

面内変動曲げを受ける初期変形をもつ長方形板の動的安定性

Dynamic Stability of an Initially Deflected Rectangular Plate
under Inplane Dynamic Moment

高橋和雄*・小西保則*・川野隆太**・浦川重男***

By Kazuo TAKAHASHI, Yasunori KONISHI, Ryuta KAWANO and Shigeo URAKAWA

In the present paper, the vibration of an initially deflected rectangular plate under sinusoidally time-varying inplane moment is examined from the point of view of dynamic instability. The equation of motion describing the large deflection of the initially deflected plate is analyzed by the Galerkin method. The resulting equations for time variables are integrated by using the Runge-Kutta-Gill method. The dynamic instability regions are analysed by the small deflection theory by neglecting nonlinear terms. The amplitudes of unstable regions are determined by large deflection theory.

Numerical results are presented for various initial deflection shapes and magnitudes. The relation between the initial deflection and dynamic instability is discussed.

1. まえがき

平板に面内変動曲げが作用すると、係数励振（動的不安定現象、パラメーター励振）によって面外振動が励起される。この問題については面外不安定領域（面外不安定振動発生可能領域）の存在および不安定振動の振幅の大きさなど、力学的に十分解明されていない点が認められる。そこで、著者らは、面内変動曲げを受ける長方形板の面外係数励振振動問題を解析的に取り扱い、その力学的特徴を明らかにしてきた¹⁾²⁾³⁾。すなわち、まず微小変形理論により得られる線形理論を用いて、面外不安定振動の存在およびそのメカニズムなどの本質的な特性を把握してきた¹⁾。これより、面内曲げを受ける長方形板の面外不安定領域は振動次数の和が奇数の場合の結合共振が支配的であること、および不安定領域の幅は境界条件、辺長比に無関係に2つの固有振動数が接近している場合に広く、両者が離れている場合には狭いことが明らかになった。線形理論によれば、面外振動は時間とともに発散する振動である。しかし、平板の場合、振幅が板厚程度になると、平板中央面に生ずる面内力のために、その振幅は有限となる。そこで次に、面外不安定振動の振幅を平板の有限変形に関するKarmanの式を用いて、時間応答解析によって求める手法を提案した。これより、2つの固有振動数の和が小さい場合の結合共振ほど、面外振動の振幅は、大きいことを明らかにした²⁾³⁾。

* 工博 長崎大学助教授 工学部土木工学科 〒852 長崎市文教町1-14

* 工博 長崎大学教授 工学部土木工学科 〒852 長崎市文教町1-14

** 長崎大学大学院生 工学部土木工学科 〒852 長崎市文教町1-14

*** 中央コンサルタント㈱ 〒810 福岡市中央区荒戸1丁目1番6号福岡ニッパル3F

以上は、平板に初期変形がない場合であるが面内曲げを受ける平板の面外変形には、初期変形が大きな影響を及ぼすことが知られている。すでに、静的な場合、前田ら⁴⁾によって、面内曲げを受け、かつ初期変形を有する薄板の面外変形解析が行われている。これより、初期変形と面外変形の相関が明確にされている。

繰返し曲げを受ける問題は本質的に動的な問題である。したがって、面外係数励振と初期変形との相関も無視できないものと思われる。このような観点から、動的な場合については、倉西ら⁵⁾が初期変形をもつ薄板が面内変動曲げを受ける場合の面外変形の動的応答を時間応答解析によって評価している。しかし、初期変形と面外係数励振との関係は明確になっていない。そこで、本研究は、初期変形をもつ長方形版の面外係数励振振動を Margurre の式を用いて解析的に明らかにすることを目的としている。すなわち、本題の運動方程式を一般座標に関する連立の非線形 Mathieu の方程式に変換し、時間応答解析によって数値解析する手法を提案するものである。

数値解析において、初期変形を支配するパラメーター(形状、大きさ)のもとに、非線形項を無視して得られる固有振動数、面外不安定領域および非線形項を考慮した場合の最大応答を明らかにする。

2. 基礎式および境界条件

図-1 に示すような長方形板に xy 平面に対して直角方向を z 軸とする。この長方形板の面外方向の変位を $w(x, y, t)$ とする。 $x=0, a$ の 2 辺上に図-1 のように静的曲げモーメント M_0 と変動曲げモーメント $M_t \cos \Omega t$ の和からなる曲げモーメント M が作用する。平板の中央面の力 N_x は次のように表される。

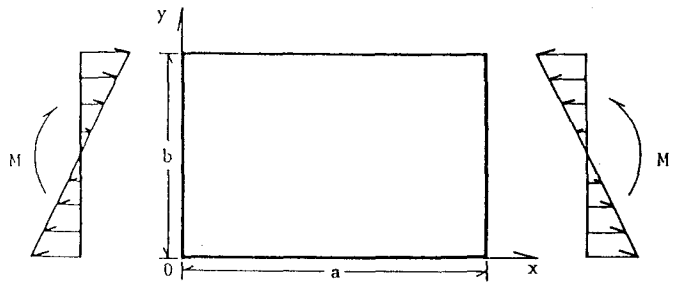


図-1 一般図

$$N_x = \frac{6}{b^2} \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) (M_0 + M_t \cos \Omega t) \quad (1)$$

ここに、 b : 荷重辺の長さ、 Ω : 励振円振動数、 M_t : 変動曲げモーメントの振幅

安定を失った後の初期変形 w_0 をもつ長方形板の曲げ振動の運動方程式は Margurre⁶⁾ の式を用いて次のように表される。

$$L(w, F) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - \frac{6}{b^2} \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) (M_0 + M_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - d \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla^4 F = E \left[\left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\}^2 - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \right] \quad (3)$$

ここに、 ρ : 板の密度、 d : 板厚、 $D = Ed^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$: 板剛度、 E : ヤング率、 ν : ポアッソン比、 F : Airy の応力関数、

板の境界条件は、曲げに対して周辺単純支持、面内変位にたいして固定とする。

$$\text{面外: } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a), \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y=0, b) \quad (4)$$

$$\text{面内: } \int_0^b u dy = 0 \quad (x=0, a), \quad \int_0^a v dx = 0 \quad (y=0, b) \quad (5)$$

ここに、

$$u = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^x \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

$$v = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^y \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial (w + w_0)}{\partial x} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

ここに、 u, v : 面内の x, y 方向の変位。

3. 解法

(1) 解の仮定

式(2)の解を次のように仮定する。

$$w = d \sum_{n=1} T_{Mn}(t) \cdot W_{Mn}(x, y) \quad (6)$$

ここに、 T_{Mn} : 未知の時間関数、 W_{Mn} : 境界条件を満足する座標関数、 $M, n=1, 2, \dots$

式(6)の座標関数 W_{Mn} として静的曲げモーメント M_0 が作用しない長方形板の曲げ振動の基準関数を用いるものとすれば、 W_{Mn} は次のように定義される。

$$W_{Mn} = \sin \frac{M\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7)$$

ここに、 M : x 方向の半波数、 n : y 方向の半波数

また、初期変形も与えられた境界条件を満足しなければならない。本研究は初期変形の影響を評価することを目的とするから、解析的取扱いの容易な次式で仮定する。

$$w_0 = e_0 d W_{GH}(x, y) \quad (8)$$

ここに、 e_0 : 板厚で無次元化された初期変形の大きさ、 $W_{GH} = \sin(G\pi x/a) \cdot \sin(H\pi y/b)$: 初期変形の形状関数、 $G=1, 2, \dots$: x 方向の半波数、 $H=1, 2, \dots$: y 方向の半波数

(2) 応力関数の決定

解析の手順として、先ず式(3)の応力関数 F を式(6), (7), (8)を用いて、式(5)の面内の境界条件のもとに決定しなければならない。式(3)の一般解は次のように表される。

$$F = F_p + F_c \quad (9)$$

ここに、 F_p : 式(6), (8)を式(3)に代入して得られる特解(Appendix A参照)、 F_c : 式(3)の微分方程式の余関数で次の表現を用いる⁷⁾。

$$F_c = A(t)x^2 + B(t)y^2 \quad (10)$$

ここに、 $A(t), B(t)$: 式(5)の境界条件を満足するように決められる時間 t の関数 (Appendix B 参照)。

(3) 時間に関する運動方程式の誘導

運動方程式(2)に式(6), (8)および式(9)を代入して、これにガラーキン法を適用する。すなわち、

$$\int_0^a \int_0^b L(w, F) W_{Mp} dx dy = 0 \quad (11)$$

ここに、 $p=1, 2, \dots$ 。

式(11)の積分を実行すれば、次のような時間関数 T_{Mn} の運動方程式に離散化される。すなわち、

$$\frac{\rho db^4}{D} I_{Mp}^2 \ddot{T}_{Mp} + I_{Mp}^2 T_{Mp} + \frac{6}{D} (M_0 + M_t \cos \Omega t) \sum_{n=1} I_{Mpn} T_{Mn} + \sum_{n=1} \sum_{r=1} \sum_{s=1} I_{Mnrsp} T_{Mn} T_{Mr} T_{Ms} \\ + e_0 \sum_{n=1} \sum_{r=1} I_{MnrGHP} T_{Mn} T_{Mr} + e_0^2 \sum_{n=1} I_{MnGHP} T_{Mn} = 0 \quad (12)$$

ここに、 $I_{Mp}^1, I_{Mp}^2, I_{Mnp}, I_{Mnrsp}, I_{MnrGHP}, I_{MnGHP}$: ガラーキン法の積分項 (Appendix C 参照)。

式(12)のモーメント M_0, M_t 、励振振動数 Ω および時間 t の項を無次元化する (文献 1) 参照)。すなわち、

$$\text{曲げモーメント } M_0, M_t : \bar{M}_0 = M_0 / M_{cr}, \bar{M}_t = M_t / M_{cr} \quad (13-a)$$

ここに、 $M_{cr} = \lambda_{cr} \pi^2 D / 6$: 初期変形がない場合の座屈曲げモーメント、 λ_{cr} : 座屈固有値

$$\text{励振円振動数 } \Omega : \bar{\omega} = \Omega / \Omega_1 \quad (13-b)$$

ここに、 $\Omega_1 = \alpha_1 \pi^2 / b^2 \sqrt{D / \rho d}$: 一次振動の固有円振動数、 α_1 : 一次振動の固有値

$$\text{時間 } t : \tau = \Omega_1 t \quad (13-c)$$

これらの無次元記号を用いれば、式(12)は次のように書き改められる。

$$\ddot{T}_{Mp} + \left(\frac{\Omega_p^M}{\Omega_1} \right)^2 T_{Mp} + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \bar{\omega} \tau) \sum_{n=1} A_{Mpn} T_{Mn} + \sum_{n=1} \sum_{r=1} \sum_{s=1} B_{Mnrsp} T_{Mn} T_{Mr} T_{Ms} \\ + e_0 \sum_{n=1} \sum_{r=1} C_{MnrGHP} T_{Mn} T_{Mr} + e_0^2 \sum_{n=1} D_{MnGHP} T_{Mn} = 0 \quad (14)$$

ここに、 Ω_p^M : 固有円振動数、 $A_{Mnp}, B_{Mnrsp}, C_{MnrGHP}, D_{MnGHP}$ (Appendix D 参照)

式(14)より明らかなように、初期変形の大きさ e_0 の影響は、線形項には 2 次のオーダー、非線形項には 1 次のオーダーで効いてくる。また、初期変形の形状 (G, H) の影響は係数 C_{MnrGHP}, D_{MnGHP} からわかるように固有振動形 (W_{Mn}, W_{Mr}, W_{Mp}) と関係することが予想される。

式(14)に含まれるパラメーターは、初期変形の形状 (G, H) および大きさ e_0 、静的曲げモーメント $\bar{M}_0$ 、変動曲げモーメントの振幅 $\bar{M}_t$ および励振振動数 $\bar{\omega}$ である。特定の初期変形 (G, H, e_0) および静的曲げモーメント $\bar{M}_0$ をもつ長方形板の動的安定性を ($\bar{M}_t, \bar{\omega}$) の組合せのもとに評価することができる。

4. 時間応答解析法

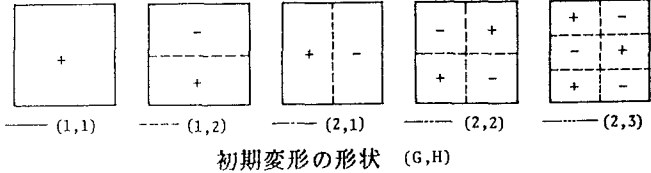
初期変形をもつ長方形板の動的安定性を明らかにするために、式(14)を Runge-Kutta-Gill法を用いて、直接数値積分を行う。計算の自由度については、文献 1) に述べたように、動的不安定現象に現れる不安定振動は、単純共振が 1 自由度系の振動、結合共振が 2 自由度系の連成振動であるから、2 自由度系として取り扱えば十分であることがわかっている。したがって、本研究においても、文献 1) で得られた不安定振動にたいして、式(14)から対応する自由度を取りだし、初期変形の存在を考慮して時間応答解析を行う。動的安定性を明らかにするにあたって、まず、式(14)の非線形項を無視して得られる線形の Mathieu の方程式を用いて、不安定領域を求める¹⁾。次いで、得られた不安定領域の振幅を式(14)を用いて振幅を定める²⁾。なお、時間応答解析にあたって、 $T_{M1} = T_{M3} = 0.01$ 、 $\dot{T}_{M1} = \dot{T}_{M3} = 0.0$ の微小振動の初期条件を与えた。また、板のポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。

5. 固有振動解析

不安定振動が生ずる励振振動数 $\bar{\omega}$ は長方形版の無次元固有円振動数 $\omega_{Ms} = \bar{\Omega}_{Ms} / \Omega_1^2$ (ここに、 $\bar{\Omega}_{Ms}$: 初期変形をもつ場合の固有円振動数、 M : x 方向の半波数、 s : y 方向の半波数、 Ω_1^2 : 初期変形がない場合の最低次の固有円振動数) と密接な関係がある。すなわち、単純共振は $\bar{\omega} = 2\omega_{M_1}/k$ 付近、結合共振は $\bar{\omega} = (\omega_{M_1} + \omega_{M_2})/k$ 付近にそれぞれ生ずる。したがって、不安定領域を計算するのに先立って、固有振動数に及ぼす初期変形の影響を明らかにすることが必要である。

式(14)において、非線形項を無視し、 $\bar{M}_t = 0.0$, $\bar{M}_0 = 0.0$ とすれば、初期変形をもつ長方形板の微小振動の方程式が得られる。この式を初期変形の形状 (G,H) およびその大きさ e_0 をパラメータに固有値解析すれば、固有振動数におよぼす初期変形の影響を評価することができる。正方形板 ($\mu = 1.0$) に対する計算結果を x 方向の半波数 $M=1, 2$ に対して示せば、図-2, 3に示すとおりである。これらの図において、横軸 $\bar{n} = \bar{\Omega}_{Ms} / \Omega_1^2$ は無次元固有円振動数で、縦軸 e_0 は無次元初期変形の大きさである。

図中の記号 (M,s) は ω_{Ms} ，すなわち、 x 方向の半波数 M 、 y 方向の半波数 s の振動形をもつ無次元固有振動数を意味する。また、実線、破線などの線の種類で区別している記号 (G,H) は初期変形の形状を示し、 G, H はそれぞれ、 x, y 方向の半波数に対応する。図-2, 3から明らかなように、平板の固有振動数 n は初期変形の大きさ e_0 の増大とともに高くなる。その割合は初期変形の形状 (G,H) に依存する。初期変形の形状 (G,H) が固有振動形 (M,s) に一致した場合に、すなわち、 $G=M$, $H=s$ の場合に最も大きくなる。



初期変形の形状 (G,H)

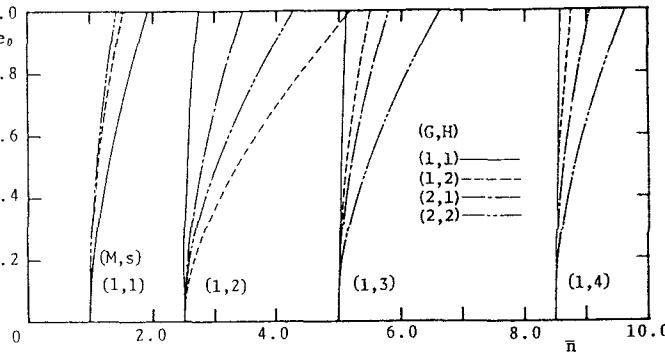


図-2 無次元固有円振動数 ($M=1$)

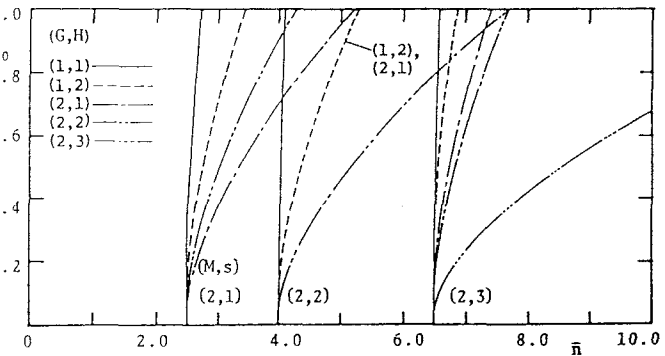


図-3 無次元固有円振動数 ($M=2$)

6. 面外不安定領域

本章では、面外不安定領域に及ぼす初期変形の形状 (G,H) およびその大きさ e_0 の影響を評価する ($\bar{M}_0 = 0.0$)。文献1)の図-4 (p.162)に示したように、面内変動曲げを受ける長方形板の面外不安定領域は結合共振が支配的で、単純共振の幅は狭く、無視できる。そこで、本研究では、結合共

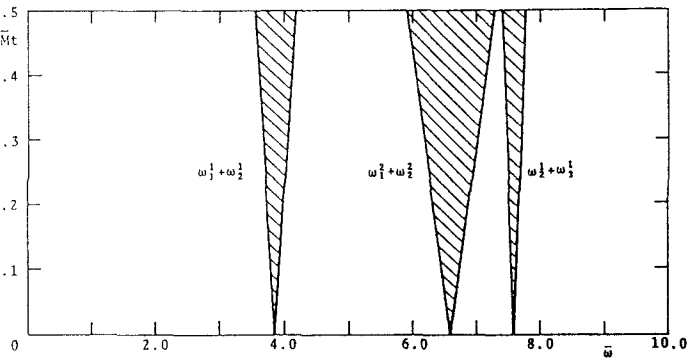


図-4 不安定領域 ($e_0=0.5, G=1, H=1$)

振のみに注目して不安定領域を求める。

図-4は初期変形のある正方形板($\mu=1.0$)($G=1, H=1, e_0=0.5, \bar{M}_t=0.0$)の面外不安定領域である。図中の横軸 $\bar{\omega} = \Omega / \Omega_1$ は無次元加振振動数を、縦軸 $\bar{M}_t$ は無次元変動曲げモーメントの振幅である。不安定領域に示した記号 $\omega_{M_i} + \omega_{M_j}$ は x 方向の半波数 M をもち、かつ y 方向の半波数が i, j をもつ固有振動形の2つの自由度の結合共振を意味する。これらの斜線部内において、面外振動が生じる。

(1) 初期変形の形状の影響

図-5, 6は初期変形の大きさ $e_0=0.5$ と一定にして、不安定領域に及ぼす初期変形の形状 (G, H) の影響を、結合共振 $\omega^1_1 + \omega^1_2$ ($M=1$ の場合) と $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($M=2$ の場合) について示したものである。初期変形の形状 (G, H) によって固有振動数 ω_{M_i} が変化するために、不安定領域の発生位置が異なってくる。初期変形の形状 (G, H) と固有振動形 (M, s) の間に関係がある。したがって、 $M=1$ (図-5) $M=2$ (図-6) の比較から明らかなように、振動形が $M=1, 2$ の場合、初期変形の形状 (G, H) の効果が異なる。表-1は図-6の $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の不安定領域の $\bar{M}_t=0.5$ の場合の不安定振動が発生する不安定領域とその幅を求めたものである。表のように、高い振動数領域に発生する不安定領域になるほど、不安定領域の幅は狭くなる。

(2) 初期変形の大きさの影響

図-7は初期変形の形状 $(G, H)=(2, 2)$ をもつ長方形板の結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の不安定領域に対して、不安定領域の変動を初期変形の大きさ e_0 をパラメーターに表示したものである。初期変形の大きさ e_0 が増大すると図

表-1 不安定領域の上・下限値 ($\bar{M}_t=0.5, e_0=0.5$)

(G,H)	ω_{lower}	ω_{upper}	width
(1,1)	5.90	~ 7.25	1.35
(1,2)	6.45	~ 7.75	1.30
(2,1)	7.15	~ 8.30	1.15
(2,2)	7.60	~ 8.75	1.15

表-2 不安定領域の上・下限値 ($\bar{M}_t=0.5, G=2, H=2$)

e_0	ω_{lower}	ω_{upper}	width
0.00	5.80 ~	7.20	1.40
0.25	5.95 ~	7.35	1.40
0.50	6.45 ~	7.75	1.30
0.75	7.25 ~	8.40	1.15
1.00	8.20 ~	9.20	1.00

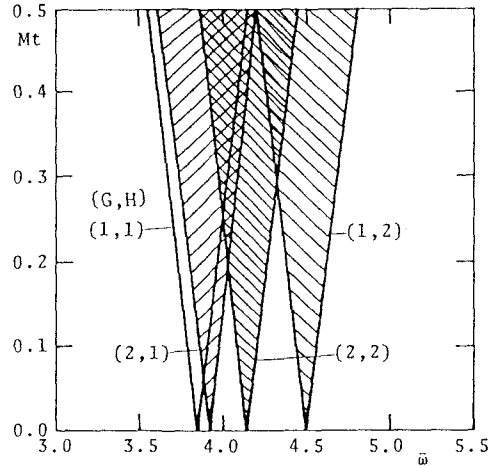


図-5 不安定領域 $\omega^1_1 + \omega^1_2$ ($e_0=0.5$)

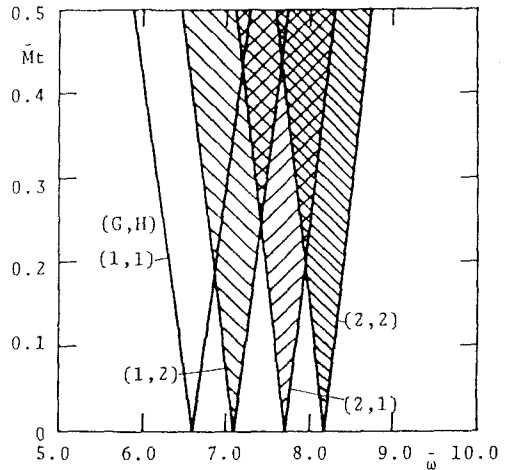


図-6 不安定領域 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($e_0=0.5$)

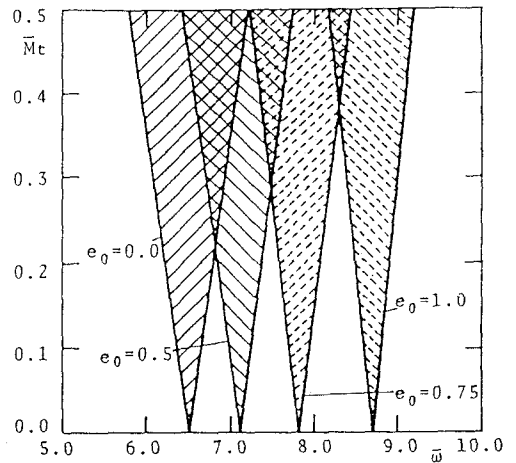


図-7 不安定領域 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($G=2, H=2$)

有振動数 ω_{M_i} が高くなる。このために、不安定領域の生ずる振動数領域は高い側に移動する。 $\bar{M}_t=0.5$ の場合に対して、不安定領域の発生する領域とその幅を表-2に示している。 e_0 が増大するにつれて、その領域は狭くなる。このように、初期変形がある場合の不安定領域はない場合よりも狭くなる。

しかし、式(14)のように、初期変形の大きさ e_0 の影響は線形項には2次のオーダー (e_0^2) で効いてくる。 $e_0 \leq 1$ の初期変形の範囲では、線形項より得られる不安定領域の幅の変動は大きくないといえる。

一般に、固有振動数の増加は、振動系の剛性の増大を意味する。したがって、高い振動数領域に生ずる不安定領域をもつ場合ほど、その剛性が高い。一般に、柱などでは、剛性が異なっても無次元化すれば、不安定領域の幅が変わらないことが知られている。本例では、最も剛性が低い $e_0=0.0$ の場合の平板の座屈荷重 M_{cr} で無次元化しているために、高い振動数側の不安定領域の外力は相対的に小さくなっている。これによって、不安定領域の幅が狭くなっているものと考えられる。

7. 最大応答

線形解析では、不安定領域のみしか得られないが¹⁾、式(14)の非線形項まで考慮すれば、変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ が作用する場合の最大応答が得られる²⁾。図-8に結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の時間応答波形を示す。初期変形の存在のために、2次の非線形項が式(14)の運動方程式に含まれる。2次の非線形項は非対称な復元力特性をもつために、図のように正負の時間応答の最大値が異なってくる。このために、一般に見かけ上、最大応答は初期変形がない場合よりも大きくなることが予想される。本研究では、図-8のような時間応答波形の時間軸をさらに伸ばして得られる応答の最大値を最大応答に採用した。これらの最大応答は、最初の数回のうなりのなかから求めることができる。

(1) 初期変形の形状の影響

図-9, 10は不安定領域 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($M=1$) および

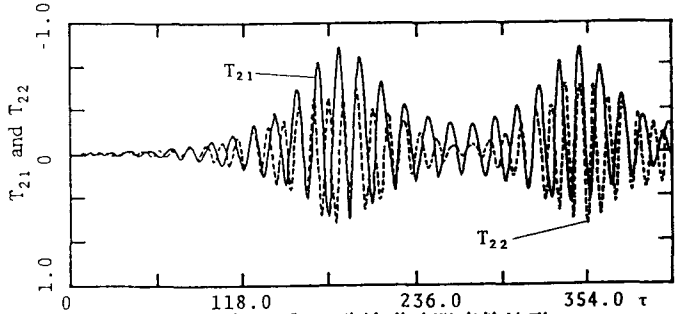


図-8 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の非線形時間応答波形
($e_0=0.4, G=2, H=1, M_t=0.3, \bar{\omega}=7.35$)

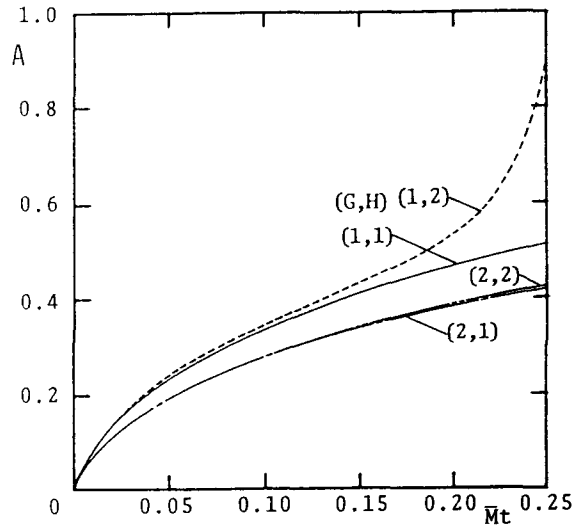


図-9 最大応答 $\omega^1_1 + \omega^1_2$ ($e_0=0.2$)

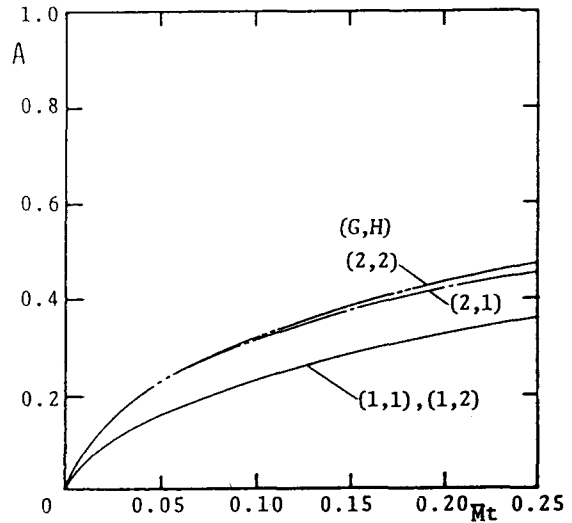


図-10 最大応答 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($e_0=0.2$)

$\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($M=2$)について、最大応答 A と変動曲げモーメントの振幅 $\bar{M}_t$ との関係を、初期変形の形状 (G, H) をパラメータに表したものである ($e_0 = 0.2$)。これらの図より明らかなように、最大応答は初期変形の形状の影響を受ける。図-9においては、初期変形の形状 (G, H) の x 方向の半波数 $G=1$ (すなわち $(1,1), (1,2)$) が固有振動形の x 方向の半波数 $M=1$ に一致する場合に振幅が大きくなっている。同様に、図-10の $M=2$ の場合、 $G=2$ をもつ振幅が大きい。このように、最大応答 A は固有振動形の x 方向の半波数 M が初期変形の x 方向の半波数 G に一致した場合に大きくなる。

(2) 初期変形の大きさの影響

図-11, 12は初期変形の形状 $(1,2)$ および $(2,2)$ をもつ不安定領域 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ について、最大応答 A と変動曲げモーメントの振幅 $\bar{M}_t$ との関係を、初期変形の大きさ e_0 をパラメータに示したものである。 e_0 の増加とともに最大応答 A は増大する。しかし、その割合は、図-11および12の比較から明らかなように、形状 (G, H) に依存する。図-10の小さい方の応答を示す初期変形の形状 $(1,2)$ の場合には、図-11のように最大応答は初期変形のない場合とほぼ一致しており、 e_0 の影響をほとんど受けない。これにたいして、図-10の大きい方の応答を示す初期変形の形状 $(1,2)$ の場合には、図-12のように e_0 の影響を著しく受ける。このように、初期変形の形状と固有振動形との関係が最大応答に大きな影響を及ぼす。初期変形と固有振動形の x 方向の半波数が一致する場合 ($G=M$) には、2次の非線形項が効いてくる。このために、図-8の正負の振幅の差が大きくなり、 e_0 の増大とともに、みかけ上最大応答 A が増大する。一方、 G と M が一致しない場合には、2次の非線形項がほとんど効かないことを意味する。この場合の時間応答波形は、文献2)の図-4 (p.708)と同じように上下対称になる。

8. まとめ

本論文は、面内変動曲げを受ける初期変形をもつ長方形板の面外不安定振動を幾何学的非線形性を考慮した Margurre の式を用いて解析したものである。初期変形の形状および大きさをパラメータに不安定振動に及ぼす初期変形の影響を評価した。得られた結果をまとめると、

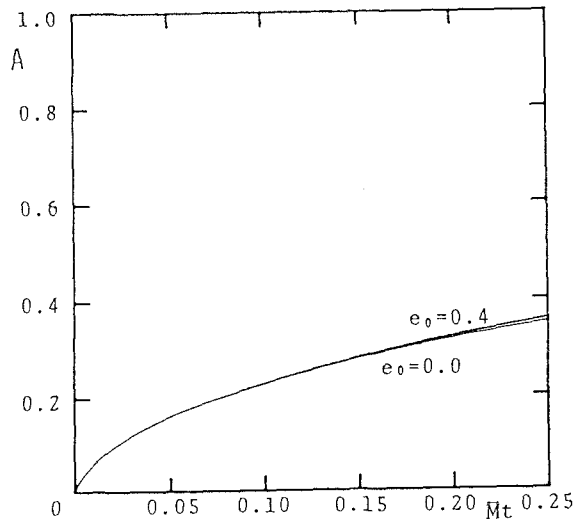


図-11 最大応答 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($G=1, H=2$)

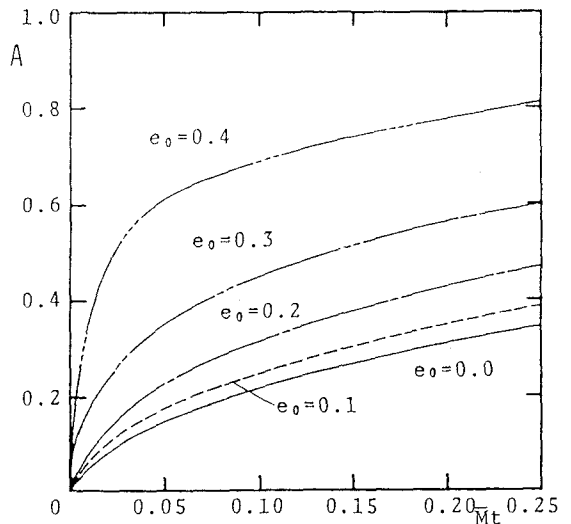


図-12 最大応答 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ ($G=2, H=2$)

- 1) 初期変形をもつ長方形板の固有振動数は、初期変形が大きくなるにつれて高くなる。その割合は初期変形の形状によって変化する。固有振動数はその固有振動形と初期変形の形状が一致した場合に最も大きく増加する。
- 2) 線形理論を用いて面外不安定領域を求めたところ、初期変形の形状および大きさによって、面外不安定領域が生ずる振動数領域が変化する。初期変形の形状と固有振動形が一致する場合、また、初期変形が大きくなるほど、その領域は高い振動数側に移動する。それにつれて、不安定領域の幅も減少する。したがって、不安定領域は初期変形がある場合がない場合よりも狭くなる。
- 3) 初期変形の影響が支配的な非線形時間応答は、正負の振幅が異なり、最大応答はみかけ上増大する。
- 4) 最大応答に及ぼす初期変形の影響は、その形状と固有振動形のx方向の半波数が一致する場合に効いてくる。この場合、初期変形が大きくなるにつれて最大応答が増大する。他方、両者が一致しない場合には、その影響は小さい。このときの振幅は初期変形の影響をほとんど受けない。

数値解析には、長崎大学情報処理センターの FACOM M-180 AD/II を使用したことを付記する。

Appendix A：式(9)の特解 F_p

$$F_p = Ed^2 \sum_{n=1} \sum_{s=1} T_{Mn} T_{Ms} F_{Mns}^p + e_0^2 Ed^2 \sum_{n=1} T_{Mn} E_{MnGH}^p$$

ここに、

$$F_{Mns}^p = A_{ns}^M \cos(n-s)\pi\eta + B_{ns}^M \cos(n+s)\pi\eta + \cos 2M\pi\xi \{ C_{ns}^M \cos(n-s)\pi\eta + D_{ns}^M \cos(n+s)\pi\eta \},$$

$$E_{MnGH}^p = \cos(M-G)\pi\xi \{ E_{nH}^{MG} \cos(n-H)\pi\eta + F_{nH}^{MG} \cos(n+H)\pi\eta \} \\ + \cos(M+G)\pi\xi \{ G_{nH}^{MG} \cos(n-H)\pi\eta + H_{nH}^{MG} \cos(n+H)\pi\eta \},$$

$$A_{ns}^M = \frac{M^2 s}{4\mu^2(n-s)^3}, B_{ns}^M = \frac{M^2 s}{4\mu^2(n+s)^3}, C_{ns}^M = \frac{\mu^2 M^2(n+s)s}{4\{4M^2 + (n-s)^2\mu^2\}^2}, D_{ns}^M = \frac{\mu^2 M^2(n-s)s}{4\{4M^2 + (n+s)^2\mu^2\}^2},$$

$$E_{nH}^{MG} = \frac{-\mu^2(MH-nG)^2}{4\{(M-G)^2 + (n-H)^2\mu^2\}^2}, F_{nH}^{MG} = \frac{\mu^2(MH+nG)^2}{4\{(M-G)^2 + (n+H)^2\mu^2\}^2},$$

$$G_{nH}^{MG} = \frac{\mu^2(MH+nG)^2}{4\{M+G\}^2 + (n-H)^2\mu^2}, H_{nH}^{MG} = \frac{-\mu^2(MH-nG)^2}{4\{M+G\}^2 + (n+H)^2\mu^2}$$

ただし、 $A_{ns}^M = 0 (n=s)$, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\mu = a/b$ (縦横比)

Appendix B：式(10)の余関数 F_c

$$F_c = Ed^2 \sum_{n=1} \sum_{s=1} T_{Mn} T_{Ms} F_{Mns}^c + e_0 Ed^2 \sum_{n=1} T_{Mn} E_{MnGH}^c$$

ここに、

$$F_{Mns}^c = \frac{\pi^2 \delta_{ns}}{16(1-\nu^2)} \{ (\mu^2 ns + \nu M^2) \xi^2 + (M^2/\mu^2 + \nu ns) \eta^2 \},$$

$$E_{MnGH}^c = \frac{\pi^2 \delta_{MG} \delta_{nH}}{8(1-\nu^2)} \{ (\mu^2 Hn + \nu MG) \xi^2 + (MG/\mu^2 + \nu Hn) \eta^2 \}$$

ただし、 δ_{ns} ：クロネッカーのデルタ関数

Appendix C：ガラーキン法の定積分の項 (式(12))

$$I_{Mp}^1 = \int_0^1 \int_0^1 W_{Mp}^2 d\xi d\eta,$$

$$I_{Mp}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\mu^4} \frac{\partial^4 W_{Mp}}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\mu^2} \frac{\partial^4 W_{Mp}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W_{Mp}}{\partial \eta^4} \right) W_{Mp} d\xi d\eta,$$

$$I_{Mnp} = -\frac{1}{\mu^2} \int_0^1 \int_0^1 (1-2\eta) \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \xi^2} W_{Mp} d\xi d\eta,$$

$$I_{Mnrsp} = -\frac{12(1-\nu^2)}{\mu^2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 F_{Mrs}}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 F_{Mrs}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 F_{Mrs}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \eta^2} \right) W_{Mp} d\xi d\eta,$$

$$I_{MnrGnp} = -\frac{12(1-\nu^2)}{\mu^2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 F_{Mrs}}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 W_{Gn}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 F_{Mrs}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 W_{Gn}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 F_{Mrs}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W_{Gn}}{\partial \eta^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 E_{MrGn}}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 E_{MrGn}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 E_{MrGn}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \eta^2} \right) W_{Mp} d\xi d\eta,$$

$$I_{MrGnp} = -\frac{12(1-\nu^2)}{\mu^2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 E_{MrGn}}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 W_{Gn}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 E_{MrGn}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 W_{Gn}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 E_{MrGn}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W_{Gn}}{\partial \eta^2} \right) W_{Mp} d\xi d\eta$$

ここに、

$$F_{Mrs} = F_{Mrs}^l + F_{Mrs}^c, E_{MrGn} = E_{MrGn}^l + E_{MrGn}^c$$

Appendix D : 式(14)の係数

$$A_{Mnp} = I_{Mnp} / \{ I_{Mp}^l (\alpha_1^l)^2 \pi^4 \}, B_{Mnrsp} = \lambda_{cr} I_{Mnrsp} / \{ I_{Mp}^l (\alpha_1^l)^2 \pi^2 \},$$

$$C_{MnrGnp} = I_{MnrGnp} / \{ I_{Mp}^l (\alpha_1^l)^2 \pi^4 \}, D_{MrGnp} = I_{MrGnp} / \{ I_{Mp}^l (\alpha_1^l)^2 \pi^4 \}$$

$$\mathcal{Q}_p^M = \sqrt{\frac{I_{Mp}^2}{I_{Mp}^l} \frac{D}{\rho db^4}}$$

参考文献

- 1) 高橋・田川・池田・松川: 面内曲げを受ける長方形板の動的安定性、土木学会論文集、第341号、pp.179~186、1984.
- 2) 高橋・池田・川野: 幾何学的非線形性を考慮した面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性、構造工学論文集、Vol.32A、pp.705~714、1986.
- 3) Takahashi, K., Konishi, Y., Ikeda, T. and Kawano, R.: Nonlinear Response of a Rectangular Plate Subjected to Inplane Dynamic Moment, Proc. of JSCE, No. 374/I-6, pp. 358~369, 1986.
- 4) 前田・大倉: プレートガーダーウェブの初期たわみと疲労亀裂に関する研究、土木学会論文集、第319号、pp.1~12、1982.
- 5) Kuranishi, S., Fukaya, S. and Shima, T.: Vibration of an Initially Deflected Web Plate under Periodic Beam Bending, Proc. of JSCE, No. 341, pp. 229~232, 1984.
- 6) Margurre, K.: Zur Theorie der gekrummten Platte grosser Formänderung, Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, pp. 93~101, 1938.
- 7) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Co., pp. 425~428, 1955.

(1986年10月17日)