

Rayleigh波として特性づけられる弾性層の振動モードについての基礎的研究

A Fundamental Study on Vibration Modes of an Elastic Layer Characterized by Rayleigh Waves

森地 重暉^{*} 大町 達夫^{**} 年縄 巧^{***} 宮井 明世^{****}

By Shigeaki MORICHI, Tatsuo OHMACHI, Takumi TOSHINAWA and Akiyo MIYAI

It is well-known that vibration and wave propagation are equivalent one another. From this point of view, eigenvalue analysis applied to wave propagation in layer will provide us available findings for earthquake engineering problems, if characteristics of standing wave is well understood. For this reason, vibration analyses on an elastic layer on a rigid basement were carried out here, experimentally, theoretically and numerically. After investigations, the followings were obtained. (1) Natural modes of vibrations of the surface layer are characterized by Rayleigh waves in the layer. (2) In the limiting case where wave-length of Rayleigh wave being infinite, Rayleigh wave is reduced to shear or longitudinal vibration of the layer. (3) Due to restraint of displacement at side edges, two vibration modes are accounted to be superposed.

1. はじめに

表層内を伝播する地震波に関する検討は地中構造物、ライフラインシステム等の耐震性を究明するに当たり基本的である。このような観点から地震動の^{1) 2) 3)}アレー観測が盛んに行なわれ、得られた強震記録が波動論的に究明されつつある。

ところで、波動伝播に対する究明方法としては実地震観測の他に模型実験並びに数値解析法がある。波動実験では波動の発生、波動現象の把握等、実験実施の上で困難を伴うことが多い。又、波動問題を数値解析的に行なう場合、模型端部での波動の反射の問題に対処して⁶⁾viscous boundaryや⁷⁾transmitting boundaryなどの特別な工夫を必要とする。一方、振動実験や数値的な固有値解析ではそれらの実施は容易であるが、検出されるのは定常波で模型端部境界の影響を受けている。

-
- * 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (千葉県野田市山崎東亀山 2641)
 - ** 工博 東京工業大学助教授 大学院総合理工学研究科 (横浜市緑区長津田町 4259)
 - *** 工修 東京工業大学助手 大学院総合理工学研究科 (横浜市緑区長津田町 4259)
 - **** 工修 北陸日本電気ソフトウェア(株) (金沢市片町1-6-13、明治生命金沢片町ビル)

しかし、発生する定常波の性質が明らかになれば、実験的または数値的な固有値解析によりそのような波動が構造物等に及ぼす影響を調査することも可能になる。そのような観点にたち、剛基層上にある弾性層について振動実験解析を行ない地盤模型の水平面内に発生する水平動はLove波に⁸⁾、又、鉛直面内に発生する水平動、上下動はRayleigh波⁹⁾に起因するものであることを示した。本文では、Rayleigh波により特性づけられる振動形について実験的、理論的並びに数値解析的な検討を深めたので、その結果を記述する。

2. 実験

剛基層上の弾性層を実験対象とした。模型材料としては弾性層に対してはアクリルアミドゲル（ポアソン比：0.5）を、又、剛基層に対してはアルミニウム板を用いた。

弾性層は矩形状とし、実験実施上の便宜さを考慮して模型端部境界では変位自由、又は、変位拘束とした。模型寸法、模型端部の境界条件および模型材料の横波速度は表-1、図-1に示されている。模型を振動台上にのせ、模型底部にて定常水平加振した。

Table-1
Dimensions and boundary conditions of models

Model	Height (mm)	Length (mm) (B.C.)	Width (mm) (B.C.)	Shear wave velocity (cm/s)
A	80	600 (Fixed)	80 (Free)	2.1×10^2
B	100	600 (Fixed)	100 (Free)	2.1×10^2
C	80	600 (Fixed)	600 (Fixed)	2.2×10^2

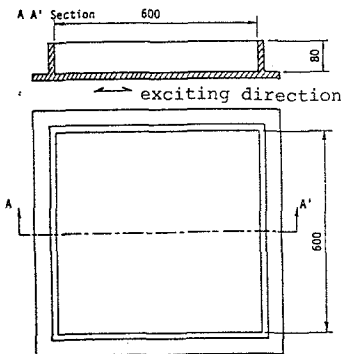


Fig.-1 Dimensions of model-C

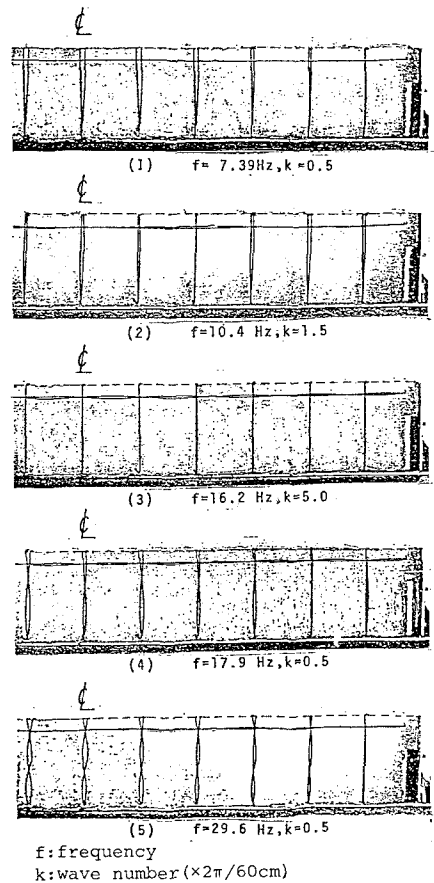


Photo.-1 Experimental results

模型-A，-Bの場合、模型を加振すると低い振動数帯域では水平動があらわれ、振動数の増加と共に水平方向の波動の節の数が増加してゆく。又、上下動は高い振動数帯域で検出される。なお、模型-Cについては、実験上の都合から、加振方向に沿った模型中央部の自由表面における上下動のみ観察した。写真-1には、模型-Aについての実験結果の例が示されている。写真-1-(1)、-(4)及び-(5)のものはせん断振動形に類似していて水平動の鉛直方向にみた波動の節が振動数の増加とともに増してゆく。写真-1-(1)では、中

Table - 2
Experimental results

Model	No.	Frequency f (Hz)	Wave number k ($\times 2\pi/60\text{cm}$)	Wave length λ (cm)	Phase velocity $C = f \times \lambda$ (cm/s)	Dimensionless Wave length λ/H	Dimensionless Phase velocity C/V_s
A ($H = 8.0\text{cm}$)	1	7.39	0.5(H)*	1.2×10^2	8.9×10^2	15	4.2
	2	10.4	1.5(H)	4.0×10	4.2×10^2	5.0	2.0
	3	11.8	3.0(V)**	2.0×10	2.4×10^2	2.5	1.1
	4	14.0	4.0(V)	1.5×10	2.1×10^2	1.9	1.0
	5	16.2	5.0(V)	1.2×10	1.9×10^2	1.5	0.90
	6	17.9	0.5(H)	1.2×10^2	2.1×10^2	15	10
	7	18.2	6.0(V)	1.0×10	1.8×10^2	1.3	0.86
	8	29.6	0.5(H)	1.2×10^2	3.6×10^3	15	17
B ($H = 10.\text{cm}$)	1	6.85	0.5(H)	1.2×10^2	7.9×10^2	12	3.8
	2	9.20	1.5(H)	4.0×10	3.7×10^2	4.0	1.8
	3	10.2	3.0(V)	2.0×10	2.0×10^2	2.0	0.95
	4	12.9	4.0(V)	1.5×10	1.9×10^2	1.5	0.90
	5	14.6	0.5(H)	1.2×10^2	1.8×10^2	12	8.6
	6	14.6	5.0(V)	1.2×10	1.8×10^2	1.2	0.86
	7	17.9	6.0(V)	1.0×10	1.8×10^2	1.0	0.86
	8	23.9	0.5(H)	1.2×10^2	2.9×10^3	12	14
	9	33.3	0.5(H)	1.2×10^2	4.0×10^3	12	19
C ($H = 8.0\text{cm}$)	1	13.3	2.0(V)	3.0×10^2	4.0×10^2	3.8	1.8
	2	15.4	3.0(V)	2.0×10^2	3.1×10^2	2.5	1.4
	3	17.2	4.0(V)	1.5×10^2	2.6×10^2	1.9	1.2
	4	19.5	5.0(V)	1.2×10^2	2.3×10^2	1.5	1.0
	5	22.7	6.0(V)	1.0×10^2	2.3×10^2	1.3	1.0
	6	30.5	5.0(V)	1.2×10^2	3.7×10^2	1.5	1.7

*(H) Horizontal displacement, ** (V) Vertical displacement

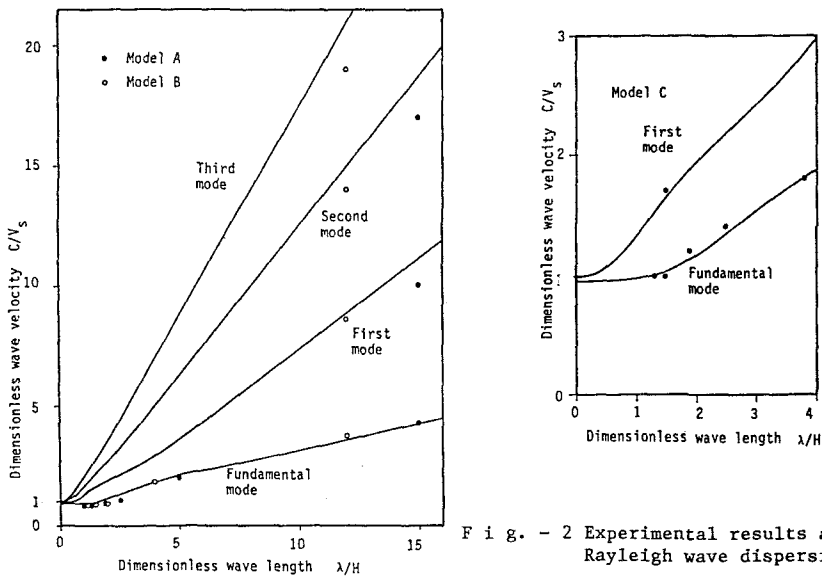


Fig. - 2 Experimental results and Rayleigh wave dispersion curves

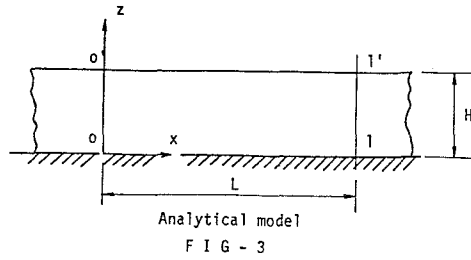
央部に水平方向にみた波動の腹が1つ確認でき、波数 k は $0.5 (\times 2\pi/60\text{ cm})$ となる。写真-1-(2)では、水平方向に3つの腹が確認でき、 $k = 1.5 (\times 2\pi/60\text{ cm})$ となる。又、写真-1-(3)では、水平方向に鉛直成分の波動の腹が10ヶ確認され、 $k = 5 (\times 2\pi/60\text{ cm})$ となる。

実験結果を検討するために、水平方向にみた波動の水平成分または上下成分の節の数より波数を求め波長 λ を算出した。波長 λ と振動数 f との積より波速 C を求め、振動実験より得られた定常波の分散性を調査した。表-2 には、その結果が示されており、 C/V_s (横波速度) と λ/H (模型高さ) との関係が図-2 に示されている。図中には、Rayleigh波の分散曲線が併記されている。理論は実験結果をよく説明すると考えられ、このことは本地盤模型の固有振動モードはRayleigh波として特性づけられることを予測させる。

3. 解析的検討

3.1) 理論的検討

実験結果を検討するために、剛基層上にある弾性層について弾性論的に固有値解析¹⁰⁾を行なった。簡単のために、図-3に示す解析模型の $00'$ 、 $11'$ 線上では、垂直変位のみが拘束されていると仮定した。解析は平面ひずみ状態について行なった。基本方程式は次のようである。



$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \cdot \nabla^2 u \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{G}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial z} + G \cdot \nabla^2 w \quad (2)$$

式中、 x, z : カルテシアン座標系、 u, w : x, z 方向の変位、 $\Delta = \frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz}$ 、 ∇^2 : Laplacian、 ρ : 密度、 G : せん断弾性率、 ν : Poisson 比、 t : 時間。

ポテンシャル ϕ 、 ψ を次式のように定義する。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

(1), (2) 及び(3) 式より次の式を得ることが出来る。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = V_p^2 \cdot \nabla^2 \phi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = V_s^2 \cdot \nabla^2 \psi \quad (4)$$

V_p, V_s は各々、縦波速度並びに横波速度を意味し、次式に示す通りとなる。

$$V_p = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \cdot \frac{G}{\rho} \quad (5)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6)$$

変数分離形で(4) 式を満たす解として次のものがある。

$$\begin{aligned} \phi &= (A \cdot \cosh rz + B \cdot \sinh rz)(a \cdot \cos kx + b \cdot \sin kx) \cdot \exp(i\omega t) \\ \psi &= (C \cdot \cosh sz + D \cdot \sinh sz)(c \cdot \cos kx + d \cdot \sin kx) \cdot \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$ 、 ω は円振動数、 A, B, C, D, a, b, c 及び d は未定係数、又、 r, s 及び k も未定係数で次式に示す関係がある。

$$r^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{V_p^2} = 0, \quad s^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{V_s^2} = 0 \quad (8)$$

境界条件は次に示す通りである。

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=L} = 0 \quad (9)$$

$$\sigma_z|_{z=H} = 0 \quad (10)$$

$$\tau_{xz}|_{z=H} = 0 \quad (11)$$

式中、 σ_z : z 方向の垂直応力、 τ_{xz} : せん断応力である。

(9) 式より次のように未定係数が定まる。

$$k = \frac{n\pi}{L}, (n=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$a = d = 0$$

ここで、次のように未定係数を変更する。

$$b \cdot A = C_1, \quad b \cdot B = C_2, \quad c \cdot C = C_3, \quad c \cdot D = C_4$$

(10), (11) 式を用いて、 C_1, C_2, C_3 及び C_4 が同時に 0 にならないためには、次に示す特性方程式が成り立つ必要がある。

$$\begin{aligned} & 2rk \cdot \left\{ (r^2 - k^2) + \frac{1-2\nu}{\nu} \cdot r^2 \right\} \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{\frac{1-2\nu}{\nu}}{(r^2 - k^2) + \frac{1-2\nu}{\nu} \cdot r^2} \cdot \left(\frac{k^2 + s^2}{2} + rs \cdot \sinh rH \cdot \sinh sH - k^2 \cdot \cosh rH \cdot \cosh sH \right) - \right. \\ & \left. - \frac{k^2 + s^2}{2rsk^2} \cdot (rs \cdot \cosh rH \cdot \cosh sH - k^2 \cdot \sinh rH \cdot \sinh sH) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

(12) 式を考慮し、(13) 式が成り立つような r, s を求めれば、(8) 式を用いて円振動数 ω を求めることが出来る。又、固有振動形は次に示す形をとる。

$$\begin{aligned} u &= \{ C_1 (\cosh rz - \cosh sz) + C_2 (\sinh rz - \frac{sr}{k^2} \cdot \sinh sz) \} \cdot \cos kx \cdot \exp(i\omega t) \quad \dots\dots (14) \\ w &= \frac{r}{k} \{ C_1 (\sinh rz - \frac{k^2}{rs} \cdot \sinh sz) + C_2 (\cosh rz - \cosh sz) \} \cdot \sin kx \cdot \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

式中

$$C_2 = - \frac{2rk \cdot \sinh rH - (k^2 + s^2) \cdot \frac{k}{s} \cdot \sinh sH}{2rk \cdot \cosh rH - (k^2 + s^2) \cdot \frac{r}{k} \cdot \cosh sH} \cdot C_1 \quad \dots\dots\dots (15)$$

又は、

$$C_2 = - \frac{\{ (r^2 - k^2) + \frac{1-2\nu}{\nu} \cdot r^2 \} \cdot \cosh rH - \frac{1-2\nu}{\nu} \cdot k^2 \cdot \cosh sH}{\{ (r^2 - k^2) + \frac{1-2\nu}{\nu} \cdot r^2 \} \cdot \sinh rH - \frac{1-2\nu}{\nu} \cdot sr \cdot \sinh sH} \cdot C_1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

(1), (2), (5), (13) 及び (16) 式において ν を $\frac{\nu}{1+\nu}$ と変更すれば、平面応力状態での同じ意味の式を得ることが出来る。 $2L/n$ と ω/k を各々定常波の波長並びに位相速度とみなし位相速度の分散状況を調べると、それは Rayleigh 波のものであることが分かる。なお、理論解析と実験とでは境界条件が厳密には等しくないが、図-2 にみられる通り理論はよく実験結果を説明すると考えられる。

$k \rightarrow 0$ 、即ち、波長が無限になる場合について考察する。特性方程式(13)式において $k \rightarrow 0$ とすると次式が成立する。

$$\cosh rH \cdot \cosh sH = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

又、(8) 式を用いると次の式を得る。

$$r = i \cdot \frac{\omega}{v_p} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$s = i \cdot \frac{\omega}{v_s} \quad \dots\dots\dots (19)$$

(17) と (18) 式、並びに (17) と (19) 式を考慮して円振動数 ω 、又は振動数 f を求めると次式のようになる。

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{(2n+1)}{4H} \cdot v_p, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{(2m+1)}{4H} \cdot v_s, \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (21)$$

(20),(21) 式によればRayleigh波は $k \rightarrow 0$ 、即ち波長が無限大になると弾性層の縦振動並びにせん断振動の性状を呈し、 $1/4$ 波長則を満足する。 $m=0$ に対する f_m は常に基本モードの無限大の波長をもつ波動の振動数をあたえる。しかし f_n ($n \geq 0$) 及び f_m ($m > 1$) の振動数の値はPoisson 比の大きさに依存するので振動次数の順序を決めることは出来ない。図-2 に示す分散曲線図では、原点と分散曲線上の任意点とを結ぶ線分の勾配は振動数の H/v_s 倍を示す。それ故に、(20),(21) 式に示される f_n, f_m の H/v_s 倍は各モードの分散曲線の漸近線の勾配を意味することになる。

ところで、剛基層上を伝播するLove波の位相速度は次式により与えられる。

$$c_L = v_s \sqrt{1 + \left(\frac{2m+1}{4} \cdot \frac{\lambda}{H}\right)^2}, \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (22)$$

$\lambda/H \rightarrow \infty$ になると

$$f_m = \frac{c_L}{\lambda} = \frac{2m+1}{4H} \cdot v_s \quad (23)$$

上述のことから、(21)式の f_m に関するRayleigh波分散曲線の漸近線はLove波のものと合致することが分かる。 $k \rightarrow 0$ におけるRayleigh波の振動形に関する検討を以下に行なう。振動数が式(12)により表わされる場合について調査する。(14),(15) 式を用い、 k の2乗以上の高次の項を無視すると、 $|u|$ と $|w|$ との振幅比は次の通りとなる。

$$\frac{|u|}{|w|} = \frac{|\cosh rz - \cosh sz + \tanh sH \cdot (1 - \frac{2r}{s} \cdot \frac{\sinh rH}{\sinh sH}) \cdot \sinh sz|}{|\frac{r}{k} \cdot \sinh rz|} \quad (24)$$

(19)及び(21)式を考慮すると、 $\sinh sz$ 及び $\tanh sH$ は各々、 $i \sin((2m+1)z/2H)$ 、 $i \tan((2m+1) \pi/2)$ に収束する。分母も $k \rightarrow 0$ で無限大に発散するが、分子の方がより高次の無限大になり、従って、 $|u| \gg |w|$ となる。以上より、この場合の振動形は弾性層のせん断振動形を示すことになる。(14),(16) 式を用い上述と同様な手順を経ると $|u|$ と $|w|$ との振幅比は次式のようになることが分かる。

$$\frac{|w|}{|u|} = \frac{|\cosh sz - \cosh rz + \tanh rH \cdot (1 - \frac{1-2v}{1-v} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{\sinh sH}{\sinh rH}) \cdot \sinh rz|}{|\frac{s}{k} \cdot \sinh sz|} \quad (25)$$

(18)と(20)式を用いて分子、分母の無限大の次数を調べると $|w| \gg |u|$ となり、又、 w は鉛直方向に正弦的に変動することが分かる。それ故、弾性層は縦振動を呈する。

Table - 3

表-3 には、 $\nu=0.5$ で $\lambda/H=15$ 並びに無限大の場合のモード形が示されている。 $\lambda/H=15$ のものも、せん断振動形と極めて類似しており、モード次数が高くなるにつれて鉛直方向にみた波動の水平成分の節の数が増加している。これらのことは、写真-1-(1),-(4) 及び-(5)においても確認出来る。

又、表-2、図-2 に示される通り、1例を除いて、短い波長の定常波が把握されるのは基本モードの場合のみであり、他のモードでは長い波長のもののみが

Mode shape in a vertical direction($\lambda/H = 15$)

		Fundamental mode		First mode		Second mode	
		Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
Surface ↓ Equally divided depth ↓ Bottom	0	1.000 (1.000)	0.274 (0.000)	-1.000 (-1.000)	0.076 (0.000)	1.000 (1.000)	0.051 (0.000)
	1	0.994 (0.981)	0.222 (0.000)	-0.835 (-0.832)	0.126 (0.000)	0.561 (0.556)	0.007 (0.000)
	2	0.946 (0.924)	0.171 (0.000)	-0.403 (-0.383)	0.159 (0.000)	-0.373 (-0.383)	0.001 (0.000)
	3	0.858 (0.832)	0.123 (0.000)	0.154 (0.195)	0.166 (0.000)	-0.976 (-0.981)	0.040 (0.000)
	4	0.735 (0.707)	0.082 (0.000)	0.651 (0.707)	0.144 (0.000)	-0.716 (-0.707)	0.088 (0.000)
	5	0.580 (0.556)	0.047 (0.000)	0.923 (0.981)	0.101 (0.000)	0.175 (0.195)	0.104 (0.000)
	6	0.400 (0.383)	0.021 (0.000)	0.881 (0.924)	0.053 (0.000)	0.903 (0.924)	0.073 (0.000)
	7	0.204 (0.195)	0.005 (0.000)	0.536 (0.556)	0.015 (0.000)	0.882 (0.832)	0.023 (0.000)
	8	0.000 (0.000)	0.000 (0.000)	0.000 (0.000)	0.000 (0.000)	0.000 (0.000)	0.000 (0.000)

Note(1): * U(z):Horizontal component in a vertical direction
(u)=U(z).cos kx
** W(z):Vertical component in a vertical direction
(w)=W(z).sin kx
{ } :amplitude, x,z:Cartecian coordinate,k:wave number
Note(2): () : $\lambda/H = \infty$

z,W(z) +
└─ x,U(z) +

検出されている。即ち剛基層で定常加振を受ける場合には、モード次数の増加する程、弾性層の応答が少なくなることが分かり、著者の論文に述べられているLove波の場合と同様な傾向を呈する。¹¹⁾

3.2) 数値解析的検討

実験模型の両端部境界では鉛直、水平方向の変位が拘束されているが、理論模型の両端部境界では鉛直方向変位のみが拘束されている。これらの境界条件は各々、実験並びに理論解析上の便宜さを考慮したものであって、実験と理論との厳密な比較は行なわれていない。そこで、境界条件の差異が動的現象に及ぼす影響の程度を調査するために有限要素法を用いて固有値解析を行なった。解析に用いた地盤模型の概要は表-4に示されている。各模型の高さ及び横幅は、8 cm並びに60 cmとした。表中に示した模型-a は理論模型のもので同一である。式-(14)に

みられる通り水平変位 u と鉛直変位 w は kx に関し 90° の位相差があるので、模型-bを、模型-aに対する補足の意味で用いた。模型-cは実験模型と同様である。

本例では、計算模型の横波速度を280cm/secとし、Poisson比を0.25とした。計算には、有限要素法プログラムIsas-II¹²⁾を用いた。

図-4には、模型-aの計算結果の一例が示されている。振動形の上下成分には水平方向に6つの節が、又、鉛直方向に2つの節が確認出来る。又、水平成分は鉛直方向に3つの節をもつことが分かる。これらの振動形は図-4上部に示される通り理論結果と合致している。

Table - 4
Boundary conditions on model edges

Model	Displacements on AA' and BB'		Note
	Vertical	Horizontal	
a	Fixed	Free	
b	Free	Fixed	
c	Fixed	Fixed	

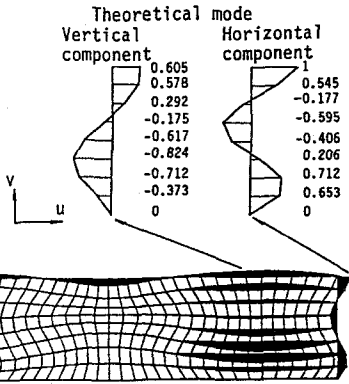


Fig. - 4 A numerically obtained mode shape and theoretical mode shape

模型-a，-b及び-cに生ずる振動形についても同様な傾向があり、特に低いモードではよく合致している。

表-5には、解析結果より得られた各模型の振動形の性状を検討すべく、表-2に示す実験結果に対すると同様な資料整理の方法で計算結果が総括されている。表の第2～4行には各模型の固有振動の低次からの順位が示されている。第8及び9行のA，Bは各々、鉛直方向に数えた振動形の水平並びに鉛直成分の節の数を指し示す。第10行に示す k は水平方向に数えた振動形の水平又は鉛直成分の波数を意味する。表-5の結果をみると、殆どの模型-cの固有振動数には模型-a，-bのものよりやや上がり気味の傾向がみられる。このことは模型-cの両端部の変位拘束に起因するものと考えられる。表-5における右端の2行に示された無次元量の相互関係を図-5に示す。図中にはRayleigh波分散曲線が併記されている。数値解析結果と理論との一致は固有振動形がRayleigh波として特性づけられることを意味すると考えられる。

T a b l e - 5
Numerical results

No.	Mode number			Natural frequency f (Hz)			Number of nodes		Wave number k ($\times 2\pi/60\text{cm}$)	Wave length λ (cm)	Phase velocity $C=f(a \text{ or } b)\times\lambda$ (cm/s)	Dimensionless wave length λ/H	Dimensionless phase velocity C/V_s
	a	b	c	a	b	c	A	B					
1.	1	-	-	8.736	-	-	1	0	0 (H)**	∞	∞	∞	∞
2	2	1	1	9.538	9.538	9.544	1	*	0.5(H)	120.0	1145	15.00	4.089
3	3	2	2	11.61	11.61	11.63	1	*	1.0(H)	60.00	696.6	7.500	2.488
4	4	3	3	14.40	14.40	14.43	1	2	1.5(H)	40.00	576.0	5.000	2.057
5	11	11	10	17.54	17.54	17.59	1	2	2.0(H)	30.00	526.2	3.750	1.879
6	14	14	13	20.84	20.84	20.92	1	2	2.5	24.00	500.2	3.000	1.786
7	17	17	16	24.20	24.20	24.29	1	2	3.0	20.00	484.0	2.500	1.729
8	23	22	21	27.52	27.52	27.65	1	2	3.5	17.14	471.7	2.143	1.685
9	26	25	24	30.74	30.74	30.91	1	2	4.0	15.00	461.1	1.875	1.647
10	31	30	29	33.77	33.77	33.98	1	2	4.5	13.33	450.2	1.667	1.608
11	34	33	32	36.54	36.54	36.79	1	2	5.0	12.00	438.5	1.500	1.566
12	37	36	35	38.99	38.99	39.23	2	2	5.5	10.91	425.4	1.364	1.519
13	43	42	40	41.17	41.17	41.27	2	2	6.0	10.00	411.7	1.250	1.470
14	--	49	--	--	43.14	--	2	2	6.5	9.231	398.2	1.154	1.422
15	--	7	--	--	15.13	--	0	1	0 (V)***	∞	∞	∞	∞
16	6	5	4	15.09	15.09	15.09	2	1	0.5	120.0	1811	15.00	6.468
17	5	4	5	15.04	15.04	15.11	2	1	1.0	60.00	902.4	7.500	3.223
18	7	6	6	15.12	15.12	15.31	2	1	1.5	40.00	604.8	5.000	2.160
19	8	8	7	15.47	15.47	15.75	2	1	2.0	30.00	464.1	3.750	1.658
20	9	9	8	16.14	16.14	16.47	2	1	2.5	24.00	387.4	3.000	1.384
21	10	10	9	17.11	17.11	17.47	2	1	3.0	20.00	342.2	2.500	1.222
22	12	12	11	18.37	18.37	18.71	2	1	3.5	17.14	314.9	2.143	1.125
23	13	13	12	19.85	19.85	20.15	2	1	4.0	15.00	297.8	1.875	1.064
24	15	15	14	21.50	21.50	21.76	2	1	4.5	13.33	286.6	1.667	1.024
25	16	16	15	23.30	23.30	23.50	2	1	5.0	12.00	279.6	1.500	0.9986
26	18	18	17	25.19	25.19	25.32	2	1	5.5	10.91	274.8	1.364	0.9814
27	21	20	19	27.15	27.15	27.24	2	1	6.0	10.00	271.5	1.250	0.9696
28	25	24	23	29.16	29.16	29.22	2	1	6.5	9.231	269.2	1.154	0.9614
29	28	27	26	31.21	31.21	31.27	2	1	7.0	8.571	267.5	1.071	0.9554
30	30	29	28	33.29	33.29	33.36	2	1	7.5	8.000	266.3	1.000	0.9511
31	32	31	30	35.37	35.37	35.46	2	1	8.0	7.500	265.3	0.9375	0.9475
32	35	34	33	37.47	37.47	37.57	2	1	8.5	7.058	264.5	0.8823	0.9446
33	38	37	36	39.55	39.55	39.69	2	1	9.0	6.667	263.7	0.8334	0.9418
34	46	45	43	41.64	41.64	41.82	2	1	9.5	6.316	263.0	0.7895	0.9393
35	--	--	50	--	--	44.00	2	1	10	--	--	--	--
36	19	--	--	25.87	--	--	2	0	0 (H)	∞	∞	∞	∞
37	20	19	18	26.25	26.25	26.24	2	1	0.5(H)	120.0	3150	15.00	11.25
38	22	21	20	27.32	27.32	27.32	2	1	1.0(H)	60.00	1639	7.500	5.854
39	24	23	22	28.92	28.92	28.96	2	1	1.5(H)	40.00	1157	5.000	4.132
40	27	26	25	30.90	30.90	30.95	2	1	2.0(H)	30.00	927.0	3.750	3.311
41	29	28	27	33.14	33.14	33.19	2	1	2.5	24.00	795.4	3.000	2.841
42	33	32	31	35.56	35.56	35.60	2	1	3.0	20.00	711.2	2.500	2.540
43	36	35	34	38.12	38.12	38.13	2	1	3.5	17.14	653.4	2.143	2.334
44	39	38	37	40.75	40.75	40.71	2	1	4.0	15.00	611.3	1.875	2.183
45	--	50	47	--	43.46	43.27	2	1	4.5	13.33	579.3	1.667	2.069
46	48	--	--	42.02	--	--	3	0	0 (H)	∞	∞	∞	∞
47	47	46	44	41.79	41.79	41.83	3	2	0.5(H)	120.0	5015	15.00	17.91
48	44	43	41	41.38	41.38	41.39	3	2	1.0(H)	60.00	2483	7.500	8.868
49	42	41	39	41.06	41.06	41.05	3	2	1.5(H)	40.00	1642	5.000	5.864
50	40	39	38	40.93	40.93	41.00	3	2	2.0	30.00	1228	3.750	4.386
51	41	40	--	41.04	41.04	--	3	2	2.5	24.00	985.0	3.000	3.518
52	45	44	--	41.41	41.41	--	3	2	3.0	20.00	828.2	2.500	2.958
53	49	47	--	42.07	42.07	--	3	2	3.5	17.14	721.1	2.143	2.575
54	50	48	--	43.06	43.06	--	3	2	4.0	15.00	645.9	1.875	2.307

* uncertain,**(H) Horizontal component is predominant,***(V) Vertical component is predominant

表-5 に示されるNo. 1,36及び46の振動形は上下動がなく水平動のみであり、振動数の増加に伴い鉛直方向にみた波動の節が増加している。又、No. 15の振動形では、上下動のみが発生している。数値解析で用いた横波並びに縦波速度の値は各々280cm/sec,485 cm/secであり、これらを用いて1/4 波長則より模型地盤のせん断振動数並びに縦振動数を求めた。

表-6 には、数値解析より得られた固有振動数と共にそれらの値が示されている。各々の振動数の合致は数値解析結果がせん断振動又は縦振動であることを意味しており、波長が無大である場合にも振動形はRayleigh波により特性づけられることを示すものである。

T a b l e - 6
Natural frequency of the modes
with infinite wave-length

No.	Numerical analysis	Quarter wave- length law
1	8.736 (Hz)	8.750 (Hz)
36	25.87	26.25
46	42.02	43.75
15	15.13	15.16

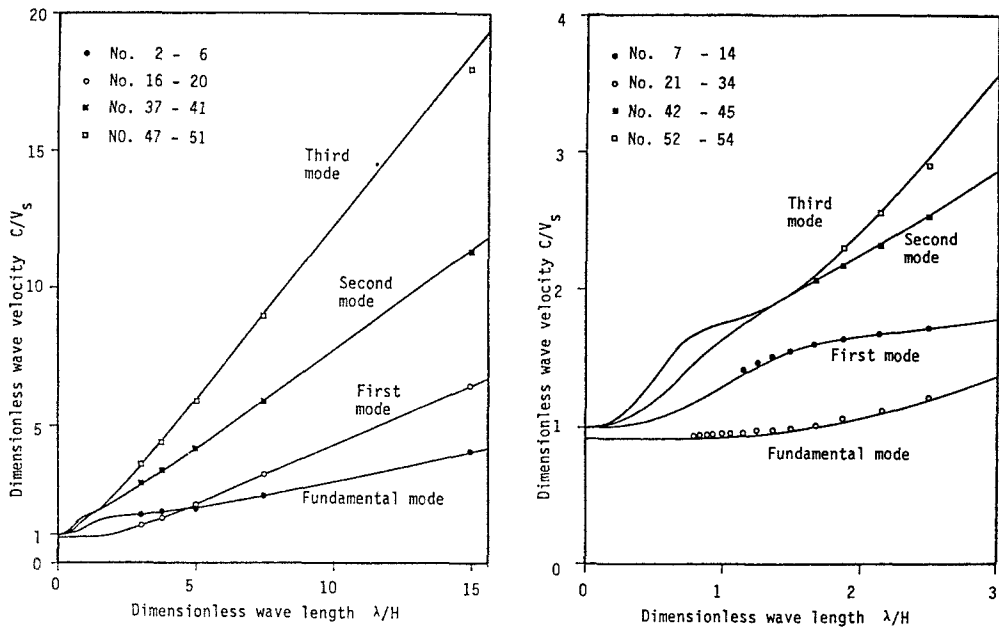


Fig. - 5. Relation between phase velocity and wavelength of the numerically obtained vibration modes

模型-a と模型-c とは境界条件は異なるが、固有振動数の間には顕著な差異はなかった。しかし、振動形については、互いに差異のある場合があるので、以下において検討を加える。図-6-(1),(2),(3),(4) 及び(5) の左側に模型-a の振動形 (No.15 と No.45 のみ模型-b) を、又、模型-c のものを右側に呈示する。なお、模型-b の振動形は模型-a のものと水平方向に kx について 90° の位相差があるだけで本質的な差異はない。図-6-(1) 中の No.1~No.6 は基本モードの定常 Rayleigh 波、No.7~No.13 は 1 次モードのものである。No.1 にはせん断 1 次振動形が発生している。模型-c の No.2~No.12 までの振動モードについては、境界付近以外では模型-a のものとの差異を指摘することは出来ない。模型-c の No.13 の振動形では、水平方向にみた上下動の波数は $6 (\times 2 \pi / 60 \text{ cm})$ であるが、水平動成分には 2 波長の波動が含まれている。この振動モード図の上部には上下動の腹 (山) の位置を黒丸印 (●) で、又、下部には白丸印 (○) で水平動の節の位置を指し示している。図-6-(2) 及び図-6-(3) 中の No.16~No.20 は 1 次モードのもの、No.21~No.34 は基本モードのものである。No.15 は第 1 次縦振動形を示している。No.16~No.34 では、模型-a のものと模型-c のものとの間に殆ど差異を見いだすことは出来ない。図-6-(4) 中の No.36~No.45 は 2 次モード定常 Rayleigh 波である。No.36 はせん断 2 次振動を示す。No.37~No.45 の模型-a では明瞭に振動形の波数が把握出来るが、模型-c には模型-a にない短い波長の波も発生している。このことを明瞭にするために、図-6 において模型-c の各振動モード図の上部では黒丸印 (●) で上下動の腹 (山) の位置を、又、下部では白丸印 (○) で水平動の節の位置を指し示す。図-6-(5) 中に示された No.46~No.54 は 3 次モードである。No.46 はせん断 3 次振動形を示す。模型-c の No.47 のモードでは水平方向に 0.5 波長の水平動の他に、不明瞭ながらそれより短い波長をもつ上下動を確認することができる。No.48,49 では、模型-a と-c との間に振動形について大きな差異はないが、No.50 の振動形では水平方向に 2 波長の水平動の他に 6 波長の上下動が発生しているのが分かる。この振動モード図には、上部では黒丸印 (●) で上下動の腹 (山) の位置を、又、下部では白丸印 (○) で水平動の節の位置を指し示す。

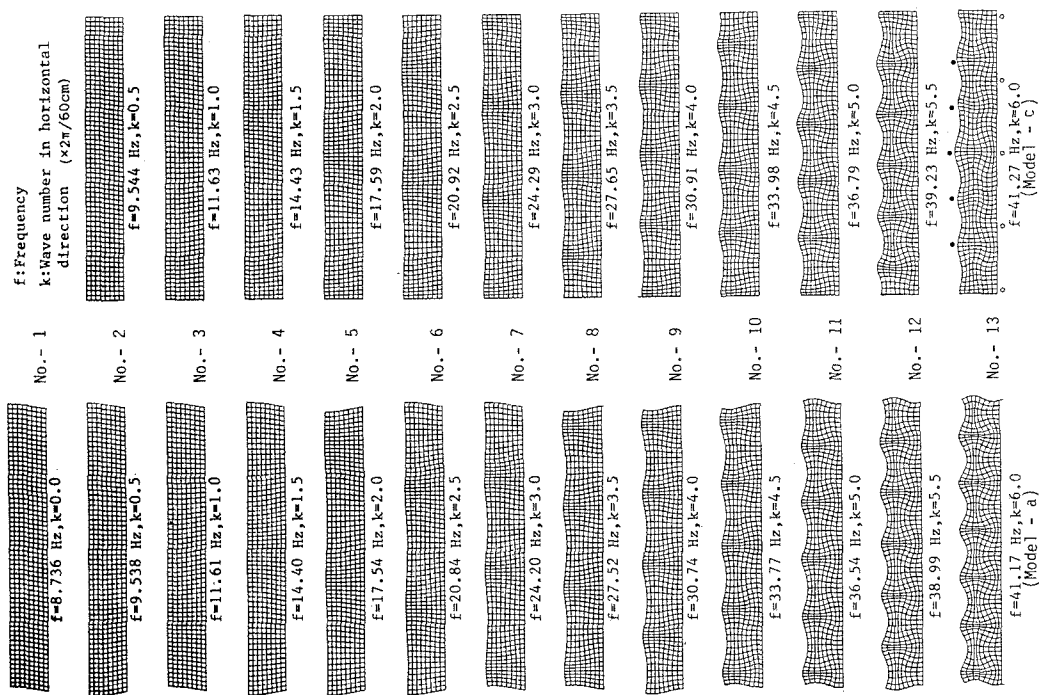


FIG - 6 - (1) Numerical results

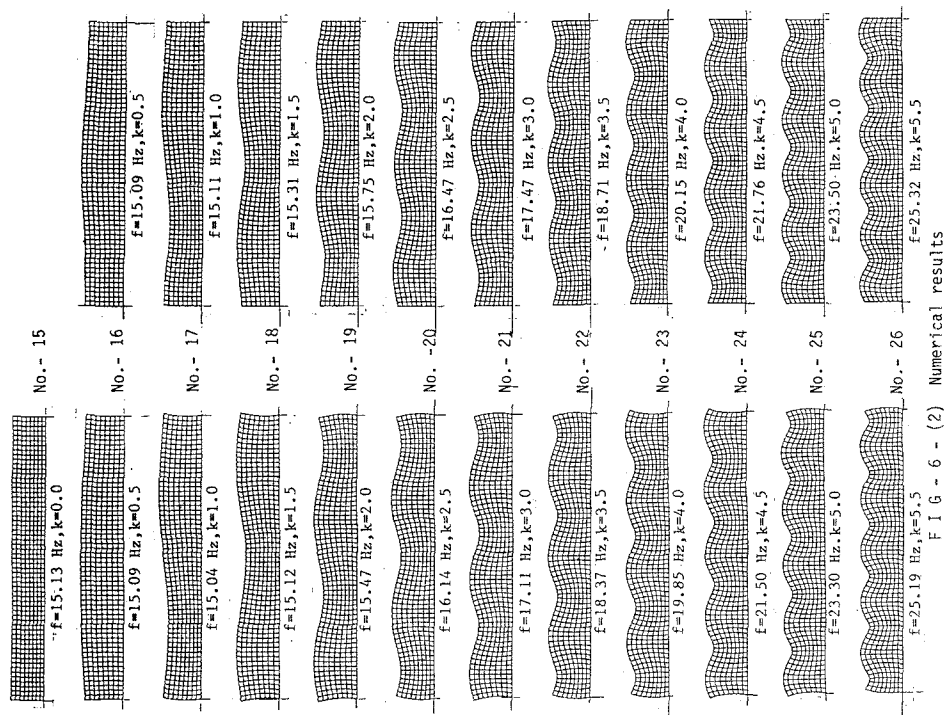


FIG - 6 - (2) Numerical results

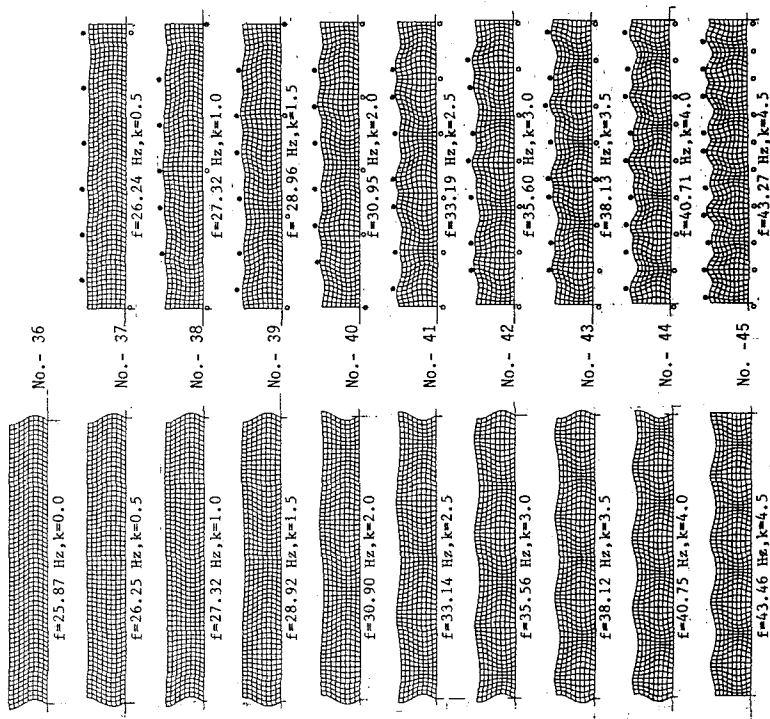


FIG. 6 - (3) Numerical results

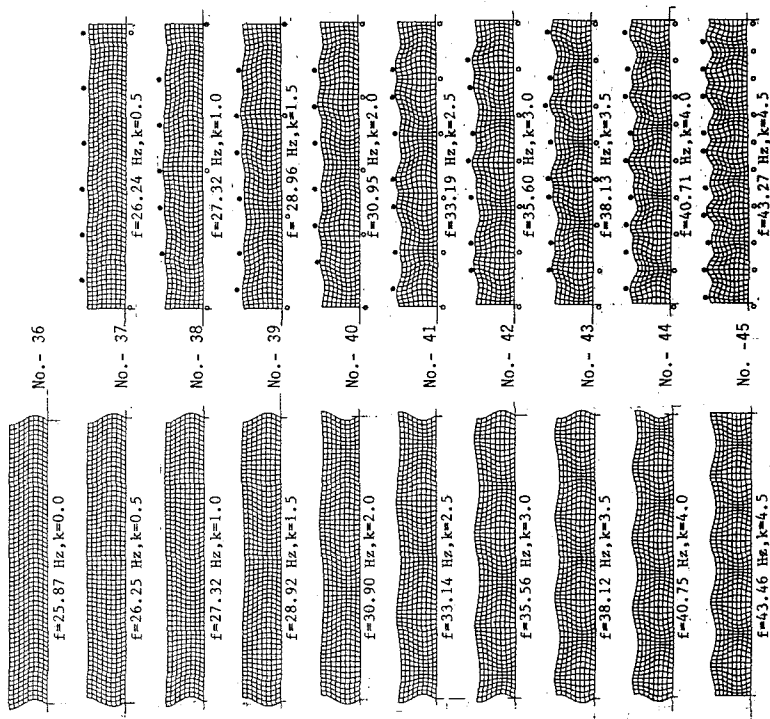


FIG. 6 - (4) Numerical results

T A B L E - 7
Investigation on superpositions of modes

No.	13	37	38	39	40	41	42	43	44	45	50
f (Hz)	41.27	26.24	27.32	28.96	30.95	33.19	35.60	38.13	40.17	43.27	41.00
k	6.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	2.0
k'	2.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	6.0
B	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
k'	2.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	6.0
B	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2

$k, k' (\times 2\pi/60\text{cm})$

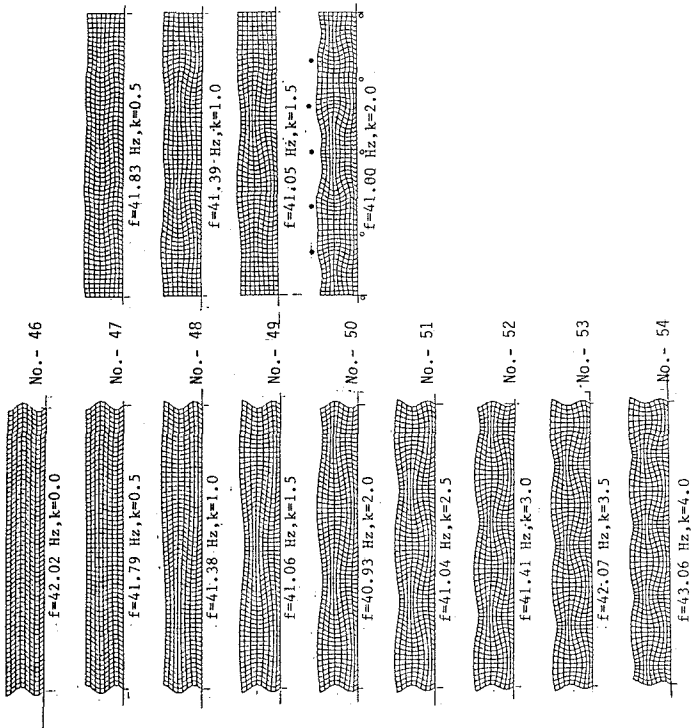


FIG. 6 - (5) Numerical results

上記において模型-a（一部は模型-b）の振動モードと模型-cのものとの差異を述べた。以下において検討を深める。模型-a並びに模型-bに発生する振動形は次式に示すようである。式(14)に示すと同一の記号を用いた。

模型-a

$$\begin{aligned} u &= f_1(z) \cdot \cos k_1 x \cdot \exp(i\omega_1 t) \\ w &= g_1(z) \cdot \sin k_1 x \cdot \exp(i\omega_1 t) \end{aligned} \quad (26)$$

模型-b

$$\begin{aligned} u &= f_1(z) \cdot \sin k_1 x \cdot \exp(i\omega_1 t) \\ w &= g_1(z) \cdot \cos k_1 x \cdot \exp(i\omega_1 t) \end{aligned} \quad (27)$$

式中 $k_1 = (n_1 \pi) / L$ ($n_1 = 0, 1, 2, \dots$) でかつ $f_1(z), g_1(z)$ は z についての関数である。

図-6-(1)中に示されたNo.2~No.12の模型-aの振動モードでは $f_1(z) > g_1(z)$ となっており、それ故、模型-cの境界条件では(26)式よりも(27)式に近い形の振動形が発生したものと考えられる。逆に、図-6-(2)並びに図-6-(3)に示すNo.16~No.35については $f_1(z) < g_1(z)$ となっているので、模型-cでは(26)式に近い振動形が境界条件を満たしそれが発生したものと考えられる。

模型-cに発生する振動形で模型-aのものと同様な差異のあるものは、模型-aの振動モードと別の振動形が重なったものと仮定すると、振動形は次式に示すようである。

(26)式より

$$\begin{aligned} u &= \sum_1^n f_1(z) \cdot \cos k_1 x \cdot \exp(i\omega_1 t) \\ w &= \sum_1^n g_1(z) \cdot \sin k_1 x \cdot \exp(i\omega_1 t) \end{aligned} \quad (28)$$

(27)式より

$$\begin{aligned} u &= \sum_1^n f_1(z) \cdot \sin k_1 x \cdot \exp(i\omega_1 t) \\ w &= \sum_1^n g_1(z) \cdot \cos k_1 x \cdot \exp(i\omega_1 t) \end{aligned} \quad (29)$$

両式中 $k_1 = (n_1 \pi) / L$ である。ここでは、上式中 $n=2$ までの項について検討を加えた。式(28)において、 $f(z)_1 = -f(z)_2$ であり、かつ $\omega_1 = \omega_2$ であれば模型-cの境界条件を満たす。又、式(29)において、 $g(z)_1 = -g(z)_2$ であり、かつ $\omega_1 = \omega_2$ であれば同様な結果となる。前出の通り、No.13, No.37 ~ No.45及びNo.50については、模型-cにおいて模型-aの振動形の他に、黒丸印(●)で示した上下動の腹(No.13のみ白丸印(○)で示した水平動の節)の数より分かる波数 k' をもちかつ同様な固有振動数をもつ振動形が発生するものと考えられる。そのような振動形を表-5より抽出し、No.13, No.37 ~ No.45及びNo.50の模型-cの振動形とともに表-7に併記した。記号は表-5に用いられたと同様な意味をもつ。第5行目と第9行目とに示される通り上下動の鉛直方向の分布は相似していることが分かる。これより式(29)に示すような振動形の重合が生じたものと考えられる。

4. 結び

剛基層上の表面層に生ずる固有振動形について、実験、理論及び数値解析的な検討を試みた。その結果、次のことがいえる。

- (1) 剛基層上にある水平方向に有限長の表面層に生ずる固有振動形はRayleigh波により特性づけられる。
- (2) 剛基層上を伝播するRayleigh波の波長が無限大になると、表面層はせん断振動又は縦振動状態を呈し、 $1/4$ 波長則を満たす。
- (3) 模型両端部の変位拘束は低次の固有振動形にたいしては大きな影響を及ぼさない。
又、影響のある場合も発生する固有振動形は2つの固有振動形の重合わせとして説明できる。

<参考文献>

- 1) Tsuchida, H., Kurata, E. and Hayashi, S.: Observation of Earthquake Response of Ground with Horizontal and Vertical Seismometer Arrays., Proc. of the 6th World Conference of Earthquake Engineering (6th W.C.E.E.), Vol. 1., pp509-515., 1977
- 2) Tsuchida et al.: Observation of Earthquake Response of Ground with Horizontal and Vertical Seismometer Arrays., Proc. of the 7th W.C.E.E., Vol. 2., pp475-482., 1980
- 3) Nakamura, Y. and Saito, A., Meandering Earthquake Motion of Soft Surface Ground., Proc. of 8th W.C.E.E., Vol. 2., pp175-182, 1984.
- 4) Graff, K.F.: Wave Motion in Elastic Solid., Ohio University Press, 1975 .
- 5) The Seismic Exploration Group of Japan: Experimental Studies in generation and Propagation of Seismic Waves., 1976.
- 6) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L.: Finite Dynamic Model for Infinite Media., Proc. of A.S.C.E., Vol. 95, EM 4., pp. 859-877 ., 1969
- 7) Kausel, E., Rosset, J.M. and Waas, G.: Dynamic Analysis of Footings on Layered Media., Jour. of Eng. Mech. Div., A.S.C.E., EM 5, pp. 679-693., 1975.
- 8) Morichi, S., Ohmachi, T. and Toshinawa, T.: Vibration Modes Characterized by Love Waves in an Elastic Layer Overlying a Rigid Basement., Proc., of J.S.C.E., No. 356/I-3, pp. 203-211, Apr., 1985
- 9) 森地 重暉、田村 浩一: 模型地盤に生ずる振動モードについての波動論的考察。第18回地震工学研究発表会講演概要、pp. 137-140, 1985.
- 10) 佐藤 泰夫: 弾性波動論。、岩波書店、1978.
- 11) Ohmachi, T., Morichi, S., and Toshinawa, T.: Simplified Analysis Procedure on Damped Vibration Equivalent to Love Waves in Double-layered Visco-elastic Media., Proc., of J.S.C.E., No. 374/I-6, pp. 239-248, Oct. 1986.
- 12) HITACHI: Manual 8080-7-142-10, 8080-7-112-20, 8080-7-135-10.

(1986年10月17日受付)