

外圧荷重を受ける多層円柱の応力に関する研究

STUDY ON STRESS OF MULTI-LAYER CYLINDER SUBJECTED TO TENSILE-SPLITTING LOAD

川上 洵^{*}，徳田 弘^{**}，石崎寛治郎^{***}，加賀谷 誠^{****}

By Makoto KAWAKAMI, Hiroshi TOKUDA, Kanjiro ISHIZAKI and Makoto KAGAYA

Concentric multi-layer cylinders are the models of such that the outer surface of the circular reinforced concrete columns or the inner surface of cement concrete pipe is coated by concrete polymer composite and steel pipe is combined by cement concrete. In this study, first, stress analysis of the concentric multi-layer cylinders subjected to tensile-splitting load was performed from the viewpoint of theory of elasticity. Second, the obtained analytical results were confirmed by the tensile-splitting strength test for partially polymer-impregnated concrete. Followingly, structural characteristics of two-layer cylinder were discussed by changing physical property of constitutive materials.

1. まえがき

2種類以上の材料を組み合わせることにより各材料の長所を生かし短所を補った新しい材料・構造は、複合材料・合成構造として飛躍的に発展^{1), 2)}してきた。土木の主要材料であるコンクリートと鋼を基本とし、ポリマー、ガラス繊維そして炭素繊維等の比較的新しい素材との複合化が推進されてきているし、さらに、合成構造では、合成部材とし、柱、はり、版、壁、そしてトラスなどに広く応用されてきている。

耐久性の向上や経済的な設計を目的とした力学的・物理的性質が異なる材料により構成される多層同心円柱は複合構造の一種であり、セメントコンクリート円柱の外壁やコンクリート管の内壁をポリマーコンクリートで被覆する場合³⁾をはじめ、鋼とコンクリートの合成管など土木構造物に多くみられる。これらの多層円柱が外圧荷重を受けるとき、各部に生ずる応力、ひずみそして変位を明らかにしておくことは、設計上非常に重要である。有限要素法はじめ境界要素法などの数値解によるのも一方法であるが、応力および変位が最も顕著に変化すると考えられる層と層の間における応力とひずみに関し精度のよい解を得ることが期待できない。本研究は、2次元弾性問題として変位法により弾性解析を行い級数解を求めた。続いて、得られた解析を検証する目的で部分ポリマー含浸コンクリートの供試体を作製し、割裂試験を行った。部分ポリマー含浸を採用したのは、基材コンクリートにポリマーを含浸させるので、ポリマー含浸部と未含浸部という2

[*]	工博 秋田大学助教授 鉱山学部土木工学科	(〒 010 秋田市手形学園町 1-1)
^{**}	工博 秋田大学教授 鉱山学部土木工学科	(〒 010 秋田市手形学園町 1-1)
^{***}	理修 秩父セメント株式会社 関連製品本部	(〒 360 熊谷市月見町 2-1-1)
^{****}	工修 秋田大学助手 鉱山学部土木工学科	(〒 010 秋田市手形学園町 1-1)

つの物性値の異なる層と層の間の付着が、完全に保たれると考えられたからである。さらに、2層中実円柱の構造特性を明らかにしたものである。

2. 応力解析

図-1のような直径方向に一对の線荷重Pが作用する多層同心円柱の変位および応力を極座標を用いて求める。円柱の直径に比べその長さが大きい場合では、平面ひずみ状態と考えられ、平面問題として以下のよう

2. 1. つりあい式

微小要素に関する半径方向および円周方向のつりあいは、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

2. 2. 応力-ひずみ関係式

平面ひずみ状態に対する 応力-ひずみ関係は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \{ (1-\nu)\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta \} \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \{ \nu\epsilon_r + (1-\nu)\epsilon_\theta \} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{r\theta} = G\gamma_{r\theta} \end{aligned} \right\} (2)$$

2. 3. ひずみと変位の関係式

半径方向の変位をu, 円周方向の変位をvとすると、ひずみと変位の関係式は、式(3)のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned} \right\} (3)$$

2. 4. 微分方程式

式(3)を式(2)へ代入すると、応力と変位の関係は式(4)で表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{2G}{(1-2\nu)} \left\{ \nu \frac{\partial u}{\partial r} + (1-\nu) \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right\} \\ \tau_{r\theta} &= G \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right\} \end{aligned} \right\} (4)$$

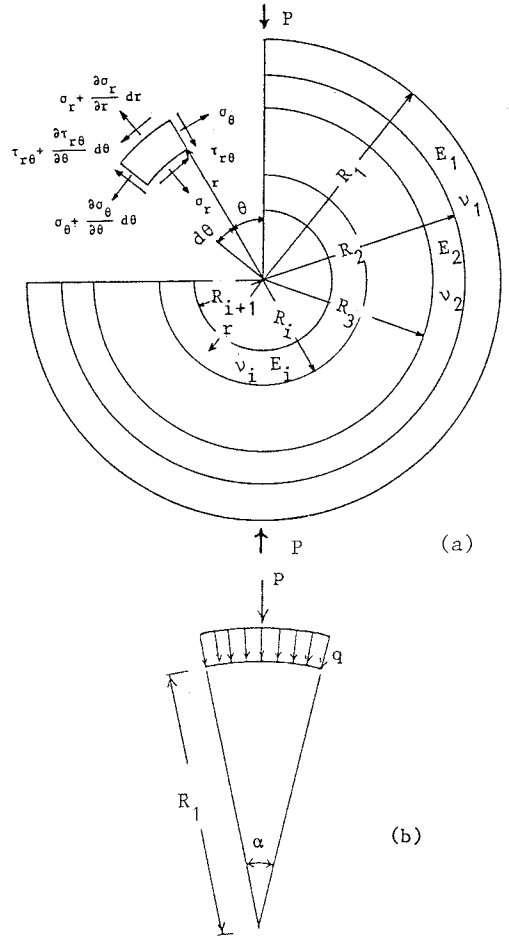


図-1 外圧荷重Pを受ける多層円柱の微小要素(a)および解析に用いる分布荷重q(b)

式 (4)を式 (1)へ代入することにより、つりあい式は、式 (5)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} - \frac{(3-4\nu)}{2(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + (3-4\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + 2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + (1-2\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (1-2\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - (1-2\nu) \frac{v}{r^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

式 (5)の連立微分方程式を解くために、半径と円周方向の変位を u , v とし、 u に関しては、 $n=0$ に対する u_0 と $n=1$ から $n=\infty$ に対する u_1 の2つに分割し、つぎのような級数を仮定する。

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n U(r) \cos n\theta = u_0 + u_1 \quad (6)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} B_n V(r) \sin n\theta \quad (7)$$

式 (6),(7)を式 (5)へ代入し、変数 v を消去すると、 U_0 , U_1 それぞれに対し、式 (8)のようなオイラーの微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} r^2 U_0'' + r U_0' - U_0 &= 0 \\ r^4 U_1'''' + 6r^3 U_1''' + (5-2n^2)r^2 U_1'' - (1+2n^2)r U_1' + (1-n^2)^2 U_1 &= 0 \end{aligned} \right\} (8)$$

式 (8)の解より、変位は、式 (9)のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} u &= C_1 r + C_2 \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{n1} r^{-(n+1)} + A_{n2} r^{(n-1)} \right. \\ &\quad \left. + A_{n3} r^{-(n-1)} + A_{n4} r^{(n+1)} \right\} \cos n\theta \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{n1} r^{-(n+1)} - A_{n2} r^{(n-1)} + \frac{n+4\nu-4}{n-4\nu+2} A_{n3} r^{-(n-1)} - \frac{n-4\nu+4}{n+4\nu-2} A_{n4} r^{(n+1)} \right\} \sin n\theta \end{aligned} \right\} (9)$$

式 (9)を式 (4)および(3)に代入することにより、応力そしてひずみが得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{1-2\nu} C_1 - \frac{2G}{r^2} C_2 + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -(n+1)A_{n1} r^{-(n+2)} + (n-1)A_{n2} r^{(n-2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n+2)(n-1)}{n-4\nu+2} A_{n3} r^{-n} + \frac{(n-2)(n+1)}{n+4\nu-2} A_{n4} r^n \right\} \cos n\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{2G}{1-2\nu} C_1 + \frac{2G}{r^2} C_2 + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)A_{n1} r^{-(n+2)} - (n-1)A_{n2} r^{(n-2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{n-4\nu+2} A_{n3} r^{-n} - \frac{(n+2)(n+1)}{n+4\nu-2} A_{n4} r^n \right\} \cos n\theta \\ \tau_{r\theta} &= -2G \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)A_{n1} r^{-(n+2)} + (n-1)A_{n2} r^{(n-2)} + \frac{n(n-1)}{n-4\nu+2} A_{n3} r^{-n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n+1)}{n+4\nu-2} A_{n4} r^n \right\} \sin n\theta \end{aligned} \right\} (10)$$

そして、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= C_1 - \frac{1}{r^2} C_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ -(n+1)A_{n1}r^{-(n+2)} + (n-1)A_{n2}r^{(n-2)} \\ &\quad - (n-1)A_{n3}r^{-n} + (n+1)A_{n4}r^n \} \cos n\theta \\ \varepsilon_\theta &= C_1 + \frac{1}{r^2} C_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (n+1)A_{n1}r^{-(n+2)} - (n-1)A_{n2}r^{(n-2)} \\ &\quad + \frac{(n-1)(n+4\nu-2)}{n-4\nu+2} A_{n3}r^{-n} - \frac{(n+1)(n-4\nu+2)}{n+4\nu-2} A_{n4}r^n \} \cos n\theta \\ \gamma_{r\theta} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ (n+1)A_{n1}r^{-(n+2)} + (n-1)A_{n2}r^{(n-2)} \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{n-4\nu+2} A_{n3}r^{-n} + \frac{n(n+1)}{n+4\nu-2} A_{n4}r^n \} \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

2. 5. 荷重

高さ L [m] の円柱に W [N] の荷重が作用するとき、単位長さ当たりの荷重 P [N/m] は、 W/L である。この荷重 P が、図-1 のように、 αR_1 [m] なる幅に、 q [N/m²] なる大きさの荷重として作用すると考える。荷重 $p(\theta)$ [N/m²] のフーリエ展開は、

$$p(\theta) = \frac{\alpha q}{\pi} + \sum_{n=2,4}^{\infty} \frac{4q}{n\pi} \sin \frac{n\alpha}{2} \cos n\theta \quad (12)$$

さらに、 P が線荷重であるとき、 $P = q \alpha R_1$ とし、 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\frac{n\alpha}{2}} = 1$ を考慮すると、

$$p(\theta) = \frac{P}{\pi R_1} + \frac{2P}{\pi R_1} \sum_{n=2,4}^{\infty} \cos n\theta \quad (13)$$

で表される。

2. 6. 境界条件

図-1 のように、同心円状に $(i+1)$ 層よりなる中実円柱の場合、外から各層境界の半径を $R_1, R_2 \dots R_i$ とする。変位および応力に関する境界条件は、次のとおりである。

i) $r = R_1$:	$n = 0$ のとき	$\sigma_r = p(\theta)$	
	$n = 2, 4, 6 \dots$ のとき	$\sigma_r = p(\theta)$	$\tau_{r\theta} = 0$
ii) $r = R_k$:	$n = 0$ のとき	$u_{k-1} = u_k$	$\sigma_{r,k-1} = \sigma_{r,k}$
	$n = 2, 4, 6 \dots$ のとき	$u_{k-1} = u_k$	$v_{k-1} = v_k$
		$\sigma_{r,k-1} = \sigma_{r,k}$	$\tau_{r\theta,k-1} = \tau_{r\theta,k}$
iii) $r = 0$:	$n = 0$ のとき	$u = 0$	
	$n = 2, 4, 6 \dots$ のとき	$u = 0$	$v = 0$

積分常数 C_1, C_2 および $A_{n1} \sim A_{n4}$ は、上の境界条件から得られる連立方程式を解くことにより得られる。この $(i+1)$ 層中実円柱に対する C_1, C_2 および $A_{n1} \sim A_{n4}$ に関する連立方程式を付録に示す。

一方、i 層の中空円柱の場合には、境界条件の (i) および (ii) は、上記、中実円柱の場合と同じである。そして、(iii) の条件にかえて、

$$r = R_{i+1} \quad n = 0 \text{ のとき} \quad \sigma_r = 0$$

$$n = 2, 4, 6 \dots \text{のとき} \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

となる。

3. 実験および数値解析

解析結果を検証する目的から、部分ポリマー含浸コンクリート供試体の割裂強度試験を行った。この供試体は、基材セメントコンクリート円柱に対し、外側から半径方向にモノマーを含浸し、加熱重合によりポリマー含浸を行うものであり、その断面は、同心円状である。特に、部分ポリマー含浸コンクリートを解析結果の検証として選んだのは、解析上、各層間の付着が完全であると仮定しているので、基材コンクリートと含浸部では、その仮定が満たされるからである。

3. 1. ポリマー含浸コンクリート供試体

普通ポルトランドセメントおよび豊浦産標準砂を、基材モルタル供試体作製に用いた。水セメント比は、0.55、砂セメント比は、0.50 としてモルタルのフロー値は 188mm である。供試体は、 $\phi 100 \times 200\text{mm}$ の円柱である。供試体は、打込み、脱型後 20°C 湿度 95% の湿空で 1 日養生した後、 20°C の水中で 27 日間養生された。その後、供試体を水中から取り出し、直ちに 150°C のオープン中で 24 時間乾燥し、基材モルタルとした。同心円状のポリマー含浸を達成するため、円柱の供試体の両端が、約 3mm のパラフィンによりコーティングされた。続いて、鋼製密閉容器に供試体を入れ、1 時間 133Pa で脱気を終了した。用いたモノマーは、メチルメタクリレートであり、触媒としてアゾビスイソブチルニトリルを重量比で 1% 用いた。含浸深さを考慮して、供試体を大気圧または、0.196MPa で所定の時間モノマーに浸漬した後アルミニウムホイルで包み 90°C の蒸気中で 1 時間加熱重合した。以上の工程によりポリマー含浸コンクリート供試体を作製した。

3. 2. 測定項目

JIS A-1108 と JIS A-1113 にしたがって圧縮強度と割裂強度試験を行った。割裂試験の場合部分ポリマー含浸コンクリート供試体両端部の円形断面上含浸部・未含浸部そして境界部において、鉛直方向と水平方向に、ゲージ長 10mm のポリエステルストレインゲージを貼布した。圧縮強度においても、鉛直および水平ひずみを測定した。

3. 3. 実験結果

表-1 に、基材コンクリート、部分ポリマー含浸コンクリートそして全含浸コンクリートの力学的・物理

表-1 基材コンクリートおよびポリマー含浸コンクリートの力学的性質

含浸深さ (mm)	含浸率 (%)	含浸率の割合 (%)	実測含浸深さ (mm)	強度 (MPa)		弾性係数 (GPa)	ポロシティー (10^{-2}ml/ml)	熱膨張係数 ($10^{-6}/^\circ\text{C}$)
				割裂	圧縮			
未含浸	0	0	0	2.3	46.6	19	18.2	11.3
部分 含浸	10	2.6	8	3.8	69.3	20	12.9	——
	20	4.9	16	3.8	101.2	28	11.0	——
	30	7.1	26	5.8	142.1	31	6.6	——
全含浸	50	9.4	50	14.5	180.6	36	3.0	14.4

的性質を示す。ポリマー含浸率は、全含浸コンクリートのポリマー重量に対する部分含浸コンクリートの重量の割合である。含浸深さは、図-2の浸漬時間と含浸深さの関係より、当初10, 20, 30mmを目標にしたが、実際には表-1のように若干小さくなった。図-3に、ポリマー含浸率と見かけの圧縮および引張強度を示した。見かけの強度とは、圧縮の場合外荷重を全断面積で除いたものであり、引張強度の場合、供試体の引張破壊したときの荷重 W より $2W/\pi DL$ として得られたものである。図-4は、割裂試験により測定されたひずみ（黒点）と解析結果（実線）の比較であり、各供試体について描いたものである。外圧荷重と対応するひずみの関係をみると、解析値のみならず実験値もほぼ線形であった。そこで、図-4は、単位の外圧荷重 $W=1\text{KN}$ に対するひずみ分布を示したものである。この図-4より、得られた解析結果は、部分ポリマー含浸

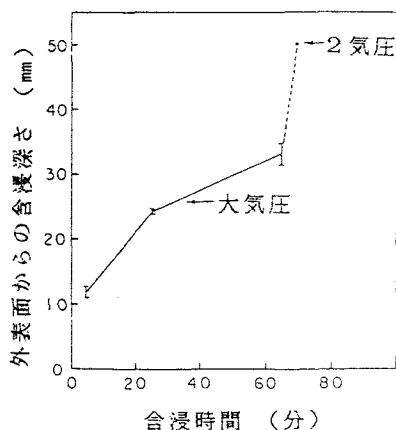


図-2 予備試験における含浸時間と含浸深さの関係

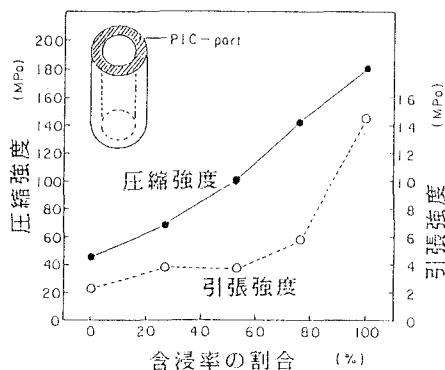


図-3 ポリマー含浸率と圧縮強度および割裂強度の関係

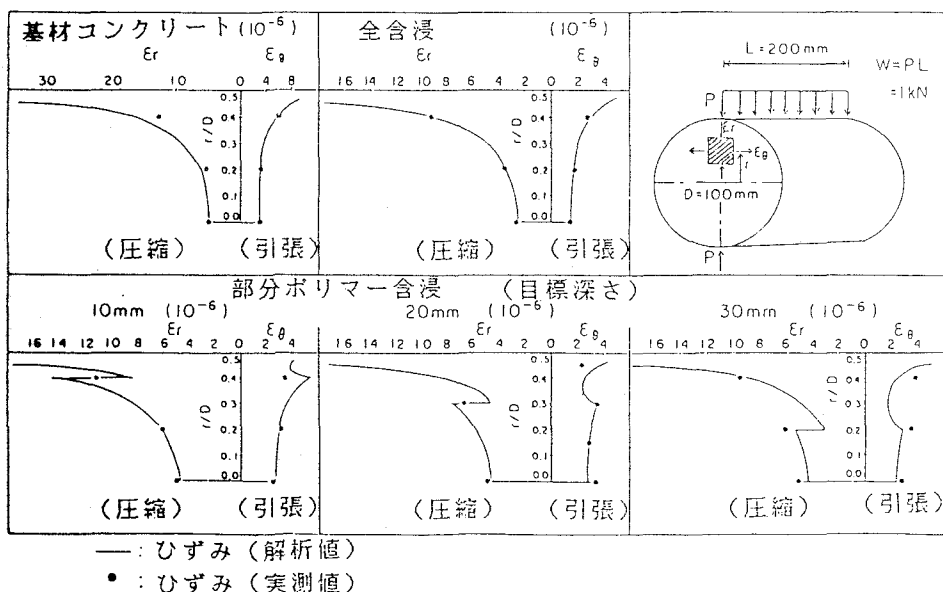


図-4 割裂試験において外圧荷重 $W=1\text{KN}$ 載荷時の実測ひずみと解析値の比較

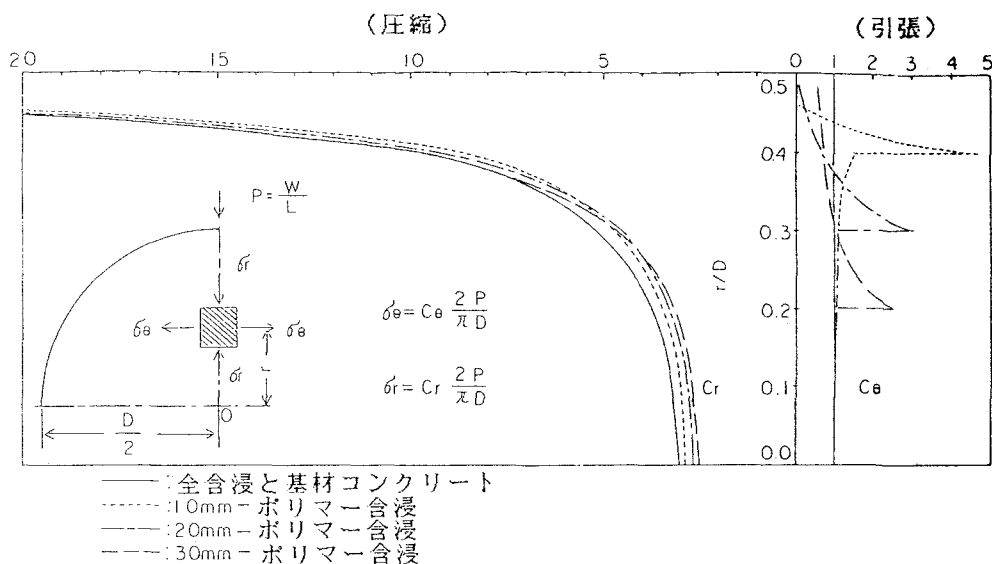


図-5 割裂試験におけるポリマー含浸コンクリートの応力分布

コンクリート円柱の割裂強度試験により、検証できたと考えられる。

さらに、図-5は、これらのひずみを用いて得られる半径方向と円周方向の応力分布を示した。図-5を見ると、基材コンクリートおよび全含浸コンクリートは、巨視的に均質材料と考えられ、円周方向の応力は、実線のように一定の引張りを示す。これに対し部分ポリマー含浸コンクリートでは、未含浸部の円周方向の応力は、ほぼ一定である。しかし、含浸部と未含浸部との物性値の違いから境界含浸部で大きな引張応力が見られる。その引張応力の大きさは、含浸部の深さに非常に大きく影響される。

4. 構造特性

得られた解析結果をみると、弾性係数比およびポアソン比そして幾何学的構成から層厚に関する径比が応力に大きく影響する。いま、図-6(a)のような外圧荷重を受ける2層円柱に対し、外・内層の弾性係数が変化する場合の構造特性を考える。外層の弾性係数 E_1 、内層の弾性係数 E_2 とする。最初に $E_1 < E_2$ のとき、鉄筋コンクリート円柱の外壁をポリマーセメントモルタルや軽量コンクリートで被覆した場合、内部のコンクリート部分および外層の外側に引張応力が生じる(図-6(e))。これに対し、 $E_1 > E_2$ のとき、これは、前述のように外層がポリマー含浸コンクリートの場合である(図-6(c))。そして、 $E_1 \gg E_2$ のとき、管構造に近くなり、曲げの影響が大きくなる(図-6(b))

$E_1 = E_2$ ならば、円周応力は等分布であり、割裂引張強度 $\sigma_t = 2P/\pi D$ で与えられる(図-6(d))。式(9),(10),(13)より、この結果を導くと

$$r = 0 : u = 0 \cdots (B-1)$$

$$r = R_1 : \sigma_r = p(\theta) \cdots (B-2), \quad \tau_{r\theta} = 0 \cdots (B-3)$$

であるから、(B-1)より $C_2 = 0$, $A_{n1} = A_{n3} = 0$

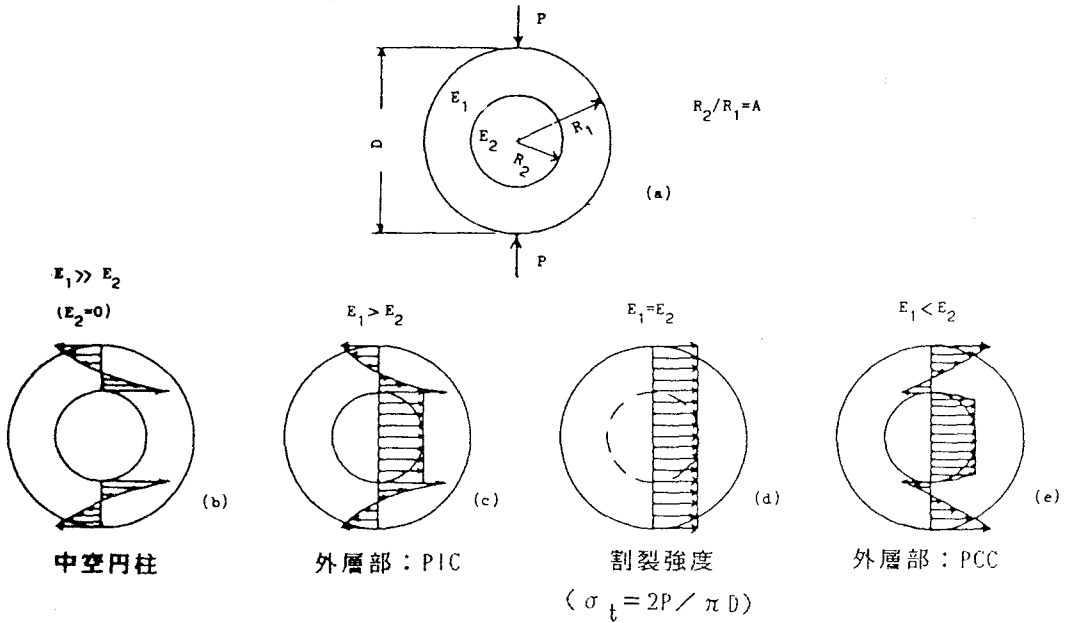


図-6 外圧荷重を受ける2層円柱の円周方向応力分布

そして (B-2), (B-3) より

$$C_1 = \frac{1-2\nu}{2} \frac{-P}{G\pi R_1}, \quad A_{n2} = \frac{n}{2(n-1)} \frac{-P}{G\pi R_1} R_1^{-(n-2)}, \quad A_{n4} = -\frac{n+4\nu-2}{2(n+1)} \frac{-P}{G\pi R_1} R_1^{-n}$$

と係数が決定する。 $n=2(k+1)$ とおくと、既往の結果⁴⁾と一致する。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{\pi R_1} - \frac{2P}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{2k+1} \left\{k+1 - k\left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right\} \cos 2(k+1)\theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{P}{\pi R_1} + \frac{2P}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{2k+1} \left\{k+1 - (k+2)\left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right\} \cos 2(k+1)\theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2P}{\pi R_1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{r}{R_1}\right)^{2k} \left\{1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right\} \sin 2(k+1)\theta \end{aligned}$$

ここで、 σ_θ は、荷重軸線上で一定値 $2P/\pi D$ となる。

2種以上の材料を組合わせて用いるのは、材料の特性を考慮し、耐久性の向上、遮音、断熱の効果を期待など、多様多岐にわたる。しかし、構造物の一部である以上、力学的な複合化がなされているので、上のような考察により常に力学的に検証されることが重要である。得られた結果は、遠心力締固めの際、粗骨材とモルタル部が分離する傾向がある鉄筋コンクリート管の外圧強度、そして表面が乾燥湿潤状態にある内部との物性が異なる円柱部材の割裂強度の評価など、広く応用できると考えられる。

5. 結論

多層円柱が外圧荷重を受けるときの変位，応力そしてひずみを解析的，実験的に検討したが，得られた結論を示すと次のとおりである。

1. 2次元弾性問題として、変位法により級数解を示した。
2. 得られた解析結果は、部分ポリマー含浸コンクリート円柱供試体の割裂強度試験を行うことにより検証され、また、その含浸深さと応力分布の関係が明らかにされた。
3. 2層円柱を対象として、外層と内層の弾性係数比を変化させたときの構造特性が示された。さらに、1で誘導された結果から、従来中実円柱が割裂荷重を受けるときの応力として用いられる式を誘導した。

[付録] 外圧荷重を受ける多層中実円柱に関する係数行列

$n = 0$ に対するとき

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{2G_1}{1-2\nu_1} - \frac{2G_1}{R_1^2} & & & \\ \frac{2G_1}{1-2\nu_1} - \frac{2G_1}{R_2^2} - \frac{2G_2}{1-2\nu_2} - \frac{2G_2}{R_2^2} & & & \\ R_2 & \frac{1}{R_2} & -R_2 & -\frac{1}{R_2} \\ & & \ddots & \\ M_{0,k} & & & \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} M_{0,i-} \\ \\ \left(\begin{array}{cccc} \frac{2G_{i-1}}{1-2\nu_{i-1}} - \frac{2G_{i-1}}{R_{i-1}^2} - \frac{2G_i}{1-2\nu_i} - \frac{2G_i}{R_i^2} \\ R_i & \frac{1}{R_i} & -R_i & -\frac{1}{R_i} \end{array} \right) \\ \\ \left(\begin{array}{ccc} \frac{2G_i}{1-2\nu_{i+1}} - \frac{2G_i}{R_{i+1}^2} - \frac{2G_{i+1}}{1-2\nu_{i+1}} \\ R_{i+1} & \frac{1}{R_{i+1}} & -R_{i+1} \end{array} \right) \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{l} C_{1,1} \\ C_{2,1} \\ C_{1,2} \\ . \\ . \\ . \\ C_{2,i-1} \\ C_{1,i} \\ C_{2,i} \\ C_{1,i+1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{P}}{w R_1} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

$n = 2, 4, 6 \cdots$ に対するとき、

[illegible]

$$\begin{aligned}
M_{1,1} &= \begin{bmatrix} -(n+1)R_1^{-(n+2)} & (n-1)R_1^{(n-2)} & -\frac{(n+2)(n-1)}{n-4v_1+2}R_1^{-n} & \frac{(n-2)(n+1)}{n+4v_1-2}R_1^n \\ (n+1)R_1^{-(n+2)} & (n-1)R_1^{(n-2)} & \frac{n(n-1)}{n-4v_1+2}R_1^{-n} & -\frac{n(n+1)}{n+4v_1-2}R_1^n \end{bmatrix} \\
M_{1,k} &= \begin{bmatrix} R_k^{-(n+1)} & R_k^{(n-1)} & R_k^{-(n-1)} & R_k^{(n+1)} \\ R_k^{-(n+1)} & -R_k^{(n-1)} & \frac{n+4v_{k-1}-4}{n-4v_{k-1}+2}R_k^{-(n-1)} & -\frac{n-4v_{k-1}+4}{n+4v_{k-1}-2}R_k^{(n+1)} \\ -(n+1)R_k^{-(n+2)} & (n-1)R_k^{(n-2)} & -\frac{(n+2)(n-1)}{n-4v_{k-1}+2}R_k^{-n} & \frac{(n-2)(n+1)}{n+4v_{k-1}-2}R_k^n \\ (n+1)R_k^{-(n+2)} & (n-1)R_k^{(n-2)} & \frac{n(n-1)}{n-4v_{k-1}+2}R_k^{-n} & -\frac{n(n+1)}{n+4v_{k-1}-2}R_k^n \end{bmatrix} \\
M_{1,k}' &= \begin{bmatrix} -R_k^{-(n+1)} & -R_k^{(n-1)} & -R_k^{-(n-1)} & -R_k^{(n+1)} \\ -R_k^{-(n+1)} & R_k^{(n-1)} & -\frac{n+4v_k-4}{n-4v_k+2}R_k^{-(n-1)} & \frac{n-4v_k+4}{n+4v_k-2}R_k^{(n+1)} \\ G_k'(n+1)R_k^{-(n+2)} & -G_k'(n-1)R_k^{-n} & G_k'\frac{(n+2)(n-1)}{n-4v_k+2}R_k^{-n} & -G_k'\frac{(n-2)(n+1)}{n+4v_k-2}R_k^n \\ -G_k'(n+1)R_k^{-(n+2)} & -G_k'(n-1)R_k^{-n} & -G_k'\frac{n(n-1)}{n-4v_k+2}R_k^{-n} & -G_k'\frac{n(n+1)}{n+4v_k-2}R_k^n \end{bmatrix} \\
M_{1,i+1}' &= \begin{bmatrix} -R_{i+1}^{(n-1)} & -R_{i+1}^{(n+1)} \\ R_{i+1}^{(n-1)} & \frac{n-4v_{i+1}+4}{n+4v_{i+1}-2}R_{i+1}^{(n+1)} \\ -G_{i+1}'(n-1)R_{i+1}^{(n-2)} & -G_{i+1}'\frac{(n-2)(n+1)}{n+4v_{i+1}-2}R_{i+1}^n \\ -G_{i+1}'(n-1)R_{i+1}^{(n-2)} & -G_{i+1}'\frac{n(n+1)}{n+4v_{i+1}-2}R_{i+1}^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$G_k' = \frac{G_k}{G_{k-1}}$$

$$G_{i+1}' = \frac{G_{i+1}}{G_i}$$

参考文献

1. Sabodh K.Garg et al., "Analysis of Structural Composite Materials", Marcal Dekker, Inc. New York, 1973.
2. 前田幸雄, "土木における合成構造", コンクリート工学 Vol.21, No.12, 1983, pp. 13-22.
3. KAWAKAMI M, et al., "Strength of Polymer Composite Pipe", Proc. of the Fourth Int'l Congr. on Polymers in Concrete, 1984, pp.169-174.
4. 川本勝万, "応用弾性学", 共立出版, 1968, pp.120-123.

(1986年10月17日受付)