \mathbf{z}$ だけ変化すると、 ϕ_j は

$$\delta \phi_j \doteq \frac{\partial \phi_j}{\partial l_b} \delta l_b + \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{z}} \delta \mathbf{z} \quad (12)$$

だけ変化する。ここで、 $\partial \phi_j / \partial l_b$ および $\partial \phi_j / \partial \mathbf{z}$ は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial l_b} &= \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial b_1}, \frac{\partial \phi_j}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial \phi_j}{\partial b_{N_b}} \right] \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{z}} &= \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial z_1}, \frac{\partial \phi_j}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial \phi_j}{\partial z_{N_b}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる行ベクトルである。

$\delta \mathbf{z}$ を δl_b で表すことができると、式(12)の $\delta \phi_j$ は

$$\delta \phi_j = \Lambda_j \delta l_b \quad (14)$$

と書ける。 Λ_j は動的感度係数である。 $\delta \mathbf{z}$ を δl_b で表すためには、通常、式(2)を用いて

$$\delta \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{N_D} \{ \delta \mathbf{Y}_i p_i (t) + \mathbf{Y}_i \delta p_i (t) \} \quad (15)$$

と表す。ここに、 $\delta \mathbf{Y}_i$ および $\delta p_i (t)$ は

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{Y}_i &= \frac{\partial \mathbf{Y}_i}{\partial l_b} \delta l_b \\ \delta p_i &= \frac{\partial p_i}{\partial l_b} \delta l_b \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

である。式(15)および(16)より $\delta \mathbf{z}$ と δl_b の関係を求めるには、式(16)の第1式のように、固有ベクトル $\mathbf{Y}_i$ の設計変数 l_b に関する偏微分係数を計算する必要がある。

本研究では、この偏微分係数の計算を行わずに $\delta \mathbf{z}$ と δl_b の関係を導いた。 $\delta \mathbf{z}$ と δl_b の間には、式(1)の第1式から

$$M \delta \ddot{\mathbf{z}} + C \delta \dot{\mathbf{z}} + K \delta \mathbf{z} = H(t) \delta \mathbf{b} \quad (17)$$

の関係がある。ただし

$$H(t) = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial M}{\partial \mathbf{b}} \ddot{\mathbf{z}} - \frac{\partial C}{\partial \mathbf{b}} \dot{\mathbf{z}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{z} \quad (18)$$

また式(17)の初期条件は、式(1)の第2式および第3式から

$$\delta \mathbf{z}(0) = \delta \dot{\mathbf{z}}(0) = 0 \quad (19)$$

となる。式(17)の左辺は、式(1)の運動方程式と微分演算子は同じであるので、式(17)の解はこの運動方程式と同じ固有ベクトル $\mathbf{Y}_i$ を用いて、式(1)を解く場合と同様に

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{z} &= \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{Y}_i \delta \bar{\mathbf{p}}_i \\ \delta \dot{\mathbf{z}} &= \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{Y}_i \delta \dot{\bar{\mathbf{p}}}_i \\ \delta \ddot{\mathbf{z}} &= \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{Y}_i \delta \ddot{\bar{\mathbf{p}}}_i \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

と書くことができる。 $\delta \bar{\mathbf{p}}_i$ は式(15)中の $\delta \mathbf{p}_i$ と異なるため $\bar{}$ が付されている。式(20)を式(17)に代入し左から $\mathbf{Y}_i^T$ を掛け、固有ベクトルの直交性を用いると、次式に示すような $\delta \bar{\mathbf{p}}_i$ に関する N_p 個の独立した2階の微分方程式となる。

$$\delta \ddot{\bar{\mathbf{p}}}_i + 2h_i \omega_i \delta \dot{\bar{\mathbf{p}}}_i + \omega_i^2 \delta \bar{\mathbf{p}}_i = \frac{1}{m_i} \mathbf{Y}_i^T H(t) \delta \mathbf{b} \quad (21)$$

その初期条件は、式(19)および(20)を用い、式(7)の第2および第3式と同様に処理すると

$$\delta \bar{\mathbf{p}}_i(0) = \delta \dot{\bar{\mathbf{p}}}_i(0) = 0 \quad (22)$$

となる。式(21)の右辺の形を考慮すると、解は次式のように表せる。

$$\delta \bar{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{S}_i^T(t) \delta \mathbf{b} \quad (23)$$

式(23)を式(21)に第入し、 $\delta \mathbf{b}$ が任意のベクトルであることを考慮すると、式(21)は次式のようになる。

$$\ddot{\mathbf{S}}_i^T + 2h_i \omega_i \dot{\mathbf{S}}_i^T + \omega_i^2 \mathbf{S}_i^T = \frac{1}{m_i} \mathbf{Y}_i^T H(t) \quad (24)$$

初期条件は、式(22)から次式のようになる。

$$\mathbf{S}_i^T(0) = \dot{\mathbf{S}}_i^T(0) = 0 \quad (25)$$

式(24)を式(25)の条件のもとで解くと、 $\mathbf{S}_i^T(t)$ は

$$\mathbf{S}_i^T(t) = \frac{1}{m_i \omega_{D_i}} \int_0^t \mathbf{Y}_i^T H(\tau) e^{-h_i \omega_i(t-\tau)} \sin \omega_{D_i}(t-\tau) d\tau \quad (26)$$

となる。式(23)を式(20)の第1式に代入すれば

$$\delta \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{V}_i \mathbf{S}_i^T \delta \mathbf{b} \quad (27)$$

となる。更に式(27)を式(12)に代入することにより、式(14)中の $\mathbf{A}_j$ を

$$\mathbf{A}_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{z}} \left(\sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{V}_i \mathbf{S}_i^T \right), \quad (j=1, \dots, N_\phi) \quad (28)$$

と表すことができる。

ϕ_j は節点変位 $\mathbf{z}$ と断面形状パラメーター $\mathbf{b}$ (断面積や断面2次モーメント) の陽な関数であり、従って ϕ_j を偏微分して、 $\partial \phi_j / \partial \mathbf{z}$ および $\partial \phi_j / \partial \mathbf{b}$ を容易に求めることができる。また同様に、式(18)の右辺の $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ および $\mathbf{K}$ も $\mathbf{b}$ の陽な関数であるので、 $\mathbf{b}$ に関して容易に偏微分できる。これに対し、式(15)を用いる場合には、 ϕ_j の偏微分を求めるのに必要な前述の手順に加え、さらに、固有値および固有ベクトルを $\mathbf{b}$ に関して偏微分しなければならない。この偏微分の計算は複雑であり、かなりの労力を必要とする(8)、(10)。

3. 2 $(\partial \mathbf{C} / \partial \mathbf{b}) \mathbf{z}$ の影響

運動方程式(1)の中で減衰マトリックスの考え方はかならずしも定まっているとは言えない。a) $\mathbf{C}$ を $\mathbf{K}$ と $\mathbf{M}$ の線形結合と考えて式(1)を解く方法、あるいは b) モーダル解析で、モードの次数に関係なく減衰率を一定と考えて応答を求める方法、等がある。このように、運動方程式において $\mathbf{C}$ があいまいであるため、それを設計変数に関して偏微分すると更にあいまいなものとなる。本研究では a) の方法で $\mathbf{C} = (2h/\omega_1) \mathbf{K}$ (h : 減衰定数、 ω_1 : 1次の固有円振動数) と考えた剛性比例型の場合に、式(18)中の $(\partial \mathbf{C} / \partial \mathbf{b}) \mathbf{z}$ の項の有無が感度解析結果におよぼす影響について検討した。また b) の方法の場合には $(\partial \mathbf{C} / \partial \mathbf{b}) \mathbf{z}$ の項の計算が不可能となるが、この項をまったく無視した場合に感度解析結果におよぼす影響についても検討した。

3. 3 変数変換の効果

静的荷重下での構造物の応答に関する感度解析は、最適設計のアルゴリズムの中で非常に重要であると考えられている。感度係数を求めるとき、設計変数に関する偏微分を考えるのではなく、変数に適切な変換を行いそれを偏微分することにより、感度係数の精度が向上することが報告されている(13)(14)。しかし動的感度解析において、このような変数変換がその精度にどのように影響しているか、についてはほとんど研究がなされていない。本研究では、動的応答の感度解析において、変数変換を導入すると感度解析にどのような効果があるかを比較検討した。解析変数として断面積 A 、その逆変数 $1/A$ 、断面2次モーメント I およびその逆変数 $1/I$ を考慮している。

4. 数値計算例と考察

3章で誘導した感度解析手法の理論式を検証するため、4種類の構造モデルの解析を行い、その理論の妥

当性を確認した。以下の解析例において、各部材のヤング係数 E および質量 ρ はすべて同一で、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、 $\rho = 0.00785 \text{ kg/cm}^3$ であり、初期変位および初期速度はともに 0 である。また 4. 2-4. 5 における例題では、各部材とも断面積の基準値は 50.00 cm^2 である。

感度解析の精度の検証は、基準断面を有する系（基準系）の応答が最大となっている時刻で行っている。これは、ここで考慮した部材断面積の変動幅では、断面積を変更した系（摂動系）の応答の最大値が現れる時刻と基準系の応答の最大値が現れる時刻との差は非常に小さいため、摂動系の応答はどちらの時刻においてもほとんど同じであるからである。このことは計算結果で確認している。

4. 1 2質点系モデル

簡単な地盤・構造物モデルとして、文献(6)に示されている例題を用いた(図1)。この文献では、2個の固有値が近接する場合、2乗和平方根法は応答を過大に推定しすぎることを指摘している。表1に示すように、質量と剛性を変えた2ケースについて感度解析を行った。ケース1は固有値の分離が良いが($\omega_1 = 10.71 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 28.03 \text{ rad/s}$)、ケース2の固有値は大変近接している($\omega_1 = 17.05 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 17.60 \text{ rad/s}$)。外力としては E1 Centro 波(NS成分)を最大加速度 100 Gal として用いた。また減衰定数は各モードとも $h = 0.10$ とする。剛性は $k_i = 3EI_i / l_i^3$ とし、 $I_i = A_i^2$ と仮定している(A_i : 部材の断面積、 l_i : 部材長、 $i=1, 2$)。 A_i がそれぞれ 2%, 5%, 10% 増加した場合について結果を表2に示す。

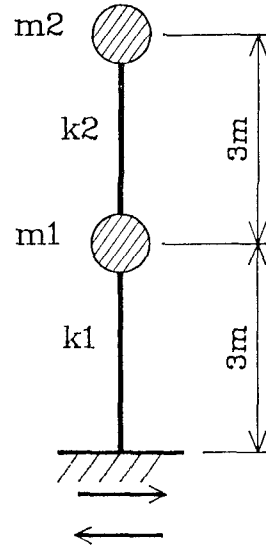


図1 2質点系モデル

表2 2質点系モデルの変位

区分	設計変数	設計変数の変化率	質点1		質点2	
			摂動系の計算値 cm	計算値に対する推定値の比	摂動系の計算値 cm	計算値に対する推定値の比
ケース1	A1	0.02	1.354	0.994	2.297	0.997
		0.05	1.281	0.997	2.243	1.000
		0.10	1.150	1.011	2.117	1.021
	A2	0.02	1.409	0.999	2.303	0.998
		0.05	1.431	0.999	2.273	0.996
		0.10	1.462	1.003	2.221	0.993
ケース2	A1	0.02	0.7446	0.995	2.778	0.996
		0.05	0.6775	0.988	2.631	1.005
		0.10	0.5608	0.982	2.286	1.067
	A2	0.02	0.7884	1.000	2.778	0.996
		0.05	0.7883	1.000	2.630	1.007
		0.10	0.7882	1.000	2.285	1.072

表1 2質点系モデル

	ケース1	ケース2
m1	0.1 t	100 t
m2	0.1 t	0.1 t
k1	30 tf/cm	30000 tf/cm
k2	30 tf/cm	30 tf/cm

感度解析の精度は、基準系における応答の計算値および感度解析の結果を用いて振動系の応答の推定値を求め、これを振動系の応答の計算値で除した比で評価している。ケース1およびケース2ともに、非常に良い推定値が得られている。

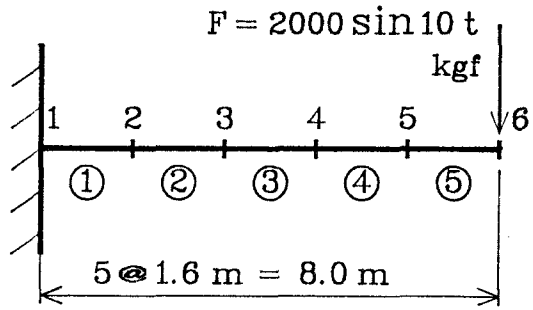


図2 片持ばり

4. 2 片持ばり

図2に示すように、片持ばりの自由端に $F = 2000 \sin 10t$ kgf の外力が作用するものとする。動的解析を行うため、片持ばりを5要素に分割し、有限要素法を用いた離散系で運動方程式を定式化している。なお質量マトリックスはコンシステント・マスを用い、減衰マトリックスは剛性比例型 $C = (2h/\omega_1)K$ で、 $\omega_1 = 19.90$ rad/s, $h = 0.05$ として式(1)を解いている。剛性マトリックス中に用いられる断面2次モーメント I_i は断面積の2乗に比例するもの、すなわち $I_i = \alpha A_i^2$ ($\alpha = 1.00$, $i = 1, 2, \dots, N_b$) と考えている。3. 3 で述べた4種類の解析変数で感度解析を行い応答を推定した結果が表3 aおよび3 bに示されている。この結果から次のことが言える。

a) 断面積の変化量が20%になると推定値の精度が悪くなるが、部分的な断面変更の場合には、全体的な変更に比べ、比較的精度がよい。

b) 変位の推定値に比べモーメントの推定値の精度がよいが、これは静定構造物であるため、剛性の影響がほとんどないためである。

表 3 a 片持ばりのモーメント

設計変数	設計変数の変化率	振動系の計算値 $\times 10^7$ kgf. cm	解析変数と計算値に対する推定値の比			
			A	1/A	I	1/I
A1	0.05	0.21661	0.998	0.999	0.997	0.999
	0.10	0.21308	0.993	0.997	0.991	0.998
	0.20	0.20754	0.974	0.989	0.966	0.996
A5	0.05	0.22313	1.000	0.999	1.000	0.999
	0.10	0.22550	1.000	0.998	1.001	0.997
	0.20	0.23042	0.998	0.992	1.002	0.989
A1-A5	0.05	0.21701	0.999	1.000	0.998	1.000
	0.10	0.21365	0.995	0.999	0.993	1.000
	0.20	0.20800	0.983	0.996	0.975	1.002

表 3 b 片持ばりのたわみ

設計変数	設計変数の変化率	振動系の計算値 cm	解析変数と計算値に対する推定値の比			
			A	1/A	I	1/I
A1	0.05	80.770	0.993	0.997	0.992	0.999
	0.10	76.254	0.975	0.989	0.967	0.995
	0.20	69.152	0.904	0.961	0.869	0.984
A5	0.05	86.979	1.000	0.999	1.000	0.999
	0.10	87.820	1.000	0.998	1.000	0.997
	0.20	89.572	0.998	0.992	1.002	0.990
A1-A5	0.05	76.954	0.989	0.995	0.986	0.998
	0.10	69.153	0.956	0.982	0.941	0.994
	0.20	56.743	0.811	0.929	0.740	0.978

c) モーメントに関しては解析変数の影響がほとんどないが、変位に関してはその影響が大きく、 $1/I$ の精度が一番良い。

4. 3 門型ラーメン

図3に示すような門型ラーメンの感度解析を行った。外力は、節点3に水平方向に $F = 2000 \sin 30t$ kgf が作用している。柱部材およびはり部材をそれぞれ2要素に分割し、合計6要素として動的解析を行っている。なお質量マトリックスおよび減衰マトリックスは4.2と同様で、

$\omega_1 = 72.49 \text{ rad/s}$ および $h = 0.05$ である。要素1の断面積がそれぞれ5%、10%、20%増加したとき、節点3の水平変位と節点1のモーメントについて、感度解析結果から得た推定値と解析的に求めた計算値との比を表4に示す。20%程度の部分的な断面積変更では、解析変数の如何にかかわらず、精度良い結果を得ている。

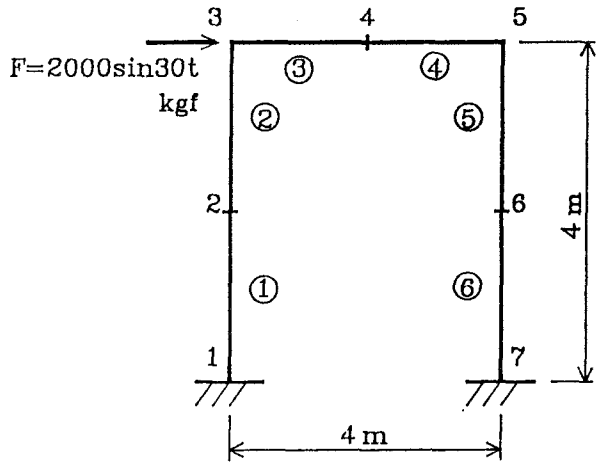


図3 門型ラーメン

表4 門型ラーメン

区分	設計変数	設計変数の変化率	振動系の計算値	解析変数と計算値に対する推定値の比			
				A	$1/A$	I	$1/I$
変位	A1	0.05	1.6980 cm	0.999	1.001	0.998	1.002
		0.10	1.6458 cm	0.997	1.003	0.994	1.006
		0.20	1.5478 cm	0.988	1.012	0.974	1.022
モーメント	A1	0.05	$0.29071 \times 10^6 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$	1.001	0.999	1.002	0.998
		0.10	$0.30196 \times 10^6 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$	1.002	0.995	1.006	0.992
		0.20	$0.32328 \times 10^6 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$	1.009	0.985	1.024	0.975

4. 4 2層2スパンラーメン

図4に示すようなラーメン構造の感度解析を行った。外力は、節点7に水平方向に $F = 2000 \sin 100t$ kgf が作用している。動的解析では、柱およびはりそれぞれ1要素とし、合計10要素を用いている。なお質量マトリックスおよび減衰マトリックスは4.2と同様で、 $h = 0.05$ および $\omega_1 = 130.68 \text{ rad/s}$ である。要素2の断面積がそれぞれ5%、10%、20%増加したとき、節点7の水平

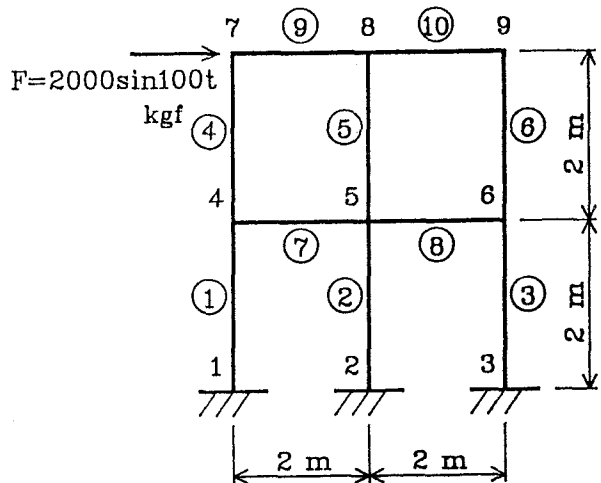


図4 2層2スパンラーメン

変位および節点2のモーメントにおよぼす影響をそれぞれの計算値と比較して、表5に記している。このような部分的変更では、変位およびモーメントともに推定値の精度が良いが、特に解析変数として $1/A$ あるいは $1/I$ を用いると、計算値とほぼ一致するほどの精度が得られている。

表5 2層2スパンラーメン

区分	設計変数	設計変数の変化率	振動系の計算値	解析変数と計算値に対する推定値の比			
				A	$1/A$	I	$1/I$
変位	A2	0.05	0.7279 cm	0.998	1.000	0.997	1.001
		0.10	0.7027 cm	0.992	1.000	0.988	1.003
		0.20	0.6584 cm	0.970	1.000	0.952	1.012
モーメント	A2	0.05	0.24675×10^6 kgf. cm	1.000	0.999	1.001	0.998
		0.10	0.25394×10^6 kgf. cm	1.002	0.997	1.005	0.994
		0.20	0.26751×10^6 kgf. cm	1.008	0.989	1.020	0.981

4. 5 感度解析におよぼす $(\partial C / \partial b) z$ の影響

動的解析では、減衰マトリックスを、レーリー型、質量マトリックス比例型または剛性マトリックス比例型として解析する方法、あるいは減衰マトリックスの形にとらわれずにモーダル解析を行い、すべてのモードに対して減衰定数を一定と考え応答解析を行う方法がある。後者の場合、減衰マトリックス C は陽に定義されない。また前者の場合でも、 C そのものの根拠があいまいであることを考えると、それを解析変数で偏微分することはまったく意味がないと思われる。そこで、式(18)において $(\partial C / \partial b) z$ の項を無視した場合、感度解析にどの程度影響するかを調べることにした。構造モデルとしては一番複雑な図4のモデルを用いる。表6は 4. 4 と同様 $C = (2h / \omega_1) K$ とし、式(18)の $(\partial C / \partial b) z$ の項を無視して計算した結果である。また表7は、すべてのモードで減衰定数一定 ($h = 0.05$) とし、式(18)の $(\partial C / \partial b) z$ の項を削除して感度解析を行った結果である。いずれの場合も $(\partial C / \partial b) z$ が感度解析におよぼす影響は非常に小さいことが分かる。

表6 2層2スパンラーメン ($(\partial C / \partial b) z$ の項無視)

区分	設計変数	設計変数の変化率	振動系の計算値	解析変数と計算値に対する推定値の比			
				A	$1/A$	I	$1/I$
変位	A2	0.05	0.7279 cm	0.998	1.000	0.998	1.001
		0.10	0.7027 cm	0.993	1.001	0.989	1.004
		0.20	0.6584 cm	0.973	1.002	0.955	1.014
モーメント	A2	0.05	0.24675×10^6 kgf. cm	1.001	1.000	1.002	0.999
		0.10	0.25394×10^6 kgf. cm	1.004	0.998	1.006	0.996
		0.20	0.26751×10^6 kgf. cm	1.011	0.992	1.023	0.984

表7 2層2スパンラーメン(減衰定数一定)

区分	設計変数	設計変数の変化率	振動系の計算値	解析変数と計算値に対する推定値の比			
				A	1/A	I	1/I
変位	A2	0.05	0.7278 cm	0.999	1.000	0.998	1.001
		0.10	0.7026 cm	0.994	1.001	0.989	1.004
		0.20	0.6584 cm	0.973	1.002	0.956	1.014
モーメント	A2	0.05	0.24683 x10 ⁶ kgf.cm	1.001	1.000	1.002	0.999
		0.10	0.25403 x10 ⁶ kgf.cm	1.003	0.998	1.007	0.995
		0.20	0.26759 x10 ⁶ kgf.cm	1.011	0.991	1.023	0.983

5. 結論

固有値および固有ベクトルの設計変数(あるいは解析変数)による偏微分を求めることなく、動的解析と平行して効率的に感度解析を行う方法を開発し、4種類の構造モデルを解析してその妥当性を確認した。その結果から次のように結論を下せる。

a) 解析に使用した固有値および固有ベクトルを用い、それらの設計変数に関する偏微分を求めることなく、精度良く感度解析が行える。

b) ランダム波に対する応答の感度解析は、この例題では、固有値の分離が良い場合でもまた近接している場合でも精度良い結果が得られた。複雑な構造物についても同様の結果が得られるかどうか、更に検討する必要がある。

c) 減衰マトリックス C の如何にかかわらず、 $(\partial C / \partial b) \cdot z$ が感度解析の結果におよぼす影響は非常に小さい。

d) 部分的な断面積の変更を行う場合、変位およびモーメントともに感度解析の精度が良い。特にモーメントの精度が良い。

e) 全体的に断面積が変更される場合、変更量が大きくなると感度解析の精度が悪くなる傾向がある。特に変位について著しい。しかし解析変数の選択の仕方により精度を保つことができる。

f) 解析変数として、 A 、 $1/A$ 、 I および $1/I$ の4種類を選び、これらについて検討を行ったが、総合的に見て、 $1/I$ 、 $1/A$ の順序で精度が良い。 A および I を解析変数に選択できるのは、断面積の変更量が十分に小さく、また局所的な場合に限られる。

謝辞：本研究を遂行するに当たり、早稲田大学理工学部機械工学科山川宏教授から有意義なご意見をいただいた。また国土館大学工学部土木工学科大平忠之技術職員には作図や論文作成にあたり多くの手助けを得た。ここに記して深い感謝の意を表します。本研究は一部東京電機大学総合研究所から研究費の補助を受けた。また本研究の計算は国土館大学電子計算機センターの Honeywell DPS 8/70 を用いて行ったことを付記し謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Arora, J.S. and Haug, E. J.: Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization, AIAA Journal, Vol.17, No.9, Sept. 1979, pp.970-974, Nov.1980, pp.1406-1408.
- 2) 荒川直士、川島一彦：動的相互作用解析における応答スペクトル法の適用性の検討、土木技術資料、23-6、1981、pp. 21-26.
- 3) Wilson, E.L., Der Kiureghian, A. and Bayo, E.P.: A Replacement for the SRSS Method in Seismic Analysis, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.9, No.2, 1981, pp.187-194.
- 4) 山川宏、奥村敦史：振動を考慮した構造物の最適設計について（第1報、最適設計の一般的な方法）、日本機械学会論文集、42巻 356号(昭51-4)、pp.1109-1118.
- 5) 山川宏、一文字正幸、大橋淳、浜田薫：構造物の動適応における最適設計、（第2報、最適設計法Ⅱ—モーダルアナリシス法と傾斜を用いた最適化手法を併用した最適設計方法—）、日本機械学会論文集（C編）、48巻 435号（昭57-11）、pp.1750-1758.
- 6) Feng, T.T., Arora, J.S. and Haug, E. J.: Optimal Structural Design under Dynamic Loads, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.11, No.1, 1977, pp.35-53.
- 7) Matsui, K., Kikuta, Y., Niinobe, Y. and Yamamoto, K.: Effects on Optimum Structures Due to Change in External Load Frequency, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.31, University of Tokyo Press, 1981, pp.343-350.
- 8) Fox, R.L. and Kapoor, M.P.: Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, AIAA Journal, Vol.6, No.12, Dec. 1968, pp.2426-2429.
- 9) 吉村允孝：機械構造物の振動特性に関する設計感度解析（周波数応答における感度係数の解析）、日本機械学会論文集（C編）、50巻 449号（昭59-1）、pp.37-43.
- 10) 菊地文雄、相沢龍彦：部分的に設計変更された構造物の自由振動解析法、日本機械学会論文集（C編）、49巻 447号（昭58-11）、pp.1905-1913.
- 11) Nelson, R.B.: Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives, AIAA Journal, Vol.14, No.9, Sept. 1976, pp.1201-1205.
- 12) Tator, D.L. and Kane, T.R.: Multiparameter Quadratic Eigenproblems, Journal of Applied Mechanics, Vol.42, June 1975, pp.478-483.
- 13) 新延泰生、松井邦人、鈴木成：静的感度解析の応用に関する研究、構造工学論文集、Vol.32A（1986年3月）、pp.467-474.
- 14) Uri Kirsh（山田善一、大久保貞二 監訳）：最適構造設計 一概念・方法・応用一、丸善、1983、pp.332-346.

（1985年10月17日受付）