

ティモシェンコばり理論の薄肉開断面ばりの 曲げねじれ問題への拡張

EXTENSION OF TIMOSHENKO BEAM THEORY TO BENDING-TORSION PROBLEM OF THIN-WALLED OPEN SECTION BEAMS

深沢泰晴* 太田貞次**

By Yasuharu FUKASAWA and Teiji OHTA

Timoshenko beam theory is extended to the bending-torsion problems of thin-walled beams with open cross-section. The formulation is performed in a systematic way, using both the principles of virtual work and of complementary virtual work. The governing equations of the problem include effects of transverse shear deformations accompanying bending and non-uniform torsion as well as their coupling effects, and rotary and warping inertia in the dynamic case. By means of harmonic wave analysis, dispersion curves of the phase velocity for beams with some typical cross-sections are illustrated. They show that the present theory leads to satisfactory transmission velocities of the waves at short wave-length and high frequencies, compared to the results predicted by the classical theory. In addition, effects of interaction between the different types of shear deformation are shown.

1. はじめに

曲げに伴って発生するせん断ひずみを零とみなすベルヌイ・オイラーばりに対し、断面内に一様なせん断ひずみの分布を仮定するはり理論は、ティモシェンコばり理論¹⁾としてよく知られている。ティモシェンコばりは、1959年代から1960年代にかけて、特にはりの衝撃問題の解析手段として活発な研究対象となったが最近でも座屈や有限変位解析との関連でとりあげられている。^{2), 3)}

薄肉ばりの曲げねじれにおける反り拘束現象は、局所的にはりの曲げ問題と同質的な現象であり、その際発生するせん断ひずみを零とする仮定のもとに、慣用の薄肉ばり理論⁴⁾が成り立っている。その意味からは、慣用の薄肉ばり理論は、はりの曲げ問題におけるベルヌイ・オイラーばりに対応する理論であると云える。そこで、はりの曲げ問題と同様に、そのせん断ひずみに対する仮定を改善することによって、より高精度な薄肉ばり理論を構築すべく、これまでも各種の試みがなされてきた。

それらの研究は、ほゞ次の3つのグループに大別することができる。第1グループは、ティモシェンコばりの変位場を薄肉ばりに拡張した形の変位場を設定し、これに基づいて解析を進めている。ただし、定式化の過程で直応力との釣り合いから求まるいわゆる修正せん断応力による補正は行っていない。Benscoter⁵⁾や Kollbrunner-Hajdin⁶⁾はこの手法によって閉断面ばりを解析している。第2グループでは、第1グルー

* 工博 山梨大学教授 工学部土木工学科 (〒400 甲府市武田4丁目3-11)

** 工修 (株)宮地鉄工所 技術本部設計部 (〒103 東京都中央区日本橋小伝馬町15-18)

プと同様な変位場の設定から出発しているが、断面力－変位関係の誘導にあたって上記の修正せん断応力による補正を行っている。その修正にあたっては、変位場に基づき計算されるせん断ひずみエネルギーと修正せん断応力から計算されるせん断ひずみエネルギーとの等価性を利用している場合が多い。このグループに属するものに、Heilig⁷⁾、Grasse⁸⁾、Roid・Sedlacek⁹⁾、西野・長谷川・名取¹⁰⁾の研究がある。第3グループは、変位場そのものの精度をより高めようとするものであり、Dittaluga¹¹⁾はサンブナンの semi-inverse 法を応用し、稼農・薄木^{12),13)}は修正せん断力分布を考慮して変位場を補正している。

本報告は、第2グループに属するものであるが、その定式化の過程を改善し、特に修正せん断応力による断面力－変位関係式の補正に補仮想仕事の原理を適用することによって、全体的に systematic な論理展開ができるような、より合理的な解析法の構築を目指すものである。その結果として、従来の研究ではなおざりにされている曲げに伴うせん断変形と反り拘束に伴うせん断変形との連成の影響を評価することも可能となる。さらに、動的問題の支配方程式を導き、具体例として代表的な一軸対称断面ばりについて調和波動解析を行う。計算結果は低周波振動から高周波振動までの全領域の動的性質を表す位相速度分散曲線にまとめその特性を調べるとともに本解析法の有効性も検討する。

2. 解析の手順

本解析における基本仮定は、変位場の設定にある。その変位場として、ティモシェンコばりの変位場を薄肉ばりの曲げねじれ問題に拡張した形のもをを設定する。したがって、ここで展開する薄肉ばり理論は、はりの曲げ問題におけるティモシェンコばり理論に対応するものであると云えよう。変位場の設定から出発した定式化の手順の概要を図-1に示す。

変位場とそれから導かれるひずみ場をもとに仮想仕事の原理を適用して、断面力表示の釣り合い式と境界条件が定まる。また、ひずみ場からは、応力－ひずみ関係を考慮して、応力場すなわち、直応力と断面力の関係並びにサン・ブナンのねじりによるせん断応力とねじりモーメントの関係等が求まる。さらに、直応力との釣り合いから導かれる曲げねじれに伴うせん断応力、いわゆる修正せん断応力と断面力の関係が得られる。

次に、断面力－変位関係の誘導は、修正せん断力を含む応力場をもとに、断面力表示の釣り合い式を付帯条件として課した補仮想仕事の原理の適用によって行う。得られた関係式と断面力表示の釣り合い式から、変位表示の釣り合い式が求まる。

3. 変位場

解析対象のはりは、図-2に示すような薄肉開断面ばりとする。慣用の薄肉ばり理論においては、はりの満たすべき幾何学的条件として、はりの長さ l は、断面の代表寸法 d に較べて十分大きく($l > 10d$)、ま

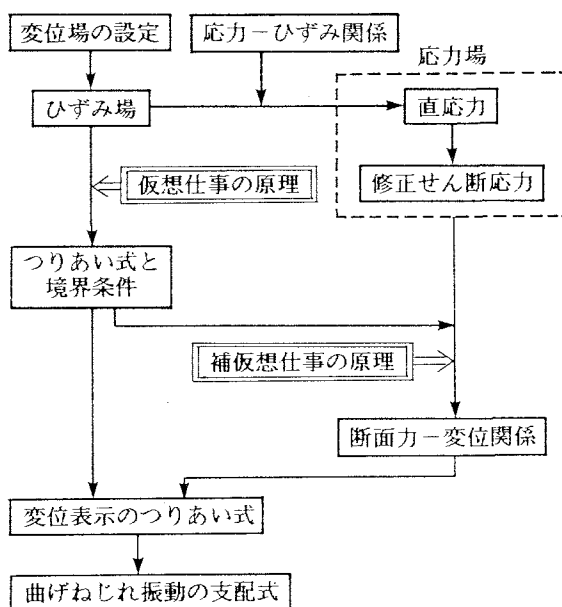


図-1 定式化の流れ

た板厚 t は d に較べて十分小さい ($t < d/10$) としているが、せん断変形を考慮する本解析においては、前者の条件は緩和されることになる。

解析に用いる座標系は、はりの断面の図心 O を原点とし、はりの断面の主軸に一致する x 、 y と、はり軸に沿う z となる右手系の直交デカルト座標系 (x 、 y 、 z) である。さらに補助座標系として、右手系の直交曲線座標系 (n 、 s 、 z) を用いる。 s は断面の薄肉中心線に沿ってとられ、 n は s に垂直である。なお、両座標間の方向余弦を $l = \cos(x, n)$ 、 $m = \cos(n, y)$ で表す。

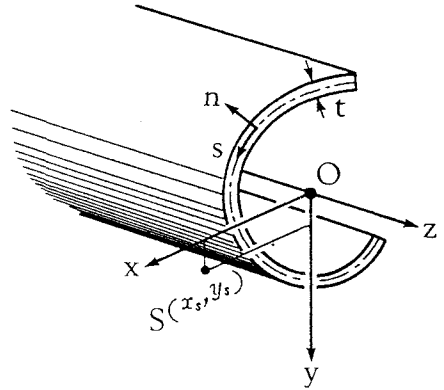


図-2 薄肉開断面ばりと座標系

はり上の任意点 (x 、 y 、 z) の x 、 y 、 z 方向の変位成分をそれぞれ u 、 v 、 w とする。座標 (x_s 、 y_s) をもつせん断中心 S の x 、 y 方向の変位成分をそれぞれ u_s 、 v_s 、図心 O の z 方向の変位成分を w で表す (図心 O が直接はりにない場合は、板厚が無限小の仮想板ではりに結合されていると考える)。さらに、断面のねじれ回転角は φ で表す。

さて、薄肉ばりの曲げねじれに伴うせん断変形の影響を考慮した変位場として、曲げ問題のティモシェンコばりの変位場を拡張した形の次式を設定する。

$$u = u_s - (y - y_s)\varphi, \quad v = v_s + (x - x_s)\varphi, \quad w = w_0 - x\psi_x - y\psi_y - \omega\vartheta \quad (1)_{a-c}$$

ここに、 ω はせん断中心に関する単位反りを表し、自己釣り合い条件を満たしているものとする。これは、慣用の薄肉ばり理論において用いられているものと同一である。 ψ_x 、 ψ_y 、 ϑ はそれぞれ u'_s 、 v'_s 、 φ' ($'$ は z による微分の意) とは異なる変数であり、 z のみの関数である。

式 (1)_{a, b} は断面形状不変の仮定から導かれるものである。一方、式 (1)_c は、 y 、 x 軸まわりの曲げ及び反り拘束ねじりに伴うはり軸方向変位の断面内分布は、それぞれ x 、 y 、 ω に比例するとしていることを意味する。

式 (1) の変位場に対応するひずみ場を、微小ひずみの仮定のもとに、(n 、 s 、 z) 座標系で表すと、次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_n = \epsilon_s = \gamma_{ns} &= 0, & \epsilon_z &= w'_0 - x\psi'_x - y\psi'_y - \omega\vartheta' \\ \gamma_{sz} &= \chi\vartheta - (u'_s - \psi_x)m + (v'_s - \psi_y)l + (\varphi' - \vartheta)h_n \\ \gamma_{zn} &= (u'_s - \psi_x)l + (v'_s - \psi_y)m - (\varphi' - \vartheta)h_s \end{aligned} \right\} \quad (2)_{a-d}$$

ここに、 h_n 、 h_s はせん断中心 S から薄肉中心線の任意点 s にひいた位置ベクトルのそれぞれ n 、 s 方向成分である。また、 $\chi = 2n$ である。

4. 力の釣り合い式と境界条件

薄肉ばりに作用する外力として、はりの単位堆積あたりに作用する分布力 p と、はりの両端断面の単位面積あたりに作用する表面力 t とを考える。 x 、 y 、 z 方向の単位ベクトルをそれぞれ i_x 、 i_y 、 i_z とし、 p 、 t を次のように表す。

$$p = p_x i_x + p_y i_y + p_z i_z, \quad t = t_x i_x + t_y i_y + t_z i_z$$

これらの外力を受けて釣り合い状態にある薄肉ばりに対する仮想仕事の原理は次式で書ける。

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_F (\sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{sz} \delta \gamma_{sz} + \tau_{zn} \delta \gamma_{zn}) dF dz - \int_{z_1}^{z_2} \int_F (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dF dz$$

$$-\left[n_z \int_F (t_x \delta u + t_y \delta v + t_z \delta w) dF\right]_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (3)$$

ここに、 z_1, z_2 ははりの両端断面の z 座標 ($n_1 > n_2$ とする)、 F ははりの断面積、 n_z は $z = z_1$ で $n_z = -1$ 、 $z = z_2$ で $n_z = 1$ である。

式(3)に式(1)および(2)を代入し、力の釣り合い式と境界条件が定まる。力の釣り合い式としては、 $z_1 < z < z_2$ に対して

$$\left. \begin{aligned} N' + q_z = 0, \quad Q_x' + q_x = 0, \quad Q_y' + q_y = 0, \quad M_x' - Q_x + m_x = 0 \\ M_y' - Q_y + m_y = 0, \quad T' - m_t = 0, \quad M_w' - T_w + m_w = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)_{a-g}$$

を得る。また、両端断面 $z = z_1$ 、 $z = z_2$ における境界条件として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} w_0 = \bar{w}_0 \text{ または } N = n_z \bar{N}, \quad u_s = \bar{u}_s \text{ または } Q_x = n_z \bar{Q}_x \\ v_s = \bar{v}_s \text{ または } Q_y = n_z \bar{Q}_y, \quad \varphi = \bar{\varphi} \text{ または } T = n_z \bar{T} \\ \psi_x = \bar{\psi}_x \text{ または } M_x = n_z \bar{M}_x, \quad \psi_y = \bar{\psi}_y \text{ または } M_y = n_z \bar{M}_y \\ \vartheta = \bar{\vartheta} \text{ または } M_w = n_z \bar{M}_w \end{aligned} \right\} \quad (5)_{a-g}$$

式(4)および(5)における断面力および外力はそれぞれ次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} N = \int_F \sigma_z dF, \quad M_x = \int_F \sigma_z x dF, \quad M_y = \int_F \sigma_z y dF, \quad M_w = \int_F \sigma_z \omega dF \\ Q_x = \int_F (-\tau_{sz} m + \tau_{zn} l) dF, \quad Q_y = \int_F (\tau_{sz} l + \tau_{zn} m) dF \\ T = \int_F (\tau_{sz} h_n - \tau_{zn} h_s) dF, \quad T_w = T - T_z, \quad T_z = \int_F \tau_{sz} \chi dF \end{aligned} \right\} \quad (6)_{a-i}$$

$$\left. \begin{aligned} q_x = \int_F p_x dF, \quad q_y = \int_F p_y dF, \quad q_z = \int_F p_z dF, \quad m_x = \int_F p_x x dF \\ m_y = \int_F p_x y dF, \quad m_w = \int_F p_x \omega dF, \quad m_t = \int_F \{p_y(x - x_s) - p_x(y - y_s)\} dF \end{aligned} \right\} \quad (7)_{a-g}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} = \int_F t_z dF, \quad \bar{Q}_x = \int_F t_x dF, \quad \bar{Q}_y = \int_F t_y dF, \quad \bar{M}_x = \int_F t_z x dF \\ \bar{M}_y = \int_F t_z y dF, \quad \bar{M}_w = \int_F t_z \omega dF, \quad \bar{T} = \int_F \{t_y(x - x_s) - t_x(y - y_s)\} dF \end{aligned} \right\} \quad (8)_{a-g}$$

なお、式(5)における $\bar{w}_0, \bar{u}_s, \bar{v}_s, \bar{\varphi}, \bar{\psi}_x, \bar{\psi}_y$ および $\bar{\vartheta}$ はそれぞれ境界において与えられる変位量であることを意味している。

5. 応力場

ヤング率、せん断弾性係数をそれぞれ E, G とし、応力-ひずみ関係式を次式で表す。

$$\sigma_z = E \varepsilon_z, \quad \tau_{sz} = G \gamma_{sz} \quad (9)_{a,b}$$

なお、 $\tau_{zn} (= G \gamma_{zn})$ については、薄肉に対しては微小であるので、慣用の薄肉ばり理論の場合と同様に以後の解析では無視することにする。

式(2)_{b, c}、(6)_{a-d}、(6)_i、(9)より、直応力の合力としての断面力およびサンプソンのねじりモーメントと変位の関係が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} N = E F w_0', \quad M_x = -E I_{xx} \psi_x', \quad M_y = -E I_{yy} \psi_y' \\ M_w = -E I_{ww} \vartheta', \quad T_z = G I_{xz} \varphi' \end{aligned} \right\} \quad (10)_{a-e}$$

ここに、

$$I_{xx} = \int_F x^2 dF, \quad I_{yy} = \int_F y^2 dF, \quad I_{ww} = \int_F \omega^2 dF, \quad I_{xz} = \int_F \chi^2 dF \quad (11)_{a-d}$$

さらに、式(2)_b、(9)_a、(10)_{a-d}より、直応力 σ_z は断面力によって次のように表される。

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_{xx}}x + \frac{M_y}{I_{yy}}y + \frac{M_\omega}{I_{\omega\omega}}\omega \quad (12)$$

一方、せん断力 τ_{sz} は、サンブナンのねじれによるせん断応力と、直応力との釣り合い条件

$$\frac{\partial(\tau_{sz}t)}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

から定められる曲げおよび反り拘束ねじれに伴うせん断応力との和として、すなわち修正せん断応力として次式で表される。

$$\tau_{sz} = \frac{T_x}{I_{xz}}x - \frac{Q_x}{I_{xx}t}S_x - \frac{Q_y}{I_{yy}t}S_y - \frac{T_\omega}{I_{\omega\omega}t}S_\omega \quad (14)$$

ここに、

$$S_x = \int_0^s x t ds, \quad S_y = \int_0^s y t ds, \quad S_\omega = \int_0^s \omega t ds \quad (15)_{a-c}$$

ただし、式(15)における s の原点は薄肉肉中心線の自由縁にとっている。式(12)と式(14)は慣用の薄肉ばり理論の場合と同型である。

6. 断面力と変位の関係

通常、断面力と変位の関係は、5. においてその一部にあたる式(10)を求めたように、ひずみ場と応力—ひずみ関係を用いて導かれる。しかるに、せん断応力に関しては、修正応力場の方がひずみ場より精度が高い点に配慮して、ここでは修正応力場をもとに、補仮想仕事の原理を使って総括的に定める。

補仮想仕事の原理は次のように書ける。

$$\delta(\Pi_i^c + \Pi_e^c + \Pi_N^c) = 0 \quad (16)$$

ここに、 $\delta \Pi_i$ および $\delta \Pi_e$ は各々内力および外力の補仮想仕事を表し、 $\delta \Pi_N$ ($= \delta \Sigma G_i \lambda_i$) は付帯条件の項を意味している。

内力の補仮想仕事は、式(9),(12),(14) とから次のように計算される。

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i^c &= \int_{z_1}^{z_2} \int_F (\varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{sz} \delta \tau_{sz}) dF dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \frac{N}{EF} \delta N + \frac{M_x}{EI_{xx}} \delta M_x + \frac{M_y}{EI_{yy}} \delta M_y + \frac{M_\omega}{EI_{\omega\omega}} \delta M_\omega + \frac{T_x}{GI_{xz}} \delta T_x \right. \\ &\quad + \left(\frac{Q_x B_{xx}}{I_{xx}} + \frac{Q_y B_{xy}}{I_{yy}} + \frac{T_\omega B_{x\omega}}{I_{\omega\omega}} \right) \frac{\delta Q_x}{GI_{xx}} + \left(\frac{Q_x B_{xy}}{I_{xx}} + \frac{Q_y B_{yy}}{I_{yy}} + \frac{T_\omega B_{y\omega}}{I_{\omega\omega}} \right) \frac{\delta Q_y}{GI_{yy}} \\ &\quad \left. + \left(\frac{Q_x B_{x\omega}}{I_{xx}} + \frac{Q_y B_{y\omega}}{I_{yy}} + \frac{T_\omega B_{\omega\omega}}{I_{\omega\omega}} \right) \frac{\delta T_\omega}{GI_{\omega\omega}} \right\} dz \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} B_{xx} &= \int_F \frac{S_x^2}{t^2} dF, \quad B_{xy} = \int_F \frac{S_x S_y}{t^2} dF, \quad B_{yy} = \int_F \frac{S_y^2}{t^2} dF \\ B_{x\omega} &= \int_F \frac{S_x S_\omega}{t^2} dF, \quad B_{y\omega} = \int_F \frac{S_y S_\omega}{t^2} dF, \quad B_{\omega\omega} = \int_F \frac{S_\omega^2}{t^2} dF \end{aligned} \right\} \quad (18)_{a-c}$$

これらは、 S_x/t , S_y/t , S_ω/t の2次量を被積分量とする断面積分値として新たに定義されたものであり、直応力の場合の x , y , ω の2次量を被積分量とする断面積分値である I_{xx} , I_{yy} , $I_{\omega\omega}$ 等に対応するものである。

外力の補仮想仕事は、式(1),(7),(8) を考慮して次のように表される。

$$\begin{aligned} \delta \Pi_e^c &= - \int_{z_1}^{z_2} \int_F (u \delta p_x + v \delta p_y + w \delta p_z) dF dz - \left[n_z \int_F (u \delta t_x + v \delta t_y + w \delta t_z) dF \right]_{z_1}^{z_2} \\ &= - \int_{z_1}^{z_2} (w_0 \delta q_z + u_s \delta q_x + v_s \delta q_y + \varphi \delta m_t - \psi_x \delta m_x - \psi_y \delta m_y - \vartheta \delta m_\omega) dz \end{aligned}$$

$$-\left[n_z(w_0\delta\bar{N}+u_s\delta\bar{Q}_x+v_s\delta\bar{Q}_y+\varphi\delta\bar{T}-\psi_x\delta\bar{M}_x-\psi_y\delta\bar{M}_y-\vartheta\delta\bar{M}_w)\right]_{z_1}^{z_2} \quad (19)$$

付帯条件の項は、ラグランジュの乗数 λ_i ($i=1,2,\dots,7$)を用い、条件式として力の釣り合い式(4)を課す。すなわち

$$\begin{aligned} \delta II_N^c &= \delta \sum_{i=1}^7 G_i \lambda_i \\ &= \delta \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \lambda_1(N'+q_z) + \lambda_2(Q_x'+q_x) + \lambda_3(Q_y'+q_y) + \lambda_4(M_x'-Q_x+m_x) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_5(M_y'-Q_y+m_y) + \lambda_6(T'+m_t) + \lambda_7(M_w'-T_w+m_w) \right\} dz \end{aligned}$$

式(6)_hを考慮し、部分積分を施して次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta II_N^c &= - \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \lambda_1' \delta N + (\lambda_2' + \lambda_4) \delta Q_x + (\lambda_3' + \lambda_5) \delta Q_y + \lambda_4' \delta M_x + \lambda_5' \delta M_y + \lambda_6' \delta T_x \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_6' - \lambda_7) \delta T_w + \lambda_7' \delta M_w - \lambda_1 \delta q_z - \lambda_2 \delta q_x - \lambda_3 \delta q_y - \lambda_4 \delta m_x - \lambda_5 \delta m_y - \lambda_6 \delta m_t \right. \\ &\quad \left. - \lambda_7 \delta m_w \right\} dz + \left[\lambda_1 \delta N + \lambda_2 \delta Q_x + \lambda_3 \delta Q_y + \lambda_4 \delta M_x + \lambda_5 \delta M_y + \lambda_6 \delta T + \lambda_7 \delta M_w \right]_{z_1}^{z_2} \quad (20) \end{aligned}$$

ラグランジュの乗数 λ_i ($i=1,2,\dots,7$)は、式(16)に式(19),(20)を代入した際、左辺の境界項が消失する条件から、境界条件式(5)を考慮して次のように定まる。

$$\lambda_1=w_0, \quad \lambda_2=u_s, \quad \lambda_3=v_s, \quad \lambda_4=-\psi_x, \quad \lambda_5=-\psi_y, \quad \lambda_6=\varphi, \quad \lambda_7=-\vartheta \quad (21)_{a-g}$$

結局、式(17),(19),(21)を適用した式(16)が、任意の仮想力に対して成り立つための必要十分条件として次のような断面力と変位の関係式が一括して得られる。

$$\left. \begin{aligned} N &= EFw_0', \quad M_x = -EI_{xx}\psi_x', \quad M_y = -EI_{yy}\psi_y' \\ M_w &= -EI_{ww}\vartheta', \quad T_x = GI_{xx}\varphi' \\ \frac{Q_x B_{xx}}{I_{xx}} + \frac{Q_y B_{xy}}{I_{yy}} + \frac{T_w B_{xw}}{I_{ww}} &= GI_{xx}(u_s' - \psi_x) \\ \frac{Q_x B_{xy}}{I_{xx}} + \frac{Q_y B_{yy}}{I_{yy}} + \frac{T_w B_{yw}}{I_{ww}} &= GI_{yy}(v_s' - \psi_y) \\ \frac{Q_x B_{xw}}{I_{xx}} + \frac{Q_y B_{yw}}{I_{yy}} + \frac{T_w B_{ww}}{I_{ww}} &= GI_{ww}(\varphi' - \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (22)_{a-h}$$

もちろん、式(22)_{a-e}はすでに求めた式(10)_{a-e}に一致する。式(22)_{f-h}は、ここに新たに求められたもので、曲げおよび反り拘束ねじれに伴うせん断力と変位の関係を与えるものである。

式(22)_{f-h}を Q_x, Q_y, T_w について解くと

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ T_w \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xw} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{yw} \\ D_{xw} & D_{yw} & D_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s' - \psi_x \\ v_s' - \psi_y \\ \varphi' - \vartheta \end{Bmatrix} \quad (23)$$

ここに、

$$\begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xw} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{yw} \\ D_{xw} & D_{yw} & D_{ww} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xw} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{yw} \\ B_{xw} & B_{yw} & B_{ww} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ww} \end{bmatrix} \quad (24)$$

断面が一軸対称の場合、対称軸を x 軸にとると

$$B_{xy} = B_{xw} = 0 \quad (25)$$

となる。したがって、次式が成り立つ。

$$D_{xy} = D_{xw} = 0, \quad D_{xx} = \frac{I_{xx}^2}{B_{xx}}, \quad D_{yy} = \frac{I_{yy}^2 \cdot B_{ww}}{B_{yy}B_{ww} - B_{yw}^2} \quad (26)_{a-c}$$

$$D_{y\omega} = -\frac{I_{yy}I_{\omega\omega}B_{y\omega}}{B_{yy}B_{\omega\omega}-B_{y\omega}^2}, \quad D_{\omega\omega} = \frac{I_{\omega\omega}B_{yy}}{B_{yy}B_{\omega\omega}-B_{y\omega}^2} \quad (26)_{a,c}$$

さらに、二軸対称断面の場合には

$$B_{xy} = B_{x\omega} = B_{y\omega} = 0 \quad (27)$$

となり、次式が得られる。

$$D_{xy} = D_{x\omega} = D_{y\omega} = 0, \quad D_{xx} = \frac{I_{xx}^2}{B_{xx}}, \quad D_{yy} = \frac{I_{yy}^2}{B_{yy}}, \quad D_{\omega\omega} = \frac{I_{\omega\omega}^2}{B_{\omega\omega}} \quad (28)_{a-d}$$

この場合には、式(23)は次のようになる。

$$Q_x = G D_{xx}(u_s' - \psi_x), \quad Q_y = G D_{yy}(v_s' - \psi_y), \quad T_\omega = G D_{\omega\omega}(\varphi' - \vartheta) \quad (29)_{a-c}$$

ここで

$$D_{xx} = \kappa_x F, \quad D_{yy} = \kappa_y F, \quad D_{\omega\omega} = \kappa_\omega I_{xx} \quad (30)_{a-c}$$

とおくと、 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_\omega$ は式(18), (28), (30)より次式で表されることになる。

$$\frac{1}{\kappa_x} = \frac{F}{I_{xx}^2} \int_F \frac{S_x^2}{t^2} dF, \quad \frac{1}{\kappa_y} = \frac{F}{I_{yy}^2} \int_F \frac{S_y^2}{t^2} dF, \quad \frac{1}{\kappa_\omega} = \frac{I_{xx}}{I_{\omega\omega}^2} \int_F \frac{S_\omega^2}{t^2} dF \quad (31)_{a-c}$$

これらは、既往の研究^{7)~10)}におけるせん断補正係数に他ならない。したがって、従来用いられていたせん断補正係数は本来二軸対称断面に対してあてはまるものであることがわかる。

7. 変位表示の釣り合い式

式(4)の釣り合い式に、式(22)_{a-d}および式(23)を代入すると、曲げおよび反り拘束ねじりに伴うせん断変形を考慮した変位表示の静的釣り合い式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} EFw_0'' + q_z &= 0 \\ GD_{xx}(u_s'' - \psi_x') + GD_{xy}(v_s'' - \psi_y') + GD_{x\omega}(\varphi'' - \vartheta') + q_x &= 0 \\ EI_{xx}\psi_x'' + GD_{xx}(u_s' - \psi_x) + GD_{xy}(v_s' - \psi_y) + GD_{x\omega}(\varphi' - \vartheta) - m_x &= 0 \\ GD_{xy}(u_s'' - \psi_x') + GD_{yy}(v_s'' - \psi_y') + GD_{y\omega}(\varphi'' - \vartheta') - m_y &= 0 \\ EI_{yy}\psi_y'' + GD_{xy}(u_s' - \psi_x) + GD_{yy}(v_s' - \psi_y) + GD_{y\omega}(\varphi' - \vartheta) + q_y &= 0 \\ GI_{xx}\varphi'' + GD_{x\omega}(u_s'' - \psi_x') + GD_{y\omega}(v_s'' - \psi_y') + GD_{\omega\omega}(\varphi'' - \vartheta') + m_t &= 0 \\ EI_{\omega\omega}\vartheta'' + GD_{x\omega}(u_s' - \psi_x) + GD_{y\omega}(v_s' - \psi_y) + GD_{\omega\omega}(\varphi' - \vartheta) - m_\omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)_{a-g}$$

慣用の薄肉ばり理論においては、はり軸方向の伸縮、両主軸まわりの曲げ、ねじりのそれぞれの支配方程式は、互いに独立であるが、上式においては、はり軸方向の伸縮を除き、他はすべて連成関係にあることが知られる。

断面形が一軸対称の場合は、対称軸をx軸とすると、式(26)_aが成り立つ。したがって、はり軸方向の伸縮とy軸まわりの曲げはそれぞれ独立し、x軸まわりの曲げとねじれが連成することになる。さらに二軸対称断面の場合には、式(28)_aが成り立つので、はり軸方向の伸縮、両主軸まわりの曲げ、ねじれの4成分がそれぞれ独立した支配方程式となる。

8. 振動方程式

はりの単位体積あたりの慣用力のx, y, z方向成分を、それぞれ $\check{p}_x, \check{p}_y, \check{p}_z$ とすると、式(1)を用いて次式が得られる。

$$\check{p}_x = -\rho \ddot{u} = -\rho \{\ddot{u}_s - (y - y_s)\ddot{\varphi}\}, \quad \check{p}_y = -\rho \ddot{v} = -\rho \{\ddot{v}_s + (x - x_s)\ddot{\varphi}\} \quad (33)_{a,b}$$

$$\ddot{p}_z = -\rho i\ddot{v} = -\rho \{\ddot{v}_0 - x\ddot{\psi}_x - y\ddot{\psi}_y - \omega\ddot{v}\} \quad (33)_c$$

ここに、 ρ ははりの材料の密度であり、 $(\cdot)$ は $(\cdot)$ の時間 t による微分の意である。これらを (7) と同様な断面積分によって、はりの単位長さ当たりの慣性力に置き換えると

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_x &= -\rho F(\ddot{u}_s + y_s\ddot{\phi}), \quad \ddot{q}_y = -\rho F(\ddot{v}_s - x_s\ddot{\phi}), \quad \ddot{q}_z = -\rho F\ddot{w}_0, \quad \ddot{m}_x = \rho I_{xx}\ddot{\psi}_x \\ \ddot{m}_y &= \rho I_{yy}\ddot{\psi}_y, \quad \ddot{m}_\omega = \rho I_{\omega\omega}\ddot{\psi}, \quad \ddot{m}_t = -\rho F(y_s\ddot{u}_s - x_s\ddot{v}_s + r_s^2\ddot{\phi}) \end{aligned} \right\} \quad (34)_{a-g}$$

ここに、 r_s は断面せん断中心 S に関する極回転半径である。すなわち

$$r_s^2 = \frac{1}{F} \int_F \{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2\} dF \quad (35)$$

式 (32) における外力を、式 (34) の慣性力と動的外力で置き換えて、曲げと反り拘束ねじりに伴うせん断変形を考慮した薄肉ばりの振動方程式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} EF i\ddot{v}_0'' - \rho F i\ddot{v}_0 + \ddot{q}_z(z, t) &= 0 \\ GD_{xx}(u_s'' - \phi_x') + GD_{xy}(v_s'' - \phi_y') + GD_{x\omega}(\varphi'' - \vartheta') - \rho F(\ddot{u}_s + y_s\ddot{\phi}) + \ddot{q}_x(z, t) &= 0 \\ EI_{xx}\phi_x'' + GD_{xx}(u_s' - \phi_x) + GD_{xy}(v_s' - \phi_y) + GD_{x\omega}(\varphi' - \vartheta) - \rho I_{xx}\ddot{\psi}_x - \ddot{m}_x(z, t) &= 0 \\ GD_{xy}(u_s'' - \phi_x') + GD_{yy}(v_s'' - \phi_y') + GD_{y\omega}(\varphi'' - \vartheta') - \rho F(\ddot{v}_s - x_s\ddot{\phi}) + \ddot{q}_y(z, t) &= 0 \\ EI_{yy}\phi_y'' + GD_{xy}(u_s' - \phi_x) + GD_{yy}(v_s' - \phi_y) + GD_{y\omega}(\varphi' - \vartheta) - \rho I_{yy}\ddot{\psi}_y - \ddot{m}_y(z, t) &= 0 \\ GI_{xz}\varphi'' + GD_{x\omega}(u_s'' - \phi_x') + GD_{y\omega}(v_s'' - \phi_y') + GD_{\omega\omega}(\varphi'' - \vartheta') \\ &\quad - \rho F(y_s\ddot{u}_s - x_s\ddot{v}_s + r_s^2\ddot{\phi}) + \ddot{m}_t(z, t) = 0 \\ EI_{\omega\omega}\vartheta'' + GD_{x\omega}(u_s' - \phi_x) + GD_{y\omega}(v_s' - \phi_y) + GD_{\omega\omega}(\varphi' - \vartheta) - \rho I_{\omega\omega}\ddot{\psi} - \ddot{m}_\omega(z, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)_{a-g}$$

ここに、各式の左辺の最終項は、それぞれ式 (32) における静的外力に対応した動的外力を意味している。

静的釣り合い式 (32) の場合と同様に、式 (36) の方程式系においても、はり軸方向の挙動の支配式のみ独立し、残りの両主軸まわりの曲げおよびねじれ挙動の支配式はすべて連成している。一軸対称断面の場合、対称軸を x 軸とすると、式 (26)_a および $y_s = 0$ が成り立ち、 y 軸まわりの曲げの支配式がさらに分離され、残りは x 軸まわりの曲げとねじれの連成式となる。9. における数値解析例で用いるために、以下に x 軸まわりの曲げとねじれの連成振動の支配式を記しておく。

$$\left. \begin{aligned} GD_{yy}(v_s'' - \phi_y') + GD_{y\omega}(\varphi'' - \vartheta') - \rho F(\ddot{v}_s - x_s\ddot{\phi}) + \ddot{q}_y(z, t) &= 0 \\ EI_{yy}\phi_y'' + GD_{yy}(v_s' - \phi_y) + GD_{y\omega}(\varphi' - \vartheta) - \rho I_{yy}\ddot{\psi}_y - \ddot{m}_y(z, t) &= 0 \\ GI_{xz}\varphi'' + GD_{y\omega}(v_s'' - \phi_y') + GD_{\omega\omega}(\varphi'' - \vartheta') + \rho F(x_s\ddot{v}_s - r_s^2\ddot{\phi}) + \ddot{m}_t(z, t) &= 0 \\ EI_{\omega\omega}\vartheta'' + GD_{y\omega}(v_s' - \phi_y) + GD_{\omega\omega}(\varphi' - \vartheta) - \rho I_{\omega\omega}\ddot{\psi} - \ddot{m}_\omega(z, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)_{a-d}$$

9. 調和波動解析と数値計算例

ここでは具体的な解析例として、一軸対称断面をもつ薄肉ばりについて、対称軸まわりの曲げとねじれの連成した調和波動の解析を行う。曲げおよび反り拘束ねじれに伴うせん断変形の影響は、ある程度以上の高い周波数領域において顕著に現れるので、位相速度と波長との関係を表す位相速度分散曲線を描いて、その影響度合や解の妥当性を調べることにする。

断面の対称軸を x 軸とし、位相速度 c_p 、波長 λ の z 軸方向へ進行する正弦波を考え、各変位成分を次式で表す。

$$\langle u_s \quad \phi_y \quad \varphi \quad \vartheta \rangle = \langle C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \rangle \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z - c_p t) \quad (38)$$

$C_1 \sim C_4$ は各変位成分の振幅を表す定数である。強制外力の項を零とおいた式 (37) に式 (38) を代入して、固有値問題として位相速度 c_p を定める次のような行列式が得られる。

$$\begin{vmatrix} \kappa_{yy} - \left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 & \kappa_{yy} & \kappa_{y\omega} - \frac{x_s}{r_\omega} \left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 & \kappa_{y\omega} \\ \kappa_{yy} & \kappa_{yy} + 4\pi^2 \left(\frac{r_y}{\lambda}\right)^2 \left\{ \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2 - \left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 \right\} & \kappa_{y\omega} & \kappa_{y\omega} \\ \kappa_{y\omega} + \frac{x_s}{r_\omega} \left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 & \kappa_{y\omega} & \kappa_{\omega\omega} + \left(\frac{r_t}{r_\omega}\right)^2 - \left(\frac{r_s}{r_\omega}\right)^2 \left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 & \kappa_{\omega\omega} \\ \kappa_{y\omega} & \kappa_{y\omega} & \kappa_{\omega\omega} & \kappa_{\omega\omega} + 4\pi^2 \left(\frac{r_\omega}{\lambda}\right)^2 \left\{ \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2 - \left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 \right\} \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

ここに、 r_y, r_t, r_ω は長さのディメンジョンをもつ断面量、 $\kappa_{yy}, \kappa_{y\omega}, \kappa_{\omega\omega}$ は無次元量、 c_0, c_2 は縦波、せん断波の波速に相当し、それぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} r_y^2 &= \frac{I_{yy}}{F}, \quad r_t^2 = \frac{I_{xx}}{F}, \quad r_\omega^4 = \frac{I_{\omega\omega}}{F}, \quad \kappa_{yy} = \frac{D_{yy}}{F}, \quad \kappa_{y\omega} = \frac{D_{y\omega}}{F r_\omega}, \quad \kappa_{\omega\omega} = \frac{D_{\omega\omega}}{F r_\omega^2} \\ c_0^2 &= \frac{E}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (40)_{a-h}$$

図-3に示す3種の一軸対称断面の薄肉ばりについて、式(39)を数値計算によって解き、正弦波の位相速度 c_p と波長 λ の関係を求めた。結果の一例を図-4から図-7までに示す。図において実線は本解析による結果を示し破線は曲げに伴うせん断変形と反り拘束ねじれに伴うせん断変形との連成を

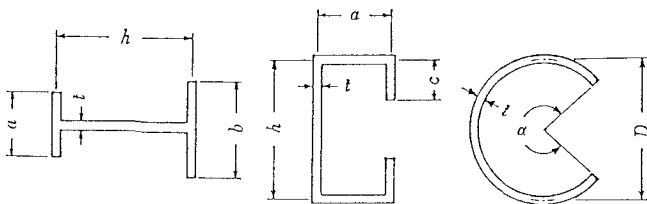
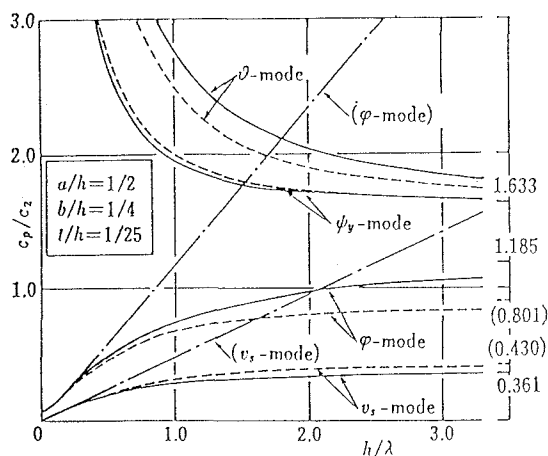
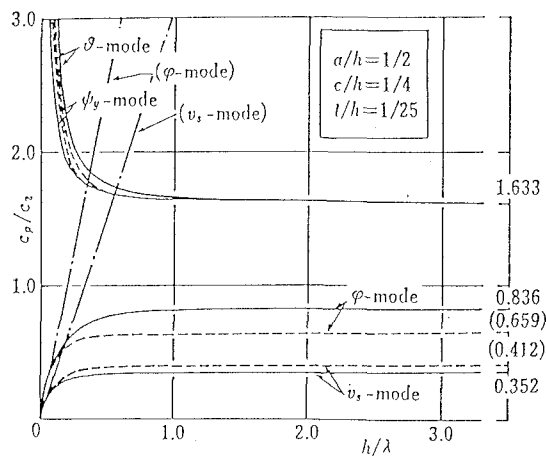


図-3 数値解析を行った一軸対称断面



—— 本理論, ---- 連成無視, 慣用理論



—— 本理論, ---- 連成無視, 慣用理論

図-4 不等フランジI型断面ばりの位相速度分散曲線

図-5 C断面ばりの位相速度分散曲線

無視した場合の結果である。一点鎖線は、慣用の薄肉ばり理論の振動方程式によって計算した値を表している。なお、これらの図中の v_s -mode、 ψ_y -mode、 φ -mode、 ϑ -modeは、式(39)を解いて得られる4つの c_p の値に対応する4種のモードのうち、最も卓越する変位成分がそれぞれ v_s 、 ψ_y 、 φ 、 ϑ であることを意味している。

図-4から図-7は、ともにせん断変形を考慮した解析結果である実線および破線の場合には、両者の間に差はあるものの波長がある値より小さい領域、すなわち周波数の大きい領域では、波速は波長に無関係にはゞ一定になり、4種のモードがそれぞれ一定速度で伝播することをいづれの図も物語っている。これに対し、慣用の薄肉ばり理論の結果は、波長が極めて大きい領域では前2者の結果と一致しているが、全領域で波速は周波数にはゞ比例して増大し、したがって高周波領域では波動の伝播はほとんど瞬間的であることを意味している。しかも、波長ごとに波速が異なるので、波動は伝播の過程でその波形を次第にくずしていく分散現象を呈することになる。これは実体にそぐわないところであり、ティモシェンコばりに関する研究のなかでも指摘されてきたことでもある。

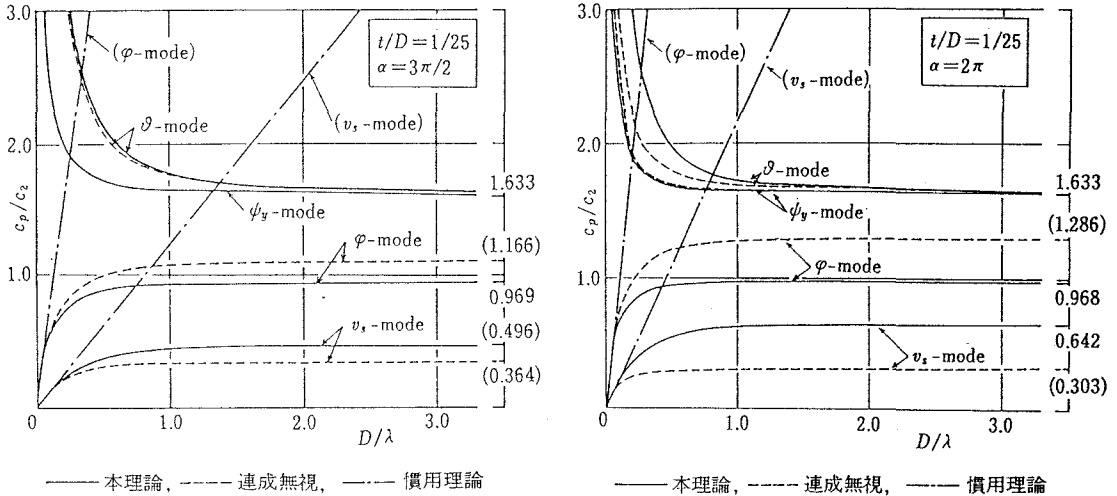


図-6 円弧型断面ばりの位相速度分散曲線 (I) 図-7 円弧型断面ばりの位相速度分散曲線 (II)

曲げに伴うせん断変形と反り拘束ねじれに伴うせん断変形との連成の影響を評価することは、本研究の目的の一つであった。その影響の度合は、断面形状特性に依存し、特に断面の図心とせん断中心間の隔たりが大きい程顕著に現れることが知られた。このことは、円弧型断面の中心角 α が $3\pi/2$ および 2π に対する図-6および図-7の比較からも明らかである。一方、中心角 α が $\pi/2$ の円弧型断面および溝型断面(□型断面で $c=0$ とした場合)においては、連成の影響は実用上ほとんど無視してよい程度のものであった。なお、溝型断面ばりについて計算した位相速度分散曲線は、Aggarwal・Granch¹⁴⁾がフランジとウェブをそれぞれティモシェンコばりとして解き、それをはりとして集成する手法によって解析した結果とほぼ同様な傾向を示した。

10. お わ り に

本報告は、慣用の薄肉ばり理論の解析上の主要な仮定の一つである薄肉中心断面におけるせん断ひずみに対する仮定を改善し、部材長が断面寸法の10倍以下の比較的短い薄肉ばりの静的解析問題、あるいは薄肉ばりの衝撃応答解析のような高周波振動問題等にも適用しうるような解析法、すなわち曲げと反り拘束ねじれに伴うせん断変形を考慮した薄肉ばり理論の開発を目指したものである。

その特徴は、解析の定式化を全体を通じてより systematic な論理展開のもとに遂行しようと試みたことであり、またその結果として、既往の研究においてなおざりにされている曲げに伴うせん断変形と反り拘束に伴うせん断変形の連成の影響の評価も可能にしたことである。

まず、変位場として、ティモシェンコばりの変位場を薄肉ばりに拡張し、一次元の棒理論としては比較的妥当と思われる変位場を設定し、これから導かれるひずみ場とをもとに、仮想仕事の原理によって断面力の釣り合い式を定めた。一方、断面力-変位関係式の誘導は、修正応力場に基づき補仮想仕事の原理を適用した。その際、新たな断面定数として、直応力と断面力の関係式における一般座標 (x, y, z) に対応した形で、修正せん断応力と断面力の関係式に現れる一般座標 ($S_x/t, S_y/t, S_\omega/t$) の2次量を被積分項とする断面積分値が導入された。なお、本報告では薄肉開断面を解析の対象としたが、薄肉閉断面の場合には、この一般座標 ($S_x/t, S_y/t, S_\omega/t$) として閉断面に対応するものを用いればよい。

数値計算例として、代表的な3種の一軸対称の開断面の薄肉ばりについて、部材長および断面寸法に関する無次元パラメータを種々変化させて調和波動解析を行い、その結果を位相速度分散曲線にまとめた。これらは、慣用の薄肉ばり理論によるものに較べて、より実体に近い傾向を示した。また、曲げねじれ正弦波動的伝播特性や曲げに伴うせん断変形と反り拘束ねじれに伴うせん断変形の連成の影響等に関する情報も得られた。

参考文献

- 1) Timoshenko, S.P.: On the correction of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, Philosophical Magazine, Series 6, Vol.41, pp.744-746, 1921.
- 2) Iwakuma, T. and Kuranishi, S.: How much contribution does the shear deformation have in a beam theory, Proc. of JSCE, Structural Eng./ Earthquake Eng., Vol.1, No.1, pp.103s~113s, 1984.
- 3) Hasegawa, A., Iwakuma, T. and Kuranishi, S.: A linearized Timoshenko beam theory in finite displacements, Proc. of JSCE, Structural Eng./ Earthquake Eng., Vol.2, No.2, pp.321s~326s, 1985.
- 4) Vlasov, V. Z. (奥村敏恵他共訳): 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967.
- 5) Benscoter, S. U.: A theory of torsion bending for multicell beams, Journal of Applied Mechanics, Vol.21, No.1, pp.25~34, 1954.
- 6) Kollbrunner, C. F. und Hajdin, N.: Dunnwandige Stäbe, Band I, Springer-Verlag, 1972.
- 7) Heilig, R.: Der Schubverformungseinfluss auf die Wolkrafttortion von Stäben mit offenem Profil, Der Stahlbau, Heft 4, pp.97 ~ 103, 1961.
- 8) Grasse, W.: Wolkrafttortion dünnwandiger prismatischer Stäbe beliebigen Querschnitts, Ingenieur-Archiv, Band 34, pp.330 ~ 338, 1965.
- 9) Roik, K. und Sedlacek, G.: Theorie der Wolkrafttortion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen Analogiebetachtung zur Berechnung des querbelasteten Zugstabes, Der Stahlbau, Heft 2, pp.43 ~ 52, 1966.
- 10) 西野・長谷川・名取: 断面変形とせん断変形を考慮した長方形薄肉ばりの理論, 土木学会論文報告集 No.248, pp.25 ~ 40, 1976.
- 11) Pittaluga, A.: Recent developments in the theory of thin-walled beams, Computers & Structures, Vol.9, pp.69~79, 1978.
- 12) 稼農・薄木・堀江: せん断変形を考慮した薄肉断面直線ばりの理論, 土木学会論文報告集, No.282, pp.1~13, 1972.
- 13) Kano, T. Usuki, S. and Hasebe, K.: Theory of thin-walled curved members with shear deformation, Ingenieur-Archiv, Band 51, pp.325~336, 1982.
- 14) Aggarwal, H. R. and Cranch, E. T.: A Theory of torsional and coupled bending torsional

waves in thin-walled open section beams, Journal of Applied Mechanics, Vol.34, No.2, pp.337~343, 1976.

- 15) 深沢泰晴：薄肉ばりの曲げねじれ振動波の伝播について，土木学会第28回年次学術講演会講演概要集 第Ⅰ部，pp.466~467, 1973.
- 16) 深沢・太田：薄肉ばりの曲げせん断変形と曲げねじれせん断変形との連成問題，土木学会第31回年次学術講演会講演概要集，第Ⅰ部，pp.50, 1976.

(1986年10月16日受付)