

矩形板の非弾性曲げの一解析法

NUMERICAL ANALYSIS OF INELASTIC BEHAVIOUR OF RECTANGULAR PLATE

松田浩* 崎山毅**

by Hiroshi MATSUDA and Takesi SAKIYAMA

In this paper, an approximate method for analyzing the problems of elasto-plastic bending of a rectangular plate is proposed. The solutions of the partial differential equation of the rectangular plate are obtained in discrete forms by applying numerical integration, and they give the transverse shear forces, twisting moment, bending moments, rotations and deflection at all discrete points.

An incremental procedure has been used for the elasto-plastic analysis of the plate. As the applications of the present method, the rectangular plates with the various boundary conditions are calculated.

1. 序言

矩形板の非弾性曲げ問題に関しては、Hodgeら[1]によって塑性関節線を用いた崩壊形式および崩壊荷重を求める塑性設計法が提示されている。しかしながら、この方法は、コンクリートなどの脆性材料には適用できるが、延性材料には膜応力の影響が無視できなくなるため、適用が困難になるといわれている[2]。

一方、矩形板の初期降伏後の弾塑性挙動は、有限要素法、Discrete Element Methodおよび差分法などの離散化数値解析法によって解析されている。

有限要素法による板の弾塑性解析の方法には、例えば、堀田[3]による塑性関節線を用いる方法、また、小松、北田、宮崎[4]による板厚方向の塑性域の拡りを考慮する方法などがある。また、大賀、重松、原[5]は、Finite Element-transfermatrix Method を用いて大たわみ弾塑性解析を行っている。

Ang, Lopez[6] は、deformable nodes, rigid bars, torsional element からなる力学モデルを使った、いわゆる Discrete-variable approach を用いて矩形板の非弾性曲げ解析を行っている。

差分法による矩形板の非弾性問題に関する研究は、Bhaumik, Hanley[7] により4辺単純支持および4辺固定なる境界条件を有する正方形板の弾塑性解析がなされ、また、横尾、中村、森[8]により4辺単純支持長方形板について解析されている。

本論文は、以上に述べた降伏後の弾塑性挙動を解析する方法のほかに一離散化数値解析法を提示したも

*工修 長崎大学助手 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)

**工博 長崎大学助教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)

のである。塑性変形における応力-ひずみ関係式より矩形板の非弾性曲げの基礎方程式を導くことができる。微小荷重増分形式で記述された矩形板の基礎微分方程式の近似解は、基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の数値積分の応用とにより離散化された形で得られる。本法による矩形板の弾塑性解析は、板厚方向の塑性域の拡りを考慮する方法を用いて、荷重増分解析法で行った。

本解析法による数値解析例として、4辺単純支持、4辺固定、対辺単純支持他対辺固定および対辺単純支持他対辺自由なる境界条件を有する矩形板の弾塑性解析を行い、その挙動特性を明らかにした。その結果、本法を用いると、任意の境界条件および荷重条件を持つ矩形板の弾塑性問題は、比較的容易に、また一般的な方法で取扱うことができることなどが確認された。またこの方法は、通常の有限要素法の解析に比べて、連立方程式の元数を減らすことができ、計算時間を短縮できるという利点もある。

2. 増分形基礎微分方程式

矩形板のせん断力を Q_y 、 Q_x 、ねじりモーメント M_{xy} 、曲げモーメントを M_y 、 M_x 、たわみ角を θ_y 、 θ_x 、たわみを w とすれば、多軸応力状態にある矩形板の塑性状態における応力とひずみの関係式(文献[9])に基づいて、せん断変形の影響を考慮したMindlin矩形板(図1)の弾塑性挙動を支配する基礎微分方程式は、次の増分形式の変数係数の連立偏微分方程式で表わされる。

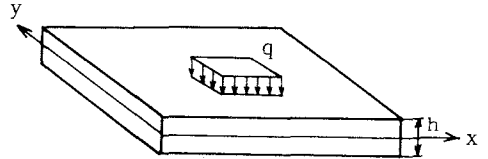


図1 横荷重を受ける矩形板

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + q &= 0 & (1.a) & \quad a_{21} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + a_{22} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + a_{23} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) = \frac{\Delta M_y}{D} & (1.e) \\ \frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x &= 0 & (1.b) & \quad a_{31} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + a_{32} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} + a_{33} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) = \frac{\Delta M_{xy}}{D} & (1.f) \\ \frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y &= 0 & (1.c) & \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{\Delta Q_x}{\kappa G h} & (1.g) \\ a_{11} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} + a_{13} \left(\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \right) &= \frac{\Delta M_x}{D} & (1.d) & \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{\Delta Q_y}{\kappa G h} & (1.h) \end{aligned}$$

ここに、 $q = q(x, y)$: 横荷重強度、 E : 弾性係数、 $G = E/2(1 + \nu)$: せん断弾性係数、 ν : ポアソン比、 $h = h(x, y)$: 板厚、 $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$: 板剛度、 $\kappa = 5/6$: せん断修正係数、

Δ : 荷重増分 Δq に対する各断面力および変形量の増分、 a_{ij} : APPENDIX I

次の無次元化された式を用いると、

$$\begin{aligned} X_1 &= a^2 Q_y / [D_0(1 - \nu^2)], \quad X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1 - \nu^2)], \quad X_3 = a M_{xy} / [D_0(1 - \nu^2)], \quad X_4 = a M_y / [D_0(1 - \nu^2)] \\ X_5 &= a M_x / [D_0(1 - \nu^2)], \quad X_6 = \theta_y, \quad X_7 = \theta_x, \quad X_8 = w/a, \quad \eta = x/a, \quad \zeta = y/b, \end{aligned}$$

式(1.a)~(1.h)は、次式のように簡単に書き換えられる。

$$\sum_{s=1}^8 [F_{1ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \zeta} + F_{2ts} \frac{\partial \Delta X_s}{\partial \eta} + F_{3ts} \Delta X_s] + \delta_{1t} \Delta q = 0 \quad (2)$$

ここに、 δ_{ij} : Kronecker's delta、 $t=1, 2, \dots, 8$ 、 F_{kts} : APPENDIX II、 a, b : 矩形板の横縦の辺長、

$\mu = b/a$ 、 h_0 : 基準板厚、 $q = q(x, y) = \mu K_1 q(x, y)/q_0$ 、 $K_1 = q_0 a^3 / [D_0(1 - \nu^2)]$ 、

q_0 : 基準荷重強度、 $I = I(x, y) = \mu(1 - \nu^2)(h_0/h)^3$ 、 $K = Eh_0^3 / (12\kappa G h)$ 、

$D_0 = Eh_0^3 / [12(1 - \nu^2)]$: 基準板剛度

式(2)を用いて、矩形板の非弾性曲げ解析を行うことができる。

3. 基礎微分方程式の離散的一般解

任意の荷重条件および境界条件のもとで基礎微分方程式(2)の解析解を一般的に求めることは、ほとんど不可能であると考えられるので、ここでは、図2に示すように、矩形板を横、縦方向にそれぞれ m, n 等分し、これらの等分割線の交点を対象として、これらの離散点における、基礎微分方程式の離散的一般解を求める。

ここで、任意の交点 (i, j) に関連する矩形領域、 $0 \leq \eta \leq \eta_i, 0 \leq \zeta \leq \zeta_j$ に注目し、これを領域 $[i, j]$ と表記することとする。また、図中の●印を付けた交点を任意領域 $[i, j]$ の主要点、○印を付けた交点を内部従属点、●印を付けた交点を境界従属点と称して区別することとする。

はじめに、式(2)を領域 $[i, j]$ において面積分し、積分方程式に変換すれば、次の式が得られる。

$$\sum_{s=1}^8 \left\{ F_{1ts} \int_0^{\eta_i} [\Delta X_s(\eta, \zeta_j) - \Delta X_s(\eta, 0)] d\eta + F_{2ts} \int_0^{\zeta_j} [\Delta X_s(\eta_i, \zeta) - \Delta X_s(0, \zeta)] d\zeta \right. \\ \left. + F_{3ts} \int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \Delta X_s(\eta, \zeta) d\eta d\zeta \right\} + \delta_{1t} \int_0^{\eta_i} \int_0^{\zeta_j} \Delta \bar{q}(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = 0 \quad (3)$$

つぎに、等間隔の数値積分法の応用により、領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) および従属点 (k, l) の諸量を用いて、これらの積分方程式を離散表示すれば、無次元化された断面力および変形の主要点 (i, j) における未知量に関する連立方程式が次のように得られる。

$$\sum_{s=1}^8 \left\{ F_{1ts} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} [\Delta X_{skj} - \Delta X_{sk0}] + F_{2ts} \sum_{l=0}^j \beta_{jl} [\Delta X_{sli} - \Delta X_{s0l}] \right. \\ \left. + F_{3ts} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} \Delta X_{skl} \right\} + \delta_{1t} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} \Delta \bar{q}_{kl} = 0 \quad (4)$$

ここで、 q_{kl} は点 (k, l) における関数 $q(\eta, \zeta)$ の値である。

主要点 X_{pij} に関する、連立方程式(4)の解は、次のように表わすことができる。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{s=1}^8 \left\{ \sum_{k=0}^i A_{pt} \beta_{ik} [\Delta X_{sk0} - \Delta X_{skj} (1 - \delta_{ki})] + \sum_{l=0}^j B_{pt} \beta_{jl} [\Delta X_{s0l} - \Delta X_{sli} (1 - \delta_{lj})] \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j C_{ptkl} \beta_{ik} \beta_{jl} \Delta X_{skl} (1 - \delta_{ki} \delta_{lj}) \right\} - A_{p1} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} \Delta \bar{q}_{kl} \quad (5)$$

$$p=1 \sim 8, i=1 \sim m, j=1 \sim n, k=0 \sim i, l=0 \sim j, \beta_{ik} = \alpha_{ik}/m, \beta_{jl} = \alpha_{jl}/n,$$

$$\delta_{ij} : \text{Kronecker's delta, } A_{ps}, B_{ps}, C_{pskl} : \text{APPENDIX III}$$

係数 β_{ik}, β_{jl} は数値積分法における重み係数である。本論文においては、等分割数値積分法として、台形公式を用いることとする。このとき、 $\alpha_{ik} = 1 - (\delta_{ok} + \delta_{ik})/2, \alpha_{jl} = 1 - (\delta_{ol} + \delta_{jl})/2$

領域 $[i, j]$ を $[1, 1], [1, 2], \dots, [1, n], [2, 1], [2, 2], \dots, [2, n], [m, 1], [m, 2], \dots, [m, n]$ と順次拡大してゆけば、ある領域の主要点は、次のより拡大された領域の内部従属点となる。したがって、最小領域 $[1, 1]$ から始めて、順次、領域を拡大しつつ、各領域の主要点の諸量 ΔX_{pij} を式(5)により求め、これを次の領域の内部従属点における諸量 $\Delta X_{pk\ell}$ として、式(5)の右辺に逐次代入していけば、各領域の内部従属点の諸量はすべて消去され、結局、任意の領域 $[i, j]$ の主要点 (i, j) における諸量 ΔX_{pij} は、この領域

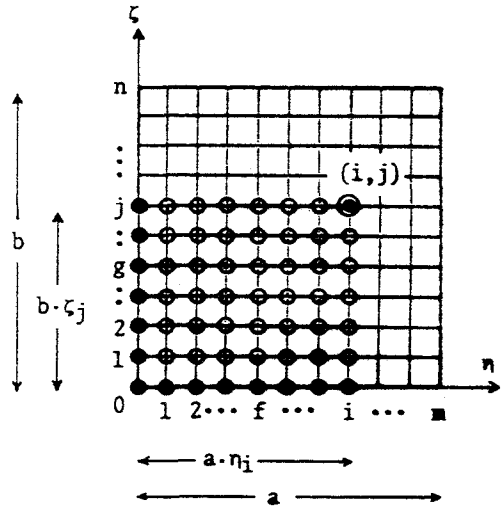


図2 矩形板の離散点

の境界従属点(k,0), (0,l)における諸量 ΔX_{rko} , (r=1,3,4,6,7,8), ΔX_{sol} , (s=2,3,5,6,7,8) のみによって表わされることになり、その結果は次式のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{t=1}^6 \left(\sum_{k=0}^i a_{pijkt} \Delta X_{rko} + \sum_{l=0}^j b_{pijlt} \Delta X_{sol} \right) + \Delta q_{pij} \quad (6)$$

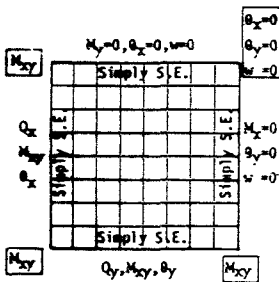
a_{pijkt} , b_{pijlt} , q_{pij} : APPENDIX IV

式(6)は、矩形板の縦横の等分割線の交点における、基礎微分方程式(1.a)~(1.h)を無次元化した式(2)の離散表示された近似解である。この解式中に含まれる境界従属点の6個ずつの諸量 ΔX_{rko} , ΔX_{sol} はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域[i, j]の主要点における諸量 ΔX_{pij} を、この領域の境界従属点における諸量 ΔX_{rko} , ΔX_{sol} に関係づける要素 a_{pijkt} および b_{pijlt} は、伝達マトリックス法におけるいわゆる伝達マトリックスに相当するものである。

4、積分定数と境界条件

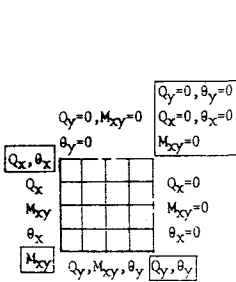
基礎微分方程式(1.a)~(1.h)の近似解(6)に含まれる積分定数 ΔX_{rko} および ΔX_{sol} は、具体的には、それぞれ、平板の $y=0$ および $x=0$ なる辺上の等分割点(k,0)および(0,l)における断面力および変形を表わす。各等分割点において6個ずつの積分定数が存在するが、平板の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか3個の積分定数は、はじめから既知である。残りの3個の未知なる積分定数は、 $x=a$ および $y=b$ の各辺の境界条件によって決定される。

図3(1)~(4)に、各々、4辺単純支持板、4辺固定板、対辺単純支持他对辺固定板および対辺単純支持他

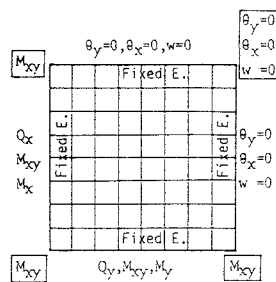


(a)

(1) 4辺単純支持板

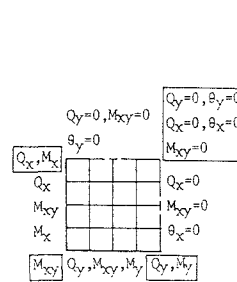


(b)

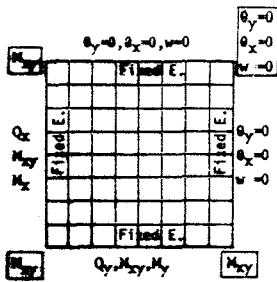


(a)

(2) 4辺固定板

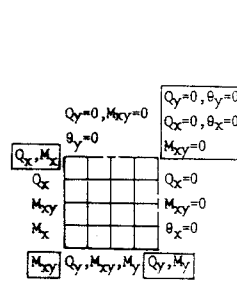


(b)

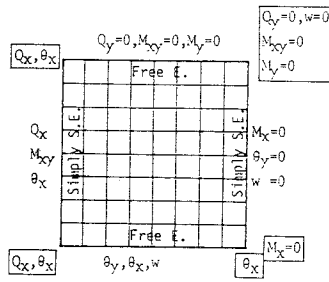


(a)

(3) 対辺単純支持他对辺固定板

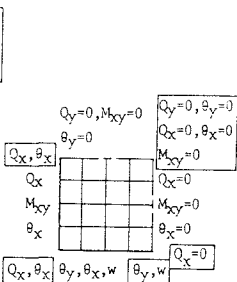


(b)



(a)

(4) 対辺単純支持他对辺自由板



(b)

図3 積分定数と境界条件

対辺自由板の積分定数と境界条件を示している。これらの各図において、(a)図は、矩形板全体を対象とした場合であり、(b)図は、左右および上下の2軸対称性をもつ平板の1/4部分を対象とした場合である。各図において、隅角点における積分定数および境界条件は、□で囲まれている。なお、隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において交差する2境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められる。詳しくは、文献[10]を参照されたい。

5、数値計算手法

矩形板の非弾性曲げ問題は、荷重の漸増に伴い、部材断面に塑性域が生じるために、応力-ひずみの関係式が変化するので、結局、増分形の変数係数の連立偏微分方程式の解を求める問題に帰着される。本文で得られた弾塑性状態での増分形基礎方程式の離散的な一般解を用いると、荷重増分法により矩形板の非弾性解析を行うことができる。

本文での矩形板の非弾性曲げ解析における仮定は次のとおりである。

- (1)矩形板は、非硬化性材料から成る。
- (2)部材断面に降伏域が生じた後もMindlinの理論が成り立つ。
- (3)変形は、板厚に比して小さい。したがって、幾何学的非線形性は考慮しない。
- (4)材料は、von-Mises の降伏条件式(7)に従う。

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad (7) \quad \sigma_0: \text{降伏応力}$$

いま、第n荷重段階で矩形板の断面の一部が弾塑性状態にあるとするなら、増分形基礎微分方程式における変数係数 a_{ij} ($i,j=3$)は、次の計算手順によって求めることができる。

〔データ〕 第(n-1)荷重段階における無次元応力

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_0} = \sum \frac{\Delta \sigma_x}{\sigma_0} \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \sum \frac{\Delta \sigma_y}{\sigma_0} \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} = \sum \frac{\Delta \tau_{xy}}{\sigma_0}$$

- (a)矩形板の断面を板厚方向に多層分割する。(図4参照)
 - (b)第(n-1)荷重段階における無次元応力を用いて、すべての離散点における断面のすべての要素について、偏差応力 σ_x' , σ_y' , τ_{xy}' を計算する。
 - (c)変数係数 a_{ij} の計算 (APPENDIX I)
 - (d)増分形基礎方程式を解く → ΔM_x , ΔM_y , ΔM_{xy} の算定。
 - (e)第n荷重段階における無次元増分応力の算定。
 $\Delta \sigma_x / \sigma_0$, $\Delta \sigma_y / \sigma_0$, $\Delta \tau_{xy} / \sigma_0$
 - (f)第n荷重段階における無次元応力の算定。
- 以上の(a)～(f)の計算を増分荷重下で繰り返して行う。

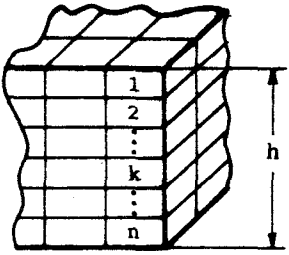


図4 板厚方向の層分割

6. 数値解析結果

弾性計算における、本解析法による数値解の収束性および精度は、既に、文献[10]で確認済みである。また、本解析法による連立方程式の元数は、4辺単純支持正方形板の4分の1部分を例にとると、 $m=n=2, 4, 6, 8$ のとき、それぞれ、 $11 \times 12, 23 \times 24, 35 \times 36, 41 \times 42$ となり、通常

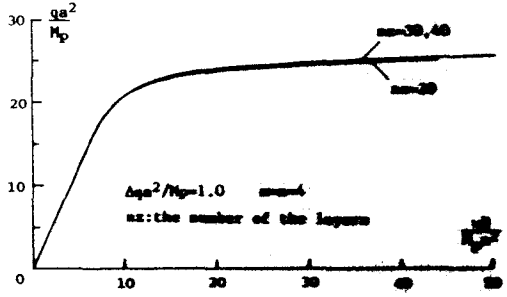


図5 正方形板の荷重変位曲線
(n:ラメータ:板厚方向の層分割数)

のFEM流の解析と比べて、元数を減じることができる。しかし、その反面、積分計算すなわち係数 a_{pijkt} , b_{pijlt} , q_{pij} を求める計算は長くなるが、本計算例では、連立方程式を解くのに要する時間と同程度であるゆえ、計算時間を短縮できる。また、数値計算を行なうとき本解析法に要する入力データ数は、通常の有限要素法による解析と比べて、少なくて済むなどの利点もある。

したがって、本文では、まず、本解析法を用いた矩形板の非弾性曲げ問題の数値解析例として、4辺単純支持なる境界を持つ正方形板と長方形板($\mu=0.5$)に等分布荷重が満載される場合の解析を行った。正方形板については、図5および図6に、長方形板については図7に、それぞれの荷重変位曲線を示す。図5によると、板厚方向の層分割数は、 $nz=30\sim40$ で収束していることがわかる。なお、板厚方向の分割数は計算時間にはさほど影響を与えない。図6は、増分荷重および分割数 m, n を種々変化させた場合の荷重変位曲線を示す。また、比較のために文献[7]から得られた差分法による結果も、点線と○印で同図に示している。さらに、塑性設計法により得られた崩壊荷重(upper and lower bound= $24qa^2/M_p$)も示されており、 $m=5, n=5, \Delta qa^2/M_p=0.4$ のときよく一致している。

図7は、長方形板の場合において増分荷重を種々変化させた場合の荷重変位曲線を示す。同図にも塑性設計法による崩壊荷重(upper bound= 0.314 , lower bound= 0.311)も示しているが、本解析法による結果は $m=6, n=3, \Delta q=0.02$ のときよく一致している。

図8に正方形板の降伏開始から崩壊までの代表的な荷重段階での M_{xy} -, M_y -, M_x -図を示す。また、図9において、(1)図は、正方形板の4分の1部分を縦横にそれぞれ5等分して計算した場合の $qa^2/M_p=23.2$ のときの弾塑性状況図であり、(2)図は、長方形板($b/a=0.5$)の4分の1部分を縦、横に、それぞれ3および6等分して計算した場合の $qa^2/M_p=52.6$ のときの弾塑性状況図である。同図で、色分けの区分は、塑性化する前の板厚 h_0 を基準とし、塑性化した断

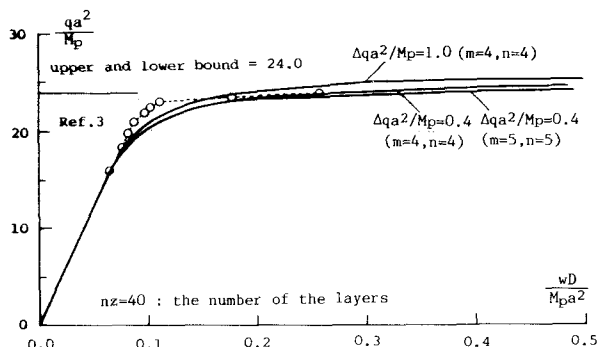


図6 正方形板の荷重変位曲線 (ハラム-タ:増分荷重、分割数、 m, n)

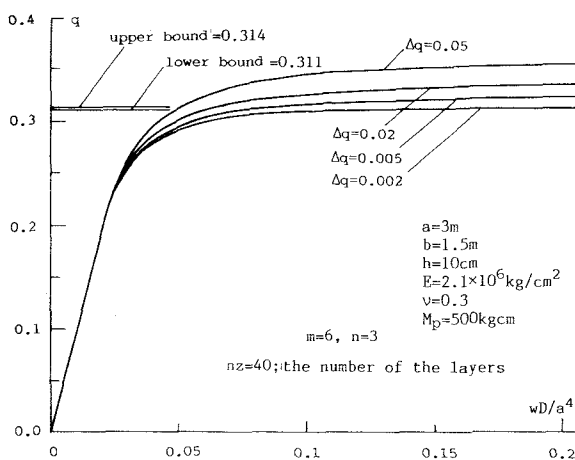


図7 長方形板の荷重変位曲線 (ハラム-タ:増分荷重)

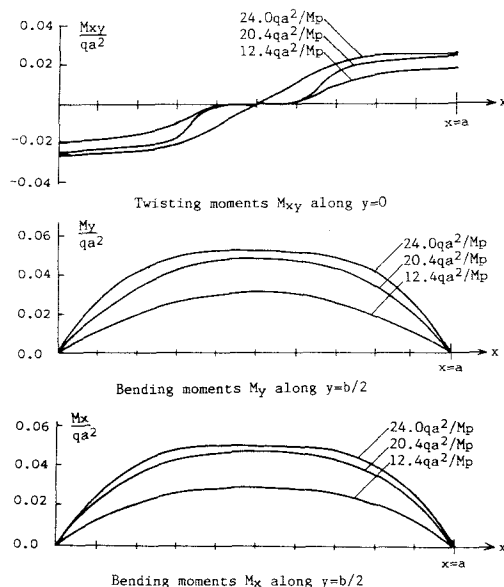
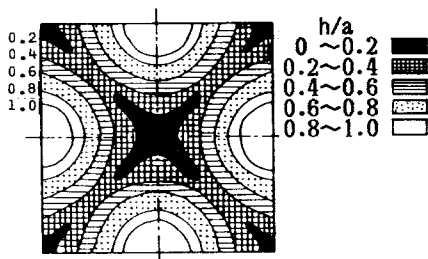
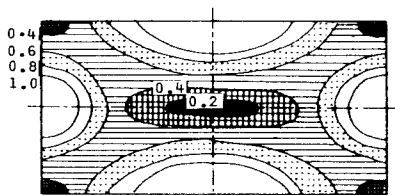


図8 モーメント図(M_{xy}, M_y, M_x)



(1) 正方形板 ($h/a=0.01$) $qa^2/M_p=23.2$



(2) 長方形板 ($h/a=0.03$) $qa^2/M_p=52.6$

図9 弾塑性状況図

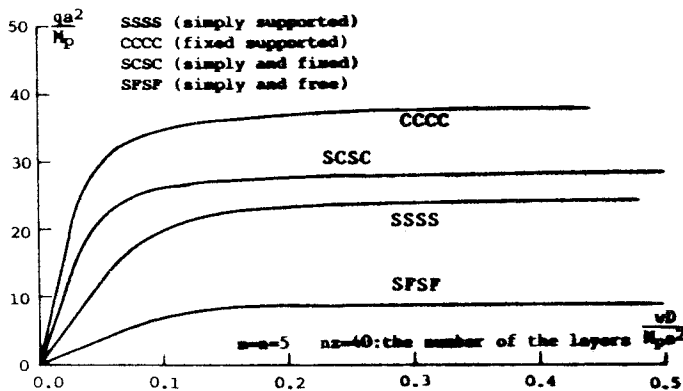


図10 種々の境界条件を持つ正方形板の弾塑性荷重変位曲線

面を取り除いた弾性部分の深さ h との比 h/h_0 で表わし、同図中に示す色分け区分で表わしている。

次に、本解析法を種々の境界条件を持つ正方形板すなわち4辺固定板、対辺単純支持他対辺固定板および対辺単純支持他対辺自由板を本解析法を用いて非弾性解析を行い、荷重-変位曲線の挙動特性を明らかにした。その結果を図10に示す。

7. あとがき

本論文は、矩形板の初期降伏後の弾塑性挙動を解析するための一離散化数値解析法について述べたものである。弾塑性応力状態にある矩形板の応力-ひずみ関係より、矩形板の非弾性挙動を支配する基礎方程式を導き、その基礎方程式に基づく直接的かつ半解析的な矩形板の非弾性曲げの一解析法を提示した。本解析法によると、矩形板の弾塑性問題を一般的にかつ比較的容易に解析することができる。

APPENDIX I

$$a_{ij} = 12 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha_{ij} \xi^2 d\xi$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} - \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

$$a = \sigma_x' + \nu \sigma_y', \quad b = \nu \sigma_x' + \sigma_y', \quad c = (1-\nu) \tau_{xy}',$$

$$d = a \sigma_x' + b \sigma_y' + 2c \tau_{xy}'$$

$$\sigma_x' = (2\sigma_x - \sigma_y)/3\sigma_0, \quad \sigma_y' = (2\sigma_y - \sigma_x)/3\sigma_0, \quad \tau_{xy}' = \tau_{xy}/\sigma_0$$

σ_0 : yield stress

APPENDIX II

$$F_{111} = F_{123} = F_{134} = F_{188} = F_{278} = F_{377} = 1.0$$

$$F_{212} = F_{225} = F_{233} = F_{331} = F_{386} = F_{322} = \mu$$

$$F_{146} = a_{12}, \quad F_{246} = a_{13}\mu, \quad F_{345} = -I$$

$$F_{147} = a_{13}, \quad F_{247} = a_{11}\mu, \quad F_{354} = -I$$

$$F_{156} = a_{22}, \quad F_{256} = a_{23}\mu, \quad F_{363} = -I$$

$$F_{157} = a_{23}, \quad F_{257} = a_{21}\mu, \quad F_{372} = -K$$

$$F_{166} = a_{32}, \quad F_{266} = a_{33}\mu, \quad F_{381} = -\mu K$$

$$F_{167} = a_{33}, \quad F_{267} = a_{31}\mu, \quad \text{other } F_{ijk} = 0$$

APPENDIX III

$$\begin{aligned}
A_{p1} &= \gamma_{p1} \quad A_{p2} = 0 \quad A_{p3} = \gamma_{p2} \quad A_{p4} = \gamma_{p3} \quad A_{p5} = 0 \quad A_{p8} = \gamma_{p8} \\
A_{p6} &= \gamma_{p4} a_{12} + \gamma_{p5} a_{22} + \gamma_{p6} a_{32} \quad A_{p7} = \gamma_{p4} a_{13} + \gamma_{p5} a_{23} + \gamma_{p6} a_{33} \\
B_{p1} &= 0 \quad B_{p2} = \mu \gamma_{p1} \quad B_{p3} = \mu \gamma_{p3} \quad B_{p4} = 0 \quad B_{p5} = \mu \gamma_{p2} \quad B_{p8} = \gamma_{p7} \\
B_{p6} &= (\gamma_{p4} a_{13} + \gamma_{p5} a_{23} + \gamma_{p6} a_{33}) \mu \quad B_{p7} = (\gamma_{p4} a_{11} + \gamma_{p5} a_{21} + \gamma_{p6} a_{31}) \mu \\
C_{p1kl} &= \gamma_{p3} \mu + \mu \gamma_{p8} K_{kl} \quad C_{p2kl} = \gamma_{p2} \mu + \gamma_{p7} K_{kl} \quad C_{p3kl} = \gamma_{p6} I_{kl} \\
C_{p4kl} &= \gamma_{p5} I_{kl} \quad C_{p5kl} = \gamma_{p4} I_{kl} \quad C_{p6kl} = -\mu \gamma_{p8} \quad C_{p7kl} = -\gamma_{p7} \quad C_{p8kl} = 0 \\
[Y_{pt}] &= [\rho_{pt}]^{-1} \\
\rho_{11} &= \beta_{ii}, \quad \rho_{12} = \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{22} = -\mu \beta_{ij}, \quad \rho_{23} = \beta_{ii}, \quad \rho_{25} = \mu \beta_{jj}, \\
\rho_{31} &= -\mu \beta_{ij}, \quad \rho_{33} = \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{34} = \beta_{ii}, \quad \rho_{45} = -I_{ij} \beta_{ij}, \\
\rho_{46} &= a_{12} \beta_{ii} + a_{13} \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{47} = a_{11} \mu \beta_{jj} + a_{13} \beta_{ii}, \quad \rho_{54} = -\beta_{ij} I_{ij}, \\
\rho_{56} &= a_{22} \beta_{ii} + a_{23} \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{57} = a_{21} \mu \beta_{jj} + a_{23} \beta_{ii}, \quad \rho_{63} = -\beta_{ij} I_{ij}, \\
\rho_{66} &= a_{32} \beta_{ii} + a_{33} \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{67} = a_{31} \mu \beta_{jj} + a_{33} \beta_{ii}, \quad \rho_{72} = -\beta_{ij} K_{ij}, \\
\rho_{77} &= \beta_{ij}, \quad \rho_{78} = \mu \beta_{jj}, \quad \rho_{81} = -\mu \beta_{ij}, \quad \rho_{86} = \mu \beta_{ij}, \quad \rho_{88} = \beta_{ii}, \\
\beta_{ij} &= \beta_{ii} \beta_{jj}
\end{aligned}$$

APPENDIX IV

$$\begin{aligned}
a_{pijkt} &= \sum_{s=1}^8 \{ A_{ps} \sum_{f=0}^i \beta_{if} [a_{sf0kt} - a_{sfjkt} (1 - \delta_{fi})] \\
&\quad + B_{ps} \sum_{g=0}^j \beta_{jg} [a_{s0gkt} - a_{sigkt} (1 - \delta_{gj})] \\
&\quad + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j C_{psfg} \beta_{if} \beta_{jg} a_{sf gkt} (1 - \delta_{fi} \delta_{gj}) \} \\
b_{pijlt} &= \sum_{s=1}^8 \{ A_{ps} \sum_{f=0}^i \beta_{if} [b_{sf0lt} - b_{sfjlt} (1 - \delta_{fi})] \\
&\quad + B_{ps} \sum_{g=0}^j \beta_{jg} [b_{s0glt} - b_{siglt} (1 - \delta_{gj})] \\
&\quad + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j C_{psfg} \beta_{if} \beta_{jg} b_{sf glt} (1 - \delta_{fi} \delta_{gj}) \} \\
q_{pij} &= \sum_{s=1}^8 \{ A_{ps} \sum_{f=0}^i \beta_{if} [q_{sf0} - q_{sfj} (1 - \delta_{fi})] \\
&\quad + B_{ps} \sum_{g=0}^j \beta_{jg} [q_{s0g} - q_{sig} (1 - \delta_{gj})] \\
&\quad + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j C_{psfg} \beta_{if} \beta_{jg} q_{sf g} (1 - \delta_{fi} \delta_{gj}) \\
&\quad - A_{p1} \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^j \beta_{if} \beta_{jg} q_{f g} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{i0i0t} &= 1, \quad a_{10j01} = \omega_j, \quad a_{40j03} = \omega_j, \quad a_{2i0k5} = \sigma_{ik} / \kappa, \quad a_{5i0k3} = \nu \sigma_{ik}, \\
a_{2i0k6} &= \tau_{ik} / \kappa, \quad a_{5i0k5} = \tau_{ik}, \quad b_{s0j0t} = 1, \quad b_{2i001} = \omega_i, \quad b_{5i003} = \omega_i, \\
b_{10j24} &= \sigma_{j2} / \kappa, \quad b_{40j23} = \nu \sigma_{j2}, \quad b_{10j26} = \tau_{j2} / (\mu \kappa), \quad b_{40j24} = \tau_{j2} / \mu, \\
\omega_i &= (-1)^i, \quad \sigma_{ik} = \delta_{ik} + (-1)^{i+1} \delta_{0k}, \quad \tau_{ik} = 4\pi (-1)^{i+k} / (1 + \delta_{ik} + \delta_{0k}), \\
r &= t + \delta_{2t} + \delta_{3t} + 2(\delta_{4t} + \delta_{5t} + \delta_{6t}), \quad s = t + \delta_{1t} + \delta_{2t} + 2(\delta_{3t} + \delta_{4t} + \delta_{5t} + \delta_{6t})
\end{aligned}$$

参考文献

- 例えば、P.G.Hodge著、倉西正嗣訳：構造物の塑性解析、コロナ社
- 谷資信編著：建築物の構造解析シリーズ III 板構造の解析、技報堂、1976
- 堀田佳克：塑性関節線を用いた板の有限要素解析、第17回構造強度に関する講演会論文、機械学会、航空宇宙学会、1975.7
- 小松定夫、北田俊行、宮崎清司：残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析、土木学会論文報告集、第244号、pp1-14 1975
- Ohga, M., T. Shigematu and T. Hara : A Combined Finite Element-Transfer Matrix Method, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 110, No. EM9, pp1335-1349, 1984
- A.H.-S. Ang and L.A. Lopez : Discrete Model Analysis of Elastic-Plastic Plate. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM1, pp271-293, 1968
- A.K. Bhaumik and J.T. Hanley : Elasto-Plastic Plate Analysis by Finite Differences. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. ST5, pp279-295, 1967
- Yokoo Y., T. Nakamura and T. Mori : Numerical Analysis of Elastic-Plastic Deformation of Simply Supported Rectangular Plates. Transaction of A.I.J. No. 152, pp27-36, 1968
- 山田嘉昭：マトリックス法材料力学、日本鋼構造協会編、倍風館
- 崎山毅、松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号、pp21-28 1983
- 太田俊昭著：構造物の非弾性解析（新体系土木工学8）技報堂 1980年

(1986年10月17日受付)