

境界要素法の2次元連続体形状最適化問題 における適用の試み

A TRIAL OF BEM APPROACH TO SHAPE OPTIMIZATION OF 2-DIMENSIONAL ELASTIC BODIES

宮本 裕* 杉本博之** 岩崎正二*** 出戸秀明****

By Yutaka MIYAMOTO, Hiroyuki SUGIMOTO, Shoji IWASAKI and Hideaki DETO

Numerical optimization techniques have seen dramatic advanced of late and applied to practical design problems in various engineering fields. A Fortran program consisting of these techniques was created and coupled with the analysis program by BEM (Boundary Element Method). Formerly, the deflection and stress values of the models were calculated by FEM (Finite Element Method). Since the boundary integral equations are solved numerically by BEM, the dimensions of the problem can be reduced by one. This leads to the advantages of less input data and less computation time, in comparison with FEM. We found there is an advantage in using BEM, because the stresses and deflections of models must be repeatedly calculated during optimization. In this paper, we are proposing a total analysis system and computer program coupled with BEM and several optimization techniques. The characteristics of BEM program are as follows. 1. Boundary element is straight and linear. 2. At the corners we can treat double nodes, where deflections are continuous, but stresses are discontinuous, i.e. the stress on one side is not equal to that on the other side. 3. We can calculate not only the displacements and stresses at interior points but also the displacements and stresses on the boundaries. 4. Body forces can be considered. 5. We can consider many different surfaces.

1. まえがき

近年、積分方程式と有限要素法 (FEM) で行なわれる離散化手法を組み合わせた境界要素法 (Boundary Element Method, 以下 BEM と略す) と呼ばれる解析方法が、工学的問題に適用されてきている。BEM は積分方程式を使ってもとのモデルよりもひとつ次元の少ないモデルを計算するので、入力データが少なく、あつかう方程式の元数も少なく、したがって計算時間は短いという利点がある。本報告の理論による BEM のプログラムは次のような特徴がある。①要素内の変位・応力は線形 1 次関数に従って変化する。②自重などの物体力を考慮できる。③応力の急変するかど点に 2 重節点を用いて、計算精度を上げている。④内点の応力のほかに表面力の応力も計算する。⑤境界面が複数の場合にも適用できる。なお FEM の複合構造解析プログラム (ISAP-6) で結果の妥当性を確認した。

*	工博 岩手大学教授	工学部土木工学科	(〒020 盛岡市上田 4 丁目 3-5)
**	工博 室蘭工業大学助教授	工学部土木工学科	(〒050 室蘭市水元町 27-1)
***	工修 岩手大学助手	工学部土木工学科	(〒020 盛岡市上田 4 丁目 3-5)
****	岩手大学教務員	工学部土木工学科	(〒020 盛岡市上田 4 丁目 3-5)

一方これまで最適設計における構造解析の手法としては、FEMが多く用いられてきた。FEMとBEMを比較したとき、必要な入力データは、FEMが全領域の情報が必要であるのに対し、BEMでは基本的には境界上の情報のみが必要である。これは、連続体の形状最適化に利用する時に、BEMがFEMに対して、入力データがより少なくて済み、かつ解くべき方程式の元数が少ないので、形状最適化の繰り返し段階における構造解析の計算時間の短縮化をはかれるなど、有利な条件になる。本論文においては、文献1)の一定要素の2次元弾性問題のプログラムを線形1次要素に拡張し、文献2)の2重点や表面応力の計算などを取り入れ、かつ物体力にも対応するように改良を加えたプログラムに⁴⁾、著者の一人の杉本らが開発した汎用最適設計プログラムADS (Automated Design Synthesis)⁸⁾を結びつけて、この結合プログラムを用いて、2次元弾性問題の簡単な形状最適化問題に応用したので、その結果を数値計算例の中で説明する。なお、2次元弾性体の形状最適化に関しては、他に尾田⁵⁾、長谷川^{6) 7)}らの研究がある。

2. 解析理論

図-1のように x_1, x_2 平面上の領域 Ω を考え、 Ω 内の点を i 、境界 Γ 上の点を j とするなら、2次元弾性問題におけるBEMの基礎関係式は、相反法則などで次式のように示される。

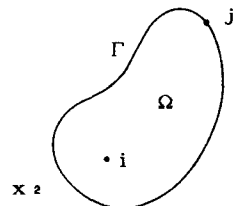


図-1

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} u_k p_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{ik}^* d\Omega \quad (k=1, 2 \quad i=1, 2) \quad (1)$$

ここで、 u_k, p_k および b_k は、それぞれ k 方向の変位、応力度および物体力であり、 u^i は点 i における i 方向の変位であり、 c^i は点 i における境界の状態を示す係数である。また u_{ik}^*, p_{ik}^* はそれぞれ、点 i において i 方向に作用する単位力により生じた、点 j における k 方向の変位と応力ベクトルである。これは基本解と呼ばれるもので、平面ひずみの場合は次式で示される。

$$u_{ik}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \Delta_{ik} + \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} \quad (2)$$

$$p_{ik}^* = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \Delta_{ik} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} \right\} - (1-2\nu) \left(-\frac{\partial r}{\partial x_1} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_i \right) \right] \quad (3)$$

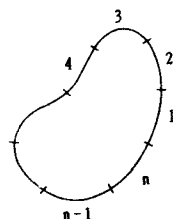


図-2

ただし、 n は物体表面の法線、 n_j は方向余弦、 Δ_{ik} はKroneckerのデルタ、 r は負荷点と考慮点との距離、 ν はポアソン比、 G はせん断弾性係数である。なお平面応力に関する式は、 ν と E をそれぞれおきかえることで誘導される。式(2)、(3)を式(1)に代入して、各項を計算すると、式(4)になる。ただし、 $\{u^*\}$ は u_{ik}^* を成分としてもつ (2×2) のマトリックスであり、 $\{p^*\}$ も同様である。

$$\{c^i\} \{u^i\} + \int_{\Gamma} \{p^*\} \{u\} d\Gamma = \int_{\Gamma} \{u^*\} \{p\} d\Gamma + \int_{\Omega} \{u^*\} \{b\} d\Omega \quad (4)$$

さらに $\{u\}$ と $\{p\}$ は線形要素を仮定した場合、 $\{u\} = [\Phi]^T \{u_j\}$ 、 $\{p\} = [\Phi]^T \{p_j\}$ と表わされる。なお $[\Phi]^T$ は内挿関数と呼ばれるもので、一定要素の場合は不要である。そこで以上の点を考慮して式(4)を n 個の線形要素について考えると次式ようになる。

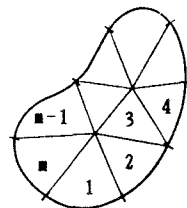


図-3

$$\{c^i\} \{u^i\} + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma} \{p^*\} [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{u_j\} = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma} \{u^*\} [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{p_j\} + \sum_{s=1}^n \left\{ \int_{\Omega} \{u^*\} \{b\} d\Omega \right\} \quad (5)$$

式 (5) に Gauss の数値積分公式を用いて展開すると式 (6) となる。なお実際の数値積分では、境界において Gauss の 4 点積分公式、内部領域においては Gauss の三角形要素における 5 次 7 点積分公式を用いた。

$$\begin{aligned} [c] \{u\} + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^q |G_j| w_k ([p^*] [\Phi]^T)_k \right\} \{u_j\} \\ = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^q |G_j| w_k ([u^*] [\Phi]^T)_k \right\} \{p_j\} + \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{t=1}^e |J_s| w_t ([u^*] \{b\})_t \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $|G_j| = \sqrt{\ell_j}/2$ 、 ℓ_j は境界要素 Γ_j の長さ、 $|J_s|$ は領域要素 Ω_s の面積である。また m は領域 Ω を三角要素に分割した際の分割数であり、 q および e は積分点の個数である。 w_k 、 w_t は積分点での重み係数であり、

$([p^*] [\Phi]^T)_k$ 、 $([u^*] [\Phi]^T)_k$ および $([u^*] \{b\})_t$ は積分点におけるそれぞれの関数値である。

さらに式 (6) はある特定な点 i (考慮点) と、その他の要素 Γ_j との関係式であるので、式 (6) を境界上のすべての節点 n について考えると結局 $2n$ 個の方程式が得られる。

よって式 (6) は次式のように表わされる。

$$[H] \{u\} = [G] \{p\} + \{B\} \quad (7)$$

従来の方法では、かど点においては図-4のように微小距離だけ離れている2点を仮定して計算していたが、この微小距離のとり方に多少の経験を要するし、結果が必ずしもいつも精度が良いとは言えなかった。そこでここでは、かど点の計算には2重節点を用いた。

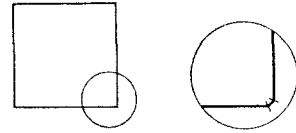


図-4

かど点の計算に用いる2重節点のあつかいについて説明すると次のようになる。図-5のような矩形モデルの場合、節点②、①は同じかど点であるが、それぞれ異なる応力を分担するため2つの節点番号をもつ。ただし変位は等しい。

同様に節点③、④も同じかど点にもうけた2つの節点であり、それぞれ異なる応力をもつが変位は等しい。

式 (7) の $[H]$ 、 $[G]$ はある点と他の点の間の応力と変位から決まる量であるが、一般の境界要素法では、この $[H]$ 、 $[G]$ をすべての点について考えるが、この2重節点の場合はたとえば節点③と④の間の $[H]$ 、 $[G]$ は計算しない。(実際は同じ点であるから) 節点①と③の間の $[H]$ 、 $[G]$ は計算する。節点①と④の間の $[H]$ 、 $[G]$ も計算する。プログラム上の作業が多少煩雑になるが、原理は簡単である。²⁾

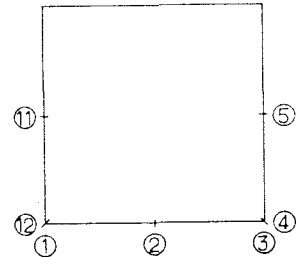


図-5

式 (7) は一般に左辺と右辺の両辺に未知反力と未知変位が存在するが、これを入れ変えて片方の辺にだけ未知数を集めてから、この方程式を未知反力と未知変位について解く。こうして得られた変位を、内点の変位を内点の変位および応力を計算する式、式 (8)、式 (9) に代入して、内点の変位と応力を計算する。

$$\begin{aligned} u^i &= \int_{\Gamma} p u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u p^* d\Gamma + \int_{\Omega} b u^* d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma} [u^*] [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{p_j\} - \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma} [p^*] [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{u_j\} + \sum_{s=1}^m \left\{ \int_{\Omega} [u^*] \{b\} d\Omega \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{uv} &= \int_{\Gamma} D_{uv} p d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{uv} u d\Gamma + \int_{\Omega} D_{uv} b d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma} \{D_{uv}\} [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{p_j\} - \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Gamma} \{S_{uv}\} [\Phi]^T d\Gamma \right\} \{u_j\} + \sum_{s=1}^m \left\{ \int_{\Omega} \{D_{uv}\} \{b\} d\Omega \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $\{D_{uv}\} = \{D_{1uv} \ D_{2uv}\}$ 、 $\{S_{uv}\} = \{S_{1uv} \ S_{2uv}\}$ である。

同様に、得られた変位を式 (10) に代入して、表面応力を計算する。²⁾

$$\sigma_{11} = \frac{1}{1-\nu} (\nu \sigma_{22} + 2G \varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = p_1, \quad \sigma_{22} = p_2 \quad (10)$$

3. 最適設計

最適設計は、問題に応じて種々の定式化が考えられるが、規定の荷重条件下で、その挙動、形状、その他の特性に関する制約（制約条件）を満足し、構造物の良否を判定する量（目的関数）を最小とする構造物の諸元（設計変数）を決定することであるとも定義できる。

すなわち 設計変数： X

$X_i^l < X_i < X_i^u$ X_i^l, X_i^u : 設計変数の下限値, 上限値

目的関数： $F(X) \rightarrow \text{最小値}$

制約条件： $g_j(X) \leq 0$

本研究では、目的関数に連続体の面積、制約条件は、von Mises の相当応力が降伏応力以下であるという条件、設計変数は、形状最適化を考慮する自由面を多項式近似し、その多項式の係数とした。数値計算例の図-13においては、2次放物線の係数を設計変数にとっている。この最適化問題を解く非線形計画法は、極値探索に改良された可能方向法を用いる逐次2次計画法(SQP)⁸⁾を用いた。

以上の最適設計の計算と境界要素法の解析の手順をまとめると図-6のようになる。

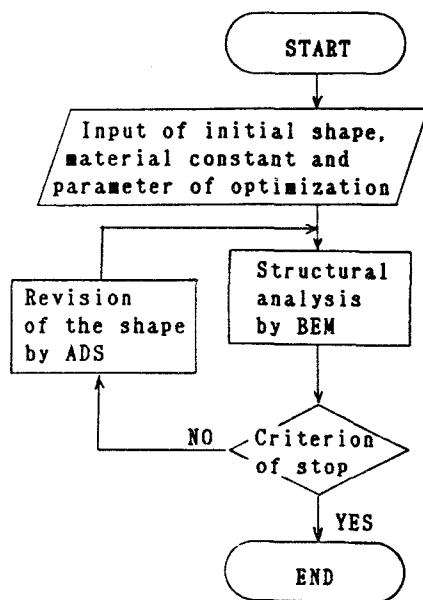


図-6

4. 数値計算例

4-1 境界要素法の計算例

図-7のような一様引張材の場合を考える。変位は底面と側面で、応力は内部中央点でそれぞれ考える。

$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ($2.06 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$), $\nu = 0.23077$, $L = 150 \text{ kg/cm}$ (1760 N/cm), $B = 60 \text{ cm}$, 単位体積重量 $w = 0.00785 \text{ kg/cm}^3$ (0.0769 N/cm^3)である。ここで、ISAP-6は東北大学大型計算機センターの複合構造解析プログラムのことで、FEM理論である。BEMの Linear element は文献3) によるものである。なお、平面力状態とした。

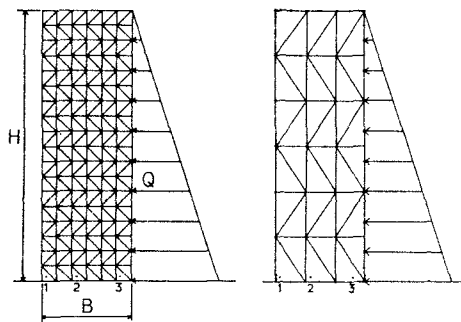
		ISAP-6	B. E. M		
			Constant elem	Linear elem	Present method
1	X-Disp.	-0.7106 $\times 10^{-2}$	-0.7148 $\times 10^{-2}$	-0.7147 $\times 10^{-2}$	-0.7134 $\times 10^{-2}$
	Y-Disp.				
2	X-Disp.	0.3844 $\times 10^{-3}$	0.4403 $\times 10^{-3}$	0.4332 $\times 10^{-3}$	0.4312 $\times 10^{-3}$
	Y-Disp.	-0.4272 $\times 10^{-2}$	-0.4290 $\times 10^{-2}$	-0.4282 $\times 10^{-2}$	-0.4269 $\times 10^{-2}$
3	Stress σ_x	-0.13143	-0.59366	-0.29542	-0.32107
	σ_y	0.1012 $\times 10^3$	0.9943 $\times 10^2$	0.1007 $\times 10^3$	0.1007 $\times 10^3$

図-7 (単位; 変位 cm, 応力 kg/cm^2)

図-8のような三角形分布荷重を受ける擁壁について、底面での応力を考える。

図-8 (c) のBEMの2重点

を用いない Linear element による数値は文献3) によるものである。 $G = 9.45 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ($9.26 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$), $\nu = 0.1$, $Q = 180 \text{ kg/cm}$ (1760 N/cm), $H = 180 \text{ cm}$, $B = 60 \text{ cm}$, 単位体積重量 $w = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ ($2.35 \times 10^{-2} \text{ N/cm}^3$)である。また、平面力状態とした。なお (b) の内部要素は式 (7) の最後の項の計算のために必要で、FEMと違い、未知数を考える必要がないことに注意する。



(a) ISAP-6

(b) BEM

NO.	STRESS	ISAP-6	LINEAR	PRESENT METHOD
1	σ_{11}	-0.21405	-0.07993	-0.09824
	σ_{22}	-1.92640	-1.81677	-1.81446
	σ_{12}	-0.34927	-0.22481	-0.22562
2	σ_{11}	-0.08977	-0.07473	-0.07465
	σ_{22}	-0.80796	-0.68721	-0.68678
	σ_{12}	-0.33896	-0.27119	-0.26998
3	σ_{11}	-0.04709	0.00973	0.01820
	σ_{22}	0.42385	0.66814	0.66644
	σ_{12}	-0.39997	-0.29741	-0.29540

(c) 計算結果 (単位 ; kg/cm^2)

図-8

図-9のような等分布荷重を受ける片持ちばりのモデルについて、BEMとFEMによる固定端および桁下縁での直応力 σ_x の計算結果の比較は図-10のようになった。

なお $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$, $\nu = 0.3$ で平面応力状態とした。

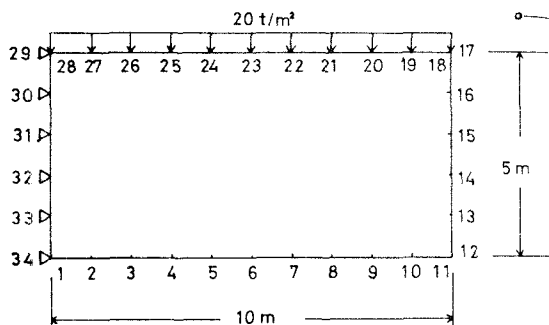


図-9

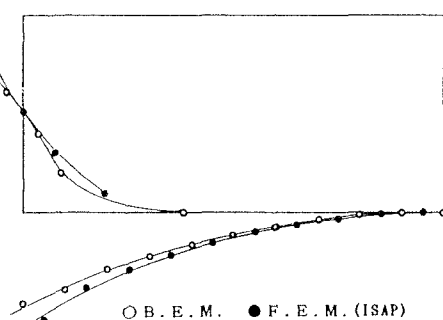


図-10

図-11のようなモデルについて、BEMとFEMによる桁中央での直応力 σ_x の計算結果の比較は図-12のようになった。なお、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg}/\text{cm}^2$, $\nu = 0.3$ で平面応力状態とした。

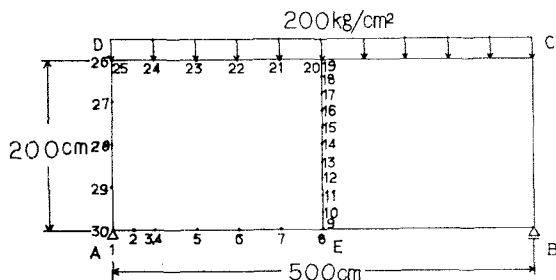


図-11

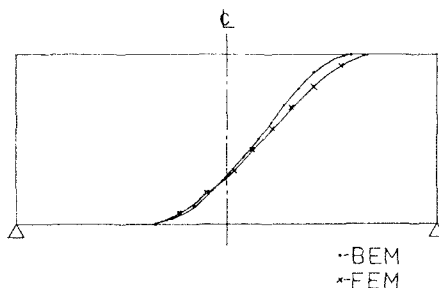


図-12

4-2 形状最適化への応用例

形状最適化の例として、図-11のようなモデルの最適化を行なった。形状最適化の対象としたのは、モデルの下縁AEBの形状であり、目的関数はAEBCDの面積である。下縁AB上のすべての節点の座標を設計変数とすることも可能であるが、ここでは、問題を簡単にするためにAEBを2次多項式に近似し、図-13の X_1 、 X_2 のみを設計変数とした。制約条件式は、各節点の相当応力が降伏点応力 (3200kg/cm^2) 以下とした。つまり $G_i = \sigma_{vi} / \sigma_y - 1 \leq 0$ (σ_{vi} : 節点の相当応力、 σ_y : 降伏点応力) で表わされる。設計変数は、 $0 \leq X_1 - 10 \leq 199\text{cm}$ 、 $40 \leq X_2 \leq 250\text{cm}$ とした。また、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ 、 $\nu = 0.3$ で平面応力状態である。

この程度の最適化問題であれば、すでに発表されている種々の最適化手法が応用可能であるが、ここでは、ADS⁸⁾中のSQP⁹⁾を利用した。結果を図-13に示した。 X_2 の値は下限値である。

5. 結論およびあとがき

BEMによる2次元弾性問題の形状最適化の手法を説明したが、本論文の手法を実用構造物にあてはめた計算例は、現在研究中であり今後発表したい。線形1次要素プログラム作成にあたり、有益な助言をいただいた福岡大学の大西和栄助教授と大浦洋子助手に感謝する。計算には北大、東北大、東大の各大型計算機センターと室蘭工業大学の計算機センターおよび岩手大学の電子計算機室を利用した。

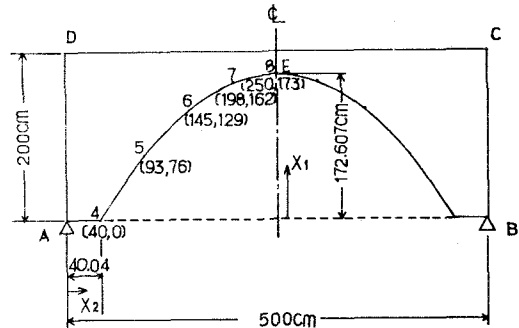


図-13

参考文献

1. Brebbia, C.A.: The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London 1978: 邦訳 神谷紀生・田中正隆・田中喜久昭, 境界要素法入門, 培風館 1980 年.
2. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C.: Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1984: 邦訳 田中正隆, 境界要素法解析—理論と応用, 培風館 1984 年.
3. 佐々木一彦・宮本裕・岩崎正二: 物体力を考慮した境界要素法による二次元弾性問題の解法, 第40回年次学術講演会講演概要, 1985年9月.
4. 三浦登・宮本裕・渡辺昇: 2重節点による2次元弾性問題の境界要素法解析について, 第41回年次学術講演会講演概要, 1986年11月.
5. 尾田十八: 機械構造の形状設計と材料設計問題における最適化の方法論について, 材料システム, 第3巻, 1984年7月.
6. 長谷川明: 連続構造の形状最適化に関する2, 3の考察, 第39回年次学術講演会講演概要, 1984年10月.
7. 長谷川明: 変位制約と応力制約を受ける連続構造の形状改訂方法について, 第40回年次学術講演会講演概要, 1985年9月.
8. Vanderplaats, G.N. and Sugimoto, H.: A General-Purpose Optimization for Engineering Design, Journal of Computer and Structures, Vol. 24, No. 1, 1986.
9. Vanderplaats, G.N. and Sugimoto, H.: Application of variable metric methods for structural synthesis, Engineering Computations, Vol. 2, No. 2, pp. 96-100, 1985.
10. Miyamoto, Y., Sugimoto, H. and Iwasaki, S.: On Study of Shape Optimization of 2-Dimensional Elastic Bodies by BEM, 8th International Conference on Boundary Element Method in Engineering, pp. 403-412, 1986.

(1986年10月17日受付)