

半無限弾性体に密着した円板の軸対称鉛直振動

VERTICAL OSCILLATION OF CIRCULAR DISK WELDED TO ELASTIC HALF SPACE

東原紘道* 宿谷勝**

By Hiromichi HIGASHIHARA and Masaru SHUKUYA

Axisymmetrical vertical vibrations of a circular disk welded to an elastic half space is investigated mathematically. Conventional analytical studies have solely been engaged in the simplified relaxed condition of stress of contact. In the present work, the problem is formulated with a pair of direct integral equations which describe the displacement of the disk directly in terms of the stress of contact. Their integral kernels are separated into a singular term and a regular term. The former is reduced to generalized elliptic integrals while the latter is represented as definite integrals over finite intervals. Finally, the present formula is applied to a rigid disk.

1. 研究の概要

一様な半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンスの理論は、地盤上の構造物の振動特性の研究や、弾性波を用いた物体内部の探査の研究にとって重要な理論的基礎を与えるものである。本研究は円板が弾性体に密着している場合の軸対称鉛直振動モードの解析を行うものである。具体的には、接触面の変位と応力を結びつける積分方程式を誘導し、次にそれを離散化して応力その他を決定する。

剛体円板の軸対称鉛直振動モードは、点加振源に対するLambの研究の直接の拡張として、多くの研究者によって考察されてきた。このうち初期の研究では本来の未知量である接触面の応力を厳密に決定することができず、そのかわり応力分布の形状を仮定し、その比例係数のみを未知量として計算することが行われた。接触応力が等分布するとしたReissnerの研究や、静的な場合の応力分布を動的な場合にも使用したBycroftの研究がよく知られている。¹⁾²⁾ 接触応力の仮定は、Robertsonの創始にかかる dual integral equations 法によってとり除かれた。この方法によると、計算の技巧上導入されたある未知関数に対する第2種フレドホルム型積分方程式が得られる。これを解いて得られた関数の積分変換として本来の未知量である接触応力が決定される。³⁾

この dual integral equations法によって、剛体円板の動的コンプライアンス問題は一応の完成を見たといえることができる。しかしそれでもなおいくつかの改善すべき点が残されている。一つは対象とする円板を

* 工博 埼玉大学助教授 工学部建設工学科 (338 浦和市下大久保255)

** 埼玉大学大学院 " (")

剛体に限らず、変形を許容する理論の形成であり、もう一つは接触条件の拡張である。この後者が本論文の主たる目的である。この点を見てみよう。

上に紹介した理論はすべて緩和された(relaxed)接触条件を仮定している。鉛直モードの場合のこの仮定は、接触応力のうちせん断応力を恒等的に0であるとするものである。この結果、未知量は垂直応力のみとなる。もちろん一般に接触問題の精密な定式化は閉じた形式では不可能であり、その数値計算は非常に困難である。このため解析解が存在する理想的な場合を正確に捉えておくことは、現象の把握にとって重要な意義をもっている。ここに dual integral equations法に代表される動的コンプライアンス理論の実用上の価値があるわけであり、これらの研究が依拠してきた緩和された接触条件は確かに一つの正当な理想化である。しかしこれだけでは明らかに一面的であり、これを補うもう一方の理想化である密着条件に対する解が提示されてはじめて解析的研究は完成を見たといえるのである。この課題は既往の研究では達成されていないものであり、本研究の目標もここに存在する。

緩和された接触条件のもとでは、対象となる量は変位および応力の鉛直成分のみである。これに対し密着条件のもとでは、以下の計算で明らかになるように、変位および応力の水平成分も考慮しなければならない、しかも両成分は連成する。この複雑さが、密着条件の解析が既往の研究から欠落している大きな原因であると考えられる。実際、dual integral equations法の定式の仕方からみて、このような連成モードの扱いは、自然な拡張では不可能と考えられる。

さて dual integral equations法とは別に、筆者らは直接積分方程式と呼ぶ定式化を提唱してきた。これは dual 法のように媒介的な未知関数を挿入することなく、変位と応力を積分変換によって直接に結びつけるものである。そして緩和条件に対しては、剛体に可能なすべてのモードが直接積分方程式の方法によって解かれている。⁴⁾⁻⁷⁾ この直接積分方程式法はいくつかの利点をもっている。その1つが、密着条件の定式化が可能なことであって、そのことは以下の計算で明らかになる。

以下、第2章で直接積分方程式法による定式を行う。すなわち、密着した接触条件のもとで軸対称鉛直振動モードに生じる鉛直方向および水平動径方向の2成分の変位と応力について、これらを結びつける積分変換を求める。この積分変換の積分核は多くの特異点をもつため数学的取扱が困難である。そこで第3章においてこれを変形して計算の容易なものにする。こうして得られた公式を剛体円板に適用した場合の結果を第4章で述べる。これは既に確定されている緩和条件のもとでの解との対比で考察される。

2. 積分方程式の誘導

半無限弾性体を領域: $z \geq 0$ とする円柱座標 (r, θ, z) をとり、この座標系に対応する変位の $z=0$ での値を (u, v, w) と書く。弾性体の自由表面の点加振によって生じる微小振幅の単振動の一般解は殊況によって求められている。これに若干の変形を施せば、軸対称鉛直振動の場合、次のように書かれる。

$$u(r) = \int_0^\infty x J_1(rx) [A(x) - \beta B(x)] dx \quad (1)$$

$$v(r) = 0 \quad (2)$$

$$w(r) = \int_0^\infty J_0(rx) [\alpha A(x) - x^2 B(x)] dx \quad (3)$$

$z=0$ における応力成分を $(\tau_r, \tau_\theta, \sigma)$ と書くと、

$$\tau_r(r) = \mu \int_0^\infty x J_1(rx) [-2\alpha A(x) + (2x^2 - b^2) B(x)] dx \quad (4)$$

$$\tau_{\theta}(r) = 0 \quad (5)$$

$$\sigma(r) = \mu \int_0^{\infty} J_0(rx) [-(2x^2 - b^2)A(x) + 2x^2 \beta B(x)] dx \quad (6)$$

ここに μ はせん断剛性率； $\alpha^2 = x^2 - a^2$ ； $\beta^2 = x^2 - b^2$ ； $a = \omega/V_l$ ； $b = \omega/V_t$ ； ω は加振振動数； V_l と V_t はそれぞれ弾性波の縦波と横波の速さ； J_m は m 次のベッセル関数である。 A と B は未知の関数である。

上に掲げたものは、 $v=0$ ， $\tau_{\theta}=0$ となる解であるが、広義の軸対称振動には、逆に v と τ_{θ} のみが0でないモードすなわち純粹のせん断振動が含まれる。これは他の成分と連成することなく単独で存在するため、計算が比較的容易で、これまで多くの研究がなされてきた。本論文が依拠する直接積分方程式によっても完全に解かれている。⁸⁾そこで以下ではこのモードは考察の対象とはしない。これに対応して τ_r を単に τ と書く。

式(4),(6)はいずれもフーリエ・ベッセルの積分公式を許容するので、簡単に反転することができる。その結果、未知関数 A, B を応力成分で表現することができる。この反転した式を式(1),(3)に代入すると形式的な関係式が次のように得られる。

$$u(r) = \frac{1}{\mu} \int_0^R s [G_{11}(r;s)\tau(s) + G_{12}(r;s)\sigma(s)] ds \quad (7)$$

$$w(r) = \frac{1}{\mu} \int_0^R s [G_{21}(r;s)\tau(s) + G_{22}(r;s)\sigma(s)] ds \quad (8)$$

ここに R は円盤の半径である。また

$$G_{11}(r;s) = b^2 \int_0^{\infty} \frac{x\beta}{F(x)} J_1(rx) J_1(sx) dx \quad (9)$$

$$G_{22}(r;s) = b^2 \int_0^{\infty} \frac{x\alpha}{F(x)} J_0(rx) J_0(sx) dx \quad (10)$$

$$G_{12}(r;s) = - \int_0^{\infty} x^2 \frac{2x^2 - b^2 - 2\alpha\beta}{F(x)} J_1(rx) J_0(sx) dx \quad (11)$$

$$G_{21}(r;s) = G_{12}(s;r) \quad (12)$$

$$\text{ただし } F(x) = (2x^2 - b^2)^2 - 4x^2\alpha\beta \quad (13)$$

これらの被積分関数は、積分路上に極および分岐点という特異点をもつばかりでなく、積分値自体も特異性を有する。したがって式(9)～(11)のままでは、解析的考察もしくは数値的評価にたえるものではない。そこで、複素積分理論を用いて、これらを適切な形に変形する必要がある。

3. 積分核の計算

上式のうち非連成項である式(9),(10)は、従来の緩和された接触条件のもとでも現れているものであり、それは次のように計算されている。^{5) 6)}

$$G_{11}(r;s) = -(1-\nu) \frac{2}{\pi r} K_1\left(\frac{s}{r}\right) - b^2 \frac{\kappa \sqrt{\kappa^2 - b^2}}{F'(\kappa)} H_1(\kappa r, \kappa s) \\ + b^2 \int_0^a x \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{F_1 + F_3} H_1(rx, sx) dx + b^2 \int_a^b x \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{F_1^2 + F_2^2} F_2(x) H_1(rx, sx) dx \quad (14)$$

$$G_{22}(r;s) = -(1-\nu) \frac{2}{\pi r} K_0\left(\frac{s}{r}\right) - b^2 \frac{\kappa \sqrt{\kappa^2 - a^2}}{F'(\kappa)} H_0(\kappa r, \kappa s) \\ + b^2 \int_0^a x \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{F_1 + F_3} H_0(rx, sx) dx + b^2 \int_a^b x \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{F_1^2 + F_2^2} F_2(x) H_0(rx, sx) dx \quad (15)$$

ここで ν はポアッソン比； κ は関数 F がもつ正の実数値をとる唯一の 0 点； F' は F の導関数である。関数 K_0 、 K_1 は一般化された楕円積分であって、次のように定義される。

$$K_0(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 t}} \quad (16)$$

$$K_1(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{x \cos^2 t}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 t}} dt \quad (17)$$

なお式(14)、(15) は $r > s$ に対するものであり、 $s > r$ のときは右辺第 1 項の r と s を交換するものとする。また

$$F_1(x) = (2x^2 - b^2)^2, \quad F_2(x) = 4x^2 \sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}, \quad F_3(x) = 4x^2 \sqrt{(b^2 - x^2)(a^2 - x^2)} \quad (18)$$

さらに

$$H_m(x, y) = G_m(x, y) + i J_m(x) J_m(y) \quad (19)$$

$$G_0(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \left| x \cdot \sin \theta_1 - y \cdot \sin \theta_2 \right| + \frac{1}{2} [J_0(x) N_0(y) + J_0(y) N_0(x)] \quad (20)$$

$$G_1(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \sin \left| x \cdot \sin \theta_1 - y \cdot \sin \theta_2 \right| \\ - \frac{1}{2} [J_1(x) N_1(y) + J_1(y) N_1(x)] \quad (21)$$

$$N_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \cdot \sin \theta) d\theta \quad (22)$$

$$N_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin \theta) d\theta \quad (23)$$

G_{12} もしくは G_{21} は密着条件のもとで初めて発生する項であって、緩和条件のもとでは生じえない形の被積分関数をもっている。このままでは計算は困難であるが、次のように変形される：

$$G_{12}(r;s) = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty x \frac{2x^2 - b^2 - 2\alpha\beta}{F(x)} J_0(rx) J_0(sx) dx \quad (24)$$

こうなると被積分関数に含まれるのは J_0 の積の形であるから、式(10)に適用したのと同じ積分法が使える。その結果次式を得る。

$$G_{12}(r;s) = \pi i \frac{2\kappa^2 - b^2 - 2\sqrt{\kappa^2 - a^2}\sqrt{\kappa^2 - b^2}}{F_1(\kappa)} \kappa^2 H_1^{(2)}(\kappa r) J_0(\kappa s) \\ - 2ib^2 \int_a^b \frac{(2x^2 - b^2)\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{x^2 - a^2}}{F_1^2 + F_2^2} x^2 H_1^{(2)}(rx) J_0(sx) dx \quad (25)$$

ここに $H_1^{(2)}$ は1次の第2種ハンケル関数である。ただしこの表示は $r \geq s$ に対するものである。 $s > r$ のときは式中の r と s を交換するものとする。

核関数 G_{11} および G_{22} の特異点については前掲の文献において述べた。ここでは G_{12} の特異性について検討する。 G_{12} には G_{11} や G_{22} において存在するような $r=s$ における対数型の特異性は含まれない。そしてその特異性は専ら第2種ハンケル関数に由来する。すなわち $r \rightarrow 0$ のとき、 $H_1^{(2)}(\kappa r)$ および $H_1^{(2)}(\kappa s)$ は $0(1/r)$ で発散する。この特異性は G_{12} の実数部分においてのみ生じ、その虚数部分は有界な領域では至るところ正則である。ただしこの特異性は基本方程式(7)、(8)においては何の問題も生じない。なぜならこれらの式に含まれる積分に際しては s がかけられているので、 $r > s$ のとき G_{12} の特異成分は常に s/r の形をとるからである。逆に $s > r$ のときの G_{12} は $s \rightarrow 0$ において $0(1/s)$ となるが、これも s がかけられると $0(1)$ となり発散しなくなる。

関数 G_{12} の数値例をFig.1,2に示す。これは無次元化された振動数 $bR=5$ に対応するものであり、ポアッソン比は0.25である。爾余の積分核の数値例は前掲の文献で与えられているので割愛する。⁵⁾⁶⁾

4. 剛体円板の応答

基本方程式(7)、(8)は解析解をもたないので数値計算が必要である。この離散化手法に関しては、従来の経験によって次のことが知られている。

- ① 変位成分については単純な選点法で十分である。
- ② 応力成分については内挿関数が連続であればよい。

この方法によって離散化された変数をあらためて $\{u\}$, $\{w\}$, $\{\tau\}$, $\{\sigma\}$ と書くと、基本方程式は次のような連立1次方程式になる。

$$\begin{aligned} \{u\} &= [G_{11}]\{\tau\} + [G_{12}]\{\sigma\} \\ \{w\} &= [G_{21}]\{\tau\} + [G_{22}]\{\sigma\} \end{aligned} \quad (26)$$

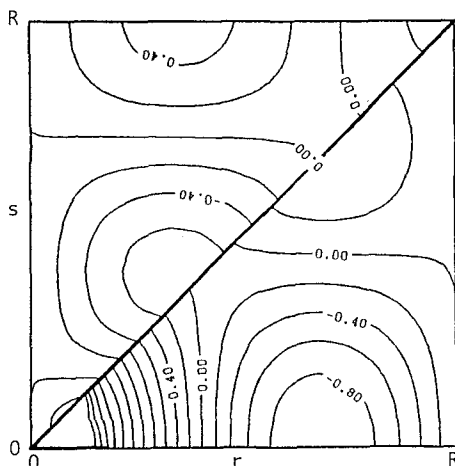


Fig.1 Function $G_{12}(r;s)$:real part

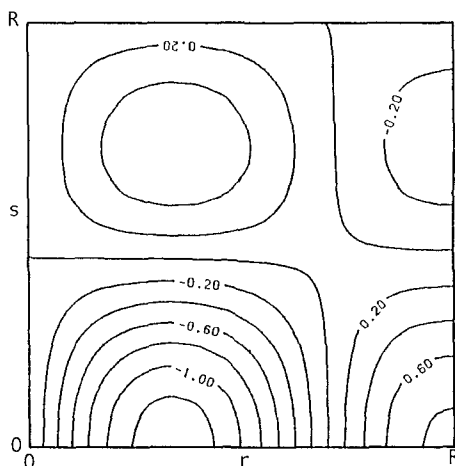


Fig.2 Function G_{12} :imaginary part

ここに $[G_{ij}]$ は積分核を離散化して得られる行列である。

円板が弾性的であるか上部構造を背負っている場合には、その運動方程式が上式と連立する。しかし剛体円板の場合には上式のみによって解が定まる。すなわち剛体の幾何学的条件である次の関係のもとで式(26)を解く。

$$\{u\} = (0, 0, \dots, 0)^T, \quad \{w\} = \delta(1, 1, \dots, 1)^T \quad (27)$$

無次元振動数を逐一変化させてコンプライアンス関数を計算した結果をFig.3-5に示す。

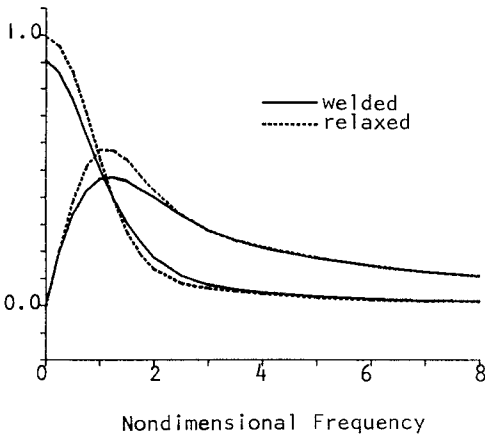


Fig.3 Compliance Functions ($\nu=0.0$)

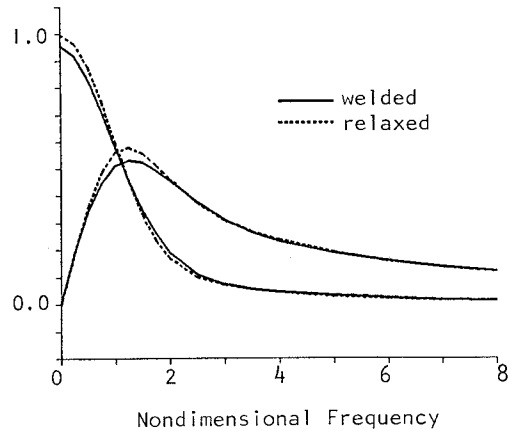


Fig.4 Compliance Functions ($\nu=0.25$)

動的応答の評価のうえで重要な動的コンプライアンス関数 f_1, f_2 は次式で定義される。

$$\frac{\delta}{R} = \frac{P}{\mu R^2} [f_1(bR) + i f_2(bR)] \quad (28)$$

ここに P は円板に与えられるべき加振力の振幅であって、これは式(26)から定まる $\{\sigma\}$ を接触面全体で積分して求められる。

図の横軸は無次元振動数であって、ここでは $[0, 8]$ にわたって計算してある。縦軸はコンプライアンス関数を $4/(1-\nu)$ 倍することによって規格化したものである。それぞれの図は異なるポアソン比 ν に対応する。図中の破線は緩和応力条件に対する解である。上述の規格化によって、無次元振動数が0のとき実数部分に対応する破線は1.0になる。

図中の実線が今回新たに求めた密着条件に対する解である。実線の方が小さな絶対値をもつことは密着条件によって剛性が増加することを示している。

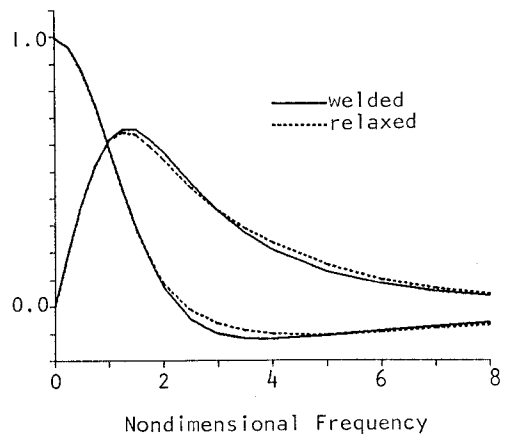


Fig.5 Compliance Functions ($\nu=0.5$)

ν が小さい場合、この効果は低振動数領域で顕著であって、例えば $\nu=0$ のとき約10%に達する。無次元振動数の増加とともにこの効果は減じ、無次元振動数が4をこえる領域ではほとんど消滅する。半無限弾性体为非圧縮性となる $\nu=0.5$ では状況が逆になる。すなわち低振動数では密着条件の効果は小さく、そのかわりに高振動数になってもその効果は維持されている。

つぎに接触応力の分布を示す。Fig.6-7 は垂直応力の絶対値を μ で除して無次元化したものを示す。図中の数字は無次元振動数 bR である。ただし紙面の制約上、両極端とも言うべき $\nu=0$ および $\nu=0.5$ についてのみ示す。

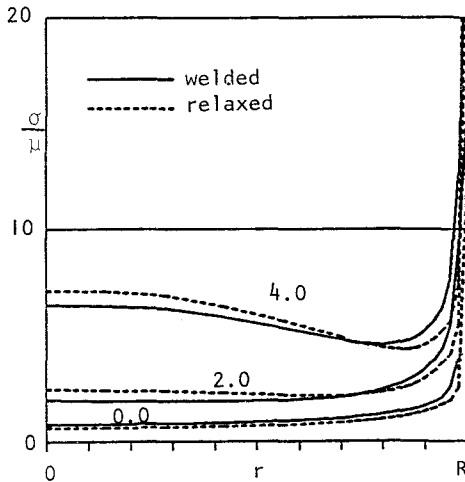


Fig.6 Stress Distribution ($\nu=0.0$)

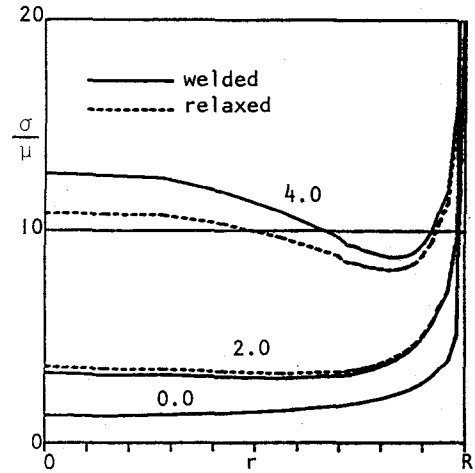


Fig.7 Stress Distribution ($\nu=0.5$)

剛性の増加を示す接触応力の増加は概ね外周部で生じている。しかし $\nu=0.5$ の高振動数域では中心部でも応力の増加が顕著である。

次にFig.8-9 はせん断応力の絶対値を示す。いずれも外周部では著しい増加を見せていて、緩和された応力条件との違いが甚だしい。これに対して内部のせん断応力は概して小さく、接触条件の影響の小さいことが窺われる。これに対して $\nu=0.5$ でしかも高振動数では、内部でもせん断応力の増大が顕著である。

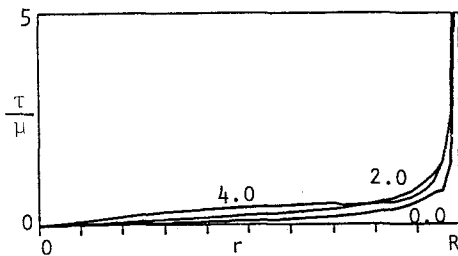


Fig.8 Shearing Stress ($\nu=0.0$)

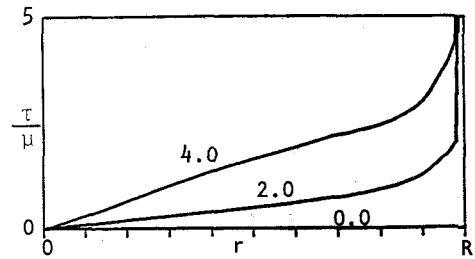


Fig.9 Shearing Stress ($\nu=0.5$)

5. 結論

一様な半無限弾性体の表面に密着している円板の動的コンプライアンス問題を、軸対称鉛直モードについて定式化し、その解を求めた。剛体円板の動的コンプライアンス問題は、既往の研究によって、可能なすべてのモードについて厳密に定式化され、その数値解も得られている。しかしそれはいずれも緩和された応力条件に対してである。接触面が密着している場合の厳密な定式化はこれまで知られていない。

密着条件のもとでは、軸対称鉛直モードは、変位および応力として、鉛直成分のみならず動径方向水平成分を含む。本論文はこれに対する直接積分方程式を連成形式で与えた。次にそれに含まれる積分核を計算して積分方程式自体を扱い可能なものにした。積分方程式中の非連成項は、従来の緩和された応力条件のもとで生じる項に一致する。これに対して連成項は、密着条件で初めて生じるもので、従来知られている積分核にない独特の形をしている。

この積分方程式は適切な離散化手続きののち数値的に解かれる。本論文ではこれを剛体円板に適用して接触応力およびコンプライアンス関数を決定し、従来知られている緩和条件との差を明らかにした。

6. 参考文献

- 1) Reissner, E., Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, Ingenieur-Archiv Band VII, pp.381-396, 1936
- 2) Bycroft, G.N., Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum, Phil. Trans. Royal Society of London Vol.248, A.948, pp.327-368, 1956
- 3) Robertson, I.A., Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid, Proc. Cambridge Philosophical Society 62-A, pp.547-553, 1966
- 4) Higashihara, H., Explicit Green's function approach to forced vertical vibrations of circular disk on semi-infinite elastic space, Journal of Engineering Mechanics, Vol.110, No.10, pp.1510-1523, 1984
- 5) 東原紘道, 半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題 - その1. 軸対称鉛直振動, 日本建築学会構造系論文報告集, 第349号, 50-58頁, 1985
- 6) 東原紘道, 半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題 - その2. 鉛直高次モード, 日本建築学会構造系論文報告集, 第371号, 1987
- 7) 東原紘道, 半無限弾性体上の円板の水平並進振動の直接積分方程式法, 土木学会論文集 第374号, 1-6, 769-776頁, 1986
- 8) Higashihara, H., Explicit Green's function approach to torsionally oscillating circular disk on elastic half space, Theoretical and Applied Mechanics Vol.35, 1987

(1986年10月17日受付)